NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HENRI PICCIOLI

Une question de géométrie différentielle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 454-459

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__454_1>

[O5n]

UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE;

PAR M. HENRI PICCIOLI.

Soit S une surface dont les équations sont

$$x = x(uv), \qquad y = y(uv), \qquad z = z(uv),$$

quand on la rapporte à un système de coordonnées curvilignes u et v qui donne à l'élément linéaire la forme

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

et supposons que le nombre h des points (exceptionnels) de S pour lesquels la normale correspondante est parallèle à une direction quelconque de l'espace, soit un nombre fini.

Soient X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale à S, $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ les cosinus d'une direction fixe dans l'espace; nous allons chercher s'il existe sur cette surface des lignes telles qu'en chaque point le plan de la section normale tangente demeure parallèle à la direction assignée.

Observons pour cela que les cosinus directeurs de la perpendiculaire au plan de la section normale tangente d'une ligne quelconque L de S étant proportionnels respectivement aux différences

$$\mathrm{Y}\,dz - \mathrm{Z}\,dy, \qquad \mathrm{Z}\,dx - \mathrm{X}\,dz, \qquad \mathrm{X}\,dy - \mathrm{Y}\,dx,$$

où les accroissements sont pris en se déplaçant le long de L, si nous voulons que les points de L appartiennent au lieu cherché, il faudra écrire l'équation

$$\begin{aligned}&\cos a(\mathrm{Y}\,dz - \mathrm{Z}\,dy)\\ &\quad + \cos b(\mathrm{Z}\,dx - \mathrm{X}\,dz) + \cos c(\mathrm{X}\,dy - \mathrm{Y}\,dx) = 0.\end{aligned}$$

Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme

$$du\,\Sigma\cos a\left(\mathrm{Y}\,\frac{\partial z}{\partial u} - \mathrm{Z}\,\frac{\partial y}{\partial u}\right) + dv\,\Sigma\cos a\left(\mathrm{Y}\,\frac{\partial z}{\partial v} - \mathrm{Z}\,\frac{\partial y}{\partial v}\right) = 0$$

Mais nous avons

$$\mathrm{Y}\,\frac{\partial z}{\partial u} - \mathrm{Z}\,\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left(\mathrm{E}\,\frac{\partial x}{\partial v} - \mathrm{F}\,\frac{\partial x}{\partial u}\right),$$

$$\mathrm{Y}\,\frac{\partial z}{\partial v} - \mathrm{Z}\,\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left(\mathrm{F}\,\frac{\partial x}{\partial v} - \mathrm{G}\,\frac{\partial x}{\partial u}\right)$$

et, par conséquent,

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned}&du\,\Sigma\cos a\left(\mathrm{E}\,\frac{\partial x}{\partial v} - \mathrm{F}\,\frac{\partial x}{\partial u}\right)\\ &\quad + dv\,\Sigma\cos a\left(\mathrm{F}\,\frac{\partial x}{\partial v} - \mathrm{G}\,\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0\end{aligned}\right.$$

Cette équation différentielle du premier ordre nous montre que, par rapport à une direction donnée, il existe toujours sur la surface S un système ∞^1 de lignes telles que le plan de la section normale tangente demeure parallèle à cette direction ([1]).

Il en résulte qu'un point de S sert, au moins en général, à déterminer une ligne du système, mais si en un tel point la normale à S est parallèle à la direction donnée (ce qui peut arriver au maximum h fois), comme on a

$$\cos a = X, \qquad \cos b = Y, \qquad \cos c = Z,$$

l'équation (A) est vérifiée identiquement, puisque par ce point passent toutes les lignes du système. On peut ajouter que si deux lignes Γ ont des points communs, en ces points la normale à la surface est parallèle à la direction donnée et par conséquent ce sont des points exceptionnels par rapport à cette même direction.

Pour la sphère on a $h = 2$: ces deux points exceptionnels sont les extrémités du diamètre parallèle à la direction assignée. Le système Γ correspondant est constitué de ∞^1 grands cercles passant pour ces deux points.

Il résulte de la définition de la ligne Γ que :

α. *Si parmi les lignes du système* Γ *on trouve une asymptotique de la surface, elle sera une hélice cylindrique.*

β. *Une géodésique faisant partie d'un système* Γ *est une ligne plane et par conséquent ligne de courbure.*

Remarque. — D'après l'hypothèse que nous avons posée, notre surface ne renferme pas de lignes consti-

---

([1]) Nous dirons que ces lignes forment un systeme Γ par rapport à cette direction.

tuées de points exceptionnels. Mais l'on voit tout de suite que, dans le cas général, si une surface contient une ligne de cette espèce, celle-ci est nécessairement une ligne de courbure plane. Dans le plan, si la direction choisie lui est perpendiculaire, toute ligne est ligne Γ et tout point est point exceptionnel. Dans le cas contraire, les lignes Γ sont des droites parallèles et il n'y a pas de points exceptionnels.

II.

Pour donner une application de ce qui précède, nous allons montrer que les asymptotiques de la surface minima de M. Enneper sont des hélices cylindriques.

Les équations de cette surface rapportée aux lignes de courbure α et β sont

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} x &= 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3, \\ y &= \beta^3 - 3\beta - 3\alpha^2\beta, \\ z &= 3(\alpha^2 - \beta^2). \end{aligned} \right.$$

Les asymptotiques ont pour équations respectives

$$\alpha + \beta = \text{const.}, \qquad \alpha - \beta = \text{const.}$$

En posant

$$\alpha = \frac{u+v}{2}, \qquad \beta = \frac{u+v}{2},$$

et en substituant dans (1) on trouve

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{u^3 + v^3 - 3u^2v - 3uv^2 + bu + bv}{4}, \\ y &= \frac{v^3 - u^3 + 3uv^2 - 3u^2v - bu + bv}{4}, \\ z &= buv. \end{aligned} \right.$$

qui sont des équations de la même surface rapportée à ses lignes asymptotiques u et v.

Évidemment pour démontrer que ces lignes sont des hélices cylindriques, il suffira de nous assurer qu'elles forment un système Γ par rapport à une certaine direction (même variable de ligne à ligne) : alors, d'après le théorème (β) du paragraphe précédent, la propriété dont il s'agit en résultera.

Or, si nous considérons les lignes $u =$ const., l'équation (A) correspondante peut s'écrire, en tenant compte de

$$E = G, \qquad F = o,$$

$$\begin{aligned} &\cos a\,(3u^2 - buv - 3v^2 + b) \\ &\quad + \cos b\,(3v^2 - buv - 3u^2 - b) + 12v\cos c = o, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} &\lambda\,(3u^2 - buv - 3v^2 + b) \\ &\quad + \mu\,(3v^2 - buv - 3u^2 - b) + 12v = o, \end{aligned}$$

en posant

$$\cos a = \lambda \cos c, \qquad \cos b = \mu \cos c.$$

On voit facilement que cette équation est toujours satisfaite pour les valeurs

$$\lambda = \mu = \frac{1}{u},$$

qui ne dépendent pas de v et, par conséquent, les lignes $u =$ const. forment un système Γ par rapport à la direction

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \cos a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+2}}, \\[2ex] \cos b_1 = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+2}}, \qquad \cos c_1 = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+2}}. \end{cases}$$

D'une manière analogue on verra que les asymptotiques $v =$ const. forment un système Γ par rapport à la direction

$$(b)\quad \begin{cases} \cos a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{v^2+2}}, \\ \cos b_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{v^2+2}}, \qquad \cos c_2 = \dfrac{v}{\sqrt{v^2+2}}, \end{cases}$$

ce qui suffit pour vérifier la propriété énoncée ([1]).

La direction est variable de ligne à ligne : les (a) sont parallèles à un plan ω_1, les (b) à un autre plan ω_2 et ces deux plans sont orthogonaux entre eux. Une asymptotique L individualise une de ces directions : cette direction individualise à son tour un système ∞' de lignes Γ contenant L et par conséquent tout système Γ renferme une asymptotique. Si $a = 4$ chaque asymptotique contient quatre points exceptionnels.