NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ED. COLLIGNON

Problèmes divers sur la méthode inverse des tangentes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 11-25

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__11_1>

[O2b]

PROBLÈMES DIVERS SUR LA MÉTHODE INVERSE DES TANGENTES (¹);

PAR M. ED. COLLIGNON.

PROBLÈME DÉRIVÉ DE CELUI DE M. DE BEAUNE.

On donne un axe fixe OX. On demande de trouver une courbe AB telle que, si l'on mène au point M la tangente MR jusqu'au point R où elle rencontre l'axe, puis par le point R une droite RN, faisant avec RM un angle donné α, le point N, où la droite RN coupe la normale MN à la courbe, appartienne à une droite donnée OH, faisant l'angle β avec l'axe OX. En d'autres termes, le segment MN compris sur la normale entre la

(¹) *Voir* p. 488.

courbe et la droite OH, doit être vu du pied de la tangente R sous un angle α donné constant.

On peut prendre pour origine le point O où la droite donnée rencontre l'axe OX. Le cas où la droite serait parallèle sera examiné à part. Nous prendrons pour axe des y la perpendiculaire OY menée à OX par le point O.

Pour abréger l'écriture nous poserons $m = \tang\alpha$ et $b = \tang\beta$. Nous avons, par conséquent,

$$\mathrm{MN} = \mathrm{RM} \times m.$$

Soient $x = \mathrm{OP}$, $y = \mathrm{PM}$ les coordonnées du point M de la courbe,

$$x' = \mathrm{OP}', \qquad y' = \mathrm{P'N}$$

les coordonnées du point N, commun à la normale et à la droite OH.

Menons par le point M la droite ML parallèle à OX, jusqu'à la rencontre de NP'. Les deux triangles MLN, RPM sont semblables et donnent les égalités

$$\frac{\mathrm{LN}}{\mathrm{RP}} = \frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{PM}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{RM}} = m.$$

Observons de plus que RP est la sous-tangente de la courbe égale à $\frac{y\,dx}{dy}$. Il vient donc

$$\mathrm{LN} = \mathrm{RP} \times m = my\frac{dx}{dy},$$
$$\mathrm{LM} = \mathrm{PM} \times m = my,$$

et, par conséquent,

$$x' = \mathrm{OP}' = \mathrm{OP} - \mathrm{LM} = x - my,$$
$$y' = \mathrm{P'N} = \mathrm{PM} + \mathrm{LN} = y + my\frac{dx}{dy}.$$

La condition imposée au point $\mathrm{N}(x', y')$ s'exprime par la relation $y' = bx'$, équation de la droite OH ; ce qui conduit à l'équation différentielle

$$y + my\frac{dx}{dy} = b(x - my),$$

ou bien, en divisant par y,

$$(1) \qquad 1 + m\frac{dx}{dy} = b\left(\frac{x}{y} - m\right).$$

Cette équation rentre dans le type des équations homogènes, et les variables se séparent si l'on prend pour variable le rapport $\frac{x}{y}$ des deux coordonnées. Posons $\frac{x}{y} = t$; il viendra, en chassant x et dx,

$$1 + m\left(t + \frac{y\,dt}{dy}\right) = b(t - m).$$

On résoudra cette équation par rapport à $\frac{dy}{y}$; il vient

$$\frac{dy}{y} = \frac{m\,dt}{(b-m)t - (bm+1)} = \frac{m}{b-m}\left[\frac{dt}{t - \frac{1+bm}{m-b}}\right].$$

Mais $m = \operatorname{tang}\alpha$, $b = \operatorname{tang}\beta$; donc

$$\frac{1+bm}{b-m} = \frac{1+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tang}(\beta-\alpha)} = \cot(\beta - \alpha);$$

et nous ferons $\mu = \cot(\beta - \alpha) = \frac{1+bm}{b-m}$, pour simplifier la notation. Nous aurons donc

$$(2) \qquad \frac{dy}{y} = \frac{m}{b-m}\left(\frac{dt}{t-\mu}\right),$$

équation dont l'intégrale générale est

$$(3) \qquad y = C(t-\mu)^{\frac{m}{b-m}},$$

avec une constante arbitraire C.

Le cas de $b = m$ doit être traité à part; on a alors $\beta = \alpha$, et $\cot(\beta - \alpha)$ a une valeur infinie. L'équation

$$1 + m\left(t + \frac{y\,dt}{dy}\right) = b(t - m)$$

perd son terme en t et se réduit à la forme

$$(2\ bis) \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{m\,dt}{1 + mb} = -\frac{m}{1 + m^2}\,dt,$$

d'où résulte l'équation intégrale

$$(3\ bis) \qquad y = Ce^{-\frac{m}{1+m^2}t}.$$

Si dans l'équation (3), qui correspond à la non-égalité de m et de b, on remplace t par $\frac{x}{y}$, il vient pour l'équation de la courbe cherchée

$$(4) \qquad y^{\frac{b}{b-m}} = C(x - \mu y)^{\frac{m}{b-m}}.$$

La même opération appliquée à l'équation (3 *bis*) conduit à l'équation

$$(4\ bis) \qquad x = -\frac{1 + m^2}{m}\,yl\left(\frac{y}{C}\right).$$

Les deux équations (4) et (4 *bis*) donnent la solution dans tous les cas possibles, sauf celui où la droite OH est parallèle à OX. Mais pour la discussion du problème, il convient d'examiner plusieurs cas, suivant que l'on a $b < m$ ou $b > m$, et suivant que m est positif ou négatif. Quant à b, on peut toujours le supposer positif.

DISCUSSION DE LA SOLUTION.

Premier cas : b et m positifs. — Ce cas se subdivise en deux, suivant que b est plus petit que m ou que b est plus grand.

1° $b < m$.

L'équation (4) devient, en prenant positivement les exposants dans les deux membres,

$$(x - \mu y)^{\frac{m}{m-b}} = Cy^{\frac{b}{m-b}}.$$

Le nombre μ est négatif, car on a toujours $\mu = \frac{1 + bm}{b - m}$; nous poserons donc $\mu = -\mu'$, et l'équation deviendra, en posant $\frac{m}{m-b} = n$,

$$(x + \mu' y)^n = Cy^{n-1}.$$

Lorsque n est entier, la courbe est une courbe algébrique du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Le signe de m dépend du sens dans lequel on porte le segment MN sur la normale à la courbe; ce sens doit être choisi dans chaque cas particulier de manière à justifier les formules de transformation dont on a fait usage, savoir

$$x' = x - my,$$

$$y' = y + m\frac{y\,dx}{dy}.$$

2° $b > m$.

L'équation (4) conserve sa forme primitive, μ est positif, et si l'on fait $\frac{m}{b-m} = n$, elle devient

$$y^{n+1} = C(x - \mu y)^n.$$

Si n est entier, elle est du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre.

Second cas : b positif, *m* négatif. — Alors $b - m$ est toujours positif. Faisons $m = - m'$, en mettant le signe en évidence. L'équation (4) deviendra

$$y^{\frac{b}{b+m'}} = \mathrm{C}(x - \mu y)^{-\frac{m'}{b+m'}},$$

ou bien, en ramenant les exposants à une valeur positive,

$$y^{\frac{b}{b+m'}} \times (x - \mu y)^{\frac{m'}{b+m'}} = \mathrm{C}.$$

Dans ce cas $\mu = \frac{1 + mb}{b - m} = \frac{1 - bm'}{b + m'}$ peut être positif, nul ou négatif, suivant que bm' est moindre que l'unité, égal à l'unité, ou plus grand que l'unité. Faisons $\frac{b + m'}{m'} = n$, ce qui entraîne $\frac{b + m'}{b} = \frac{n}{n - 1}$. L'équation devient

$$y^{\frac{n-1}{n}} \times (x - \mu y)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{C},$$

et en élevant les deux membres de cette équation à la puissance dont l'exposant est n, il vient en définitive

$$y^{n-1} \times (x - \mu y) = \mathrm{C}^n.$$

Nous résumerons les divers cas que nous venons d'indiquer dans le Tableau suivant :

Désignation des cas, d'après le signe de m.	Relation de grandeur entre m et b.	Signe du facteur μ : $\mu = \dfrac{1+bm}{b-m}$.	Forme de l'équation finale.
PREMIER CAS : m positif.	$b < m$.	μ négatif, égal à $-\mu'$. $n = \dfrac{m}{m-b}$.	$(x+\mu' y)^n = C y^{n-1}$.
	$b = m$.	»	$x = -\dfrac{1+m^2}{m} y l \left(\dfrac{y}{C}\right)$.
	$b > m$.	μ positif. $n = \dfrac{m}{b-m}$.	$C(x-\mu y)^n = y^{n+1}$.
		$\mu = \dfrac{1-bm'}{b+m'}$.	
SECOND CAS : m négatif et égal à $-m'$.	$b > m$. $\dfrac{b+m'}{m'} = n$.	$bm' < 1$, μ positif,	$y^{n-1}(x-\mu y) = C^n$.
		$bm' = 1$, $\mu = 0$.	$y^{n-1} x = C^n$.
		$bm' > 1$, μ négatif, égal à $-\mu'$.	$y^{n-1}(x+\mu' y) = C^n$.

La constante C qui figure dans ces équations est partout homogène à une longueur. On peut la faire égale à zéro, sauf dans le cas de $b = m$. On obtient alors pour solution une droite quelconque passant par l'origine. Si l'on prend la droite

$$y = x \tang(\beta - \alpha),$$

on voit qu'elle satisfait à toutes les conditions en y associant la droite

$$y' = x' \tang \beta,$$

qui fait l'angle α avec la première.

Parmi toutes les courbes qui sont comprises dans le Tableau précédent, il peut y avoir des courbes du second ordre. On en obtient :

1° En faisant $n = 2$, pour m positif et plus grand que b;

2° En faisant $n = 1$, avec m positif et moindre que b;

3° En faisant $n = 2$, pour m négatif.

On obtient, en effet, d'après ces hypothèses, les équations :

$$(x + \mu' y)^2 = Cy,$$

qui représente une parabole;

$$C(x - \mu y) = y^2,$$

qui en représente nne autre; et

$$y(x \mp \mu y) = C^2,$$

qui représente des hyperboles.

Les paraboles passent par l'origine, au point de rencontre de l'axe OX et de la droite $y' = bx'$.

Si l'on cherche à appliquer cette théorie à une parabole quelconque passant par l'origine, on n'est pas certain d'avance que cette parabole possédera réellement la propriété indiquée. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les valeurs de m et b soient réelles; autrement il n'existerait pas de droite réelle satisfaisant à la condition imposée. Prenons, par exemple, la parabole

$$(x + \mu' y)^2 = Cy.$$

Nous devons déterminer m et b par les relations

$$\frac{m}{m-b} = n = 2,$$
$$\frac{1+bm}{m-b} = \mu'.$$

On tire de la première

$$b = \tfrac{1}{2} m,$$

et la seconde devient

$$m + \frac{2}{m} = \mu'$$

ou bien

$$m^2 - \mu' m + 2 = 0.$$

On a donc pour m

$$m = \frac{\mu'}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu'^2}{4} - 2}.$$

Le nombre m ne sera réel qu'autant qu'on aura

$$\mu'^2 > 8,$$

et la moindre valeur admissible pour μ' est égale à $2\sqrt{2}$; à cette valeur limite correspondent les valeurs

$$m = \sqrt{2}, \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ce qui donne pour les angles α et β

$$\alpha = 54^\circ 44', \qquad \beta = 35^\circ 16'$$

environ. Les deux angles sont complémentaires, puisque le produit des tangentes est égal à l'unité.

La parabole

$$C(x - \mu y) = y^2$$

correspond aux valeurs de m et b déduites des équations

$$\frac{m}{b - m} = n = 2,$$

$$\frac{1 + mb}{b - m} = \mu.$$

De la première on tire $b = \frac{3}{2}m$, et substituant cette valeur dans la seconde, il vient

$$3m^2 - \mu m + 2 = 0,$$

ce qui donne

$$m = \frac{\mu}{6} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{36} - \frac{2}{3}} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 24}}{6}.$$

La propriété n'est donc réelle pour la parabole que si μ est au moins égal à $2\sqrt{6}$.

A la valeur limite

$$\mu = 2\sqrt{6},$$

correspondent pour m et b les valeurs

$$m = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad b = \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

et l'on a encore

$$mb = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{2}} = 1,$$

de sorte que les valeurs limites des angles α et β sont encore complémentaires. On a, pour $m = \sqrt{\frac{2}{3}}$,

$$\alpha = 39^\circ 14',$$

et pour $b = \sqrt{\frac{3}{2}}$,

$$\beta = 50^\circ 46'$$

environ.

Lorsqu'on examine de même les hyperboles représentées par l'équation générale

$$y(x \mp py) = C^2,$$

on a, puisque m est négatif et égal à $-m'$,

$$\frac{b+m'}{m'} = n = 2,$$

$$\frac{1-bm'}{b+m'} = \mu.$$

On tire de la première

$$b = m',$$

et la seconde devient

$$m'^2 + 2\mu m' - 1 = 0,$$

ce qui donne pour m'

$$m' = -\mu \pm \sqrt{\mu^2+1}.$$

Il faut que m' soit réel et positif. La réalité de m est assurée quelle que soit la valeur de μ. Mais la valeur positive exige qu'on prenne le signe supérieur du radical et qu'on pose

$$m' = -\mu + \sqrt{\mu^2+1}.$$

La même formule donne b, puisque $b = m'$.

Pour $\mu = 0$, $m' = 1$, et la courbe devient l'hyperbole $xy = C^2$, rapportée à ces asymptotes. La droite $y' = bx'$ est alors la bissectrice $y = x$ de l'angle des axes. Il est aisé de vérifier géométriquement la propriété de la courbe.

Propriété générale des courbes étudiées.

Si on laisse de côté la constante C, l'équation de la courbe, sauf le cas de $b = m$, ne dépend que des exposants $\frac{m}{m-b}$ ou $\frac{b+m'}{m'}$ et du coefficient μ. Les exposants ne sont pas altérés si l'on multiplie les nombres m et b par un même nombre λ; mais le coefficient μ subit de ce fait une certaine modification et passe généralement de la valeur

$$\frac{1+mb}{m-b} \quad \text{à la valeur} \quad \frac{1+mb\lambda^2}{\lambda(m-b)}.$$

Toutefois, il conserve sa valeur si l'on a identiquement

$$\frac{1+mb}{m-b} = \frac{1+mb\lambda^2}{\lambda(m-b)},$$

c'est-à-dire si le facteur λ satisfait à l'équation du second degré

$$\lambda^2 - \left(\frac{1}{mb}+1\right)\lambda + \frac{1}{mb} = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$\lambda = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{1}{mb}.$$

La première laisse subsister sans altération les coefficients m et b. Mais la seconde montre que l'équation de la courbe reste la même si l'on substitue aux rapports

$$m \qquad \text{et} \qquad b$$

les rapports

$$m\lambda = \frac{1}{b} \qquad \text{et} \qquad l\lambda = \frac{1}{m};$$

ce qui revient à remplacer les angles

$$\alpha \qquad \text{et} \qquad \beta$$

par les angles

$$\frac{\pi}{2}-\beta \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{2}-\alpha,$$

c'est-à-dire par les angles complémentaires alternés.

Dans les cas limites signalés plus haut, les angles α et β étant complémentaires, la substitution de $\frac{\pi}{2}-\beta$

à α laisse α tel qu'il est, et β est de même conservé; de sorte que les nombres m et b ne peuvent subir aucune altération sans changement de la courbe.

Cas du parallélisme des droites OX, OH.

Il reste un cas à examiner : celui où la droite donnée est parallèle à la droite OX. Le problème est alors plus simple, car il suffit d'égaler l'ordonnée y' à une constante h. L'équation différentielle devient

$$y + my\frac{dx}{dy} = h,$$

et l'intégrale générale est

$$mx = hl\left(\frac{y}{C}\right) - y.$$

C'est l'équation de la courbe de M. de Beaune généralisée, rapportée à l'asymptote et à un axe perpendiculaire.

On voit que le problème est très général et comprend comme solution des courbes d'ordres et d'espèces très différentes, les unes algébriques, les autres transcendantes; celles-ci sont de la forme

$$x + \frac{1 + m^2}{m} yl\left(\frac{y}{C}\right) = 0$$

ou de la forme

$$mx = hl\left(\frac{y}{C}\right) - y.$$

Toutes ces courbes peuvent être regardées comme engendrées par le sommet M d'un angle droit RMN, appartenant à un triangle rectangle formé par la tangente MR, la normale MN et la droite RN qui joint le pied R de la tangente à l'intersection N de la normale avec la droite fixe OH. Si l'on fait suivre la courbe au point M, le triangle, dont les deux autres sommets décrivent, l'un l'axe OX, l'autre la droite OH, se déplace en se déformant, mais en conservant sa similitude, puisque l'angle MRN $= \alpha$ et l'angle droit RMN restent constants tous deux. De plus, le côté RM reste tangent à la courbe. Imaginons la circonférence circonscrite au triangle mobile. Son centre sera le milieu I de l'hypoténuse RN. Considérons deux positions infiniment voisines du point M et du triangle RMN qui y est attaché. Quand ce triangle passe dans la position infiniment voisine R′M′N′, le point I passe en I′, la figure tourne de l'angle formé par les tangentes RM, RM′, c'est-à-dire de l'angle de contingence de la courbe; enfin les dimensions linéaires du triangle sont réduites dans le rapport des diamètres RM, R′N′ des deux cercles circonscrits. On passe donc de la première position à la seconde : 1° par une translation II′; 2° par une rotation autour de I égale à l'angle $d\omega$ de contingence; 3° par une dilatation ou une contraction mesurée par le rapport de deux droites homologues prises dans chaque figure :

$$\frac{R'N'}{RN} = \frac{R'M'}{RM} = \frac{M'N'}{MN}.$$

Les coordonnées x_1, y_1 du centre I du cercle mobile sont données par les équations

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{y\,dx}{dy} + x'\right) \\ &= x - \frac{y}{2}\left(m + \frac{dx}{dy}\right) = x\left(1 - \frac{b}{2m}\right) - y\left(m - \frac{1}{m} - b\right), \\ y_1 &= \frac{1}{2}\,y\left(1 + m\frac{dx}{dy}\right) = \frac{1}{2}(bx - my). \end{aligned}$$

Si de ces relations on tire x et y en fonction de x_1, y_1, et qu'on substitue dans l'équation de la courbe, on aura comme équation finale en x_1 et y_1 l'équation du lieu du point I. Une fois ce lieu tracé, le lieu du point M, c'est-à-dire la courbe (x, y), s'en déduirait aisément : par chaque point I faisons passer la droite RN qui, dans l'angle HOX, est divisée au point I en deux parties égales. Cette droite construite, on fera sur RN un triangle rectangle en M, et ayant l'angle α en R. Le sommet M de l'angle droit sera le point correspondant de la courbe.