Nouvelles annales de mathématiques

E. Duporcq

Deuxième concours des « Nouvelles annales » pour 1899

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 193-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__193_0>

[K11]

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES (¹) » POUR 1899;

PAR M. E. DUPORCQ.

1. La projection stéréographique permet, comme on sait, de ramener l'étude des cercles d'un plan à celle des sections planes d'une sphère : les quatre coordonnées homogènes qui définissent l'équation d'un plan peuvent donc être envisagées ainsi comme quatre coordonnées homogènes d'un cercle du plan.

Considérons, par exemple, la sphère Σ qui a pour équation homogène, relativement à trois axes rectangulaires Ox_1, Ox_2, Ox_3,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0;$$

désignons par ω le point de cette sphère qui admet les coordonnées

$$x_1 = x_2 = 0, \qquad x_3 = ix_4,$$

et soit m un point quelconque du plan x_1Ox_2 de coordonnées

$$x_1 = xx_4, \qquad x_2 = yx_4, \qquad x_3 = 0.$$

Les coordonnées homogènes du point μ, où la droite ωm perce la sphère Σ, peuvent s'écrire

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = \frac{1}{2i}(x^2+y^2+1), \quad x_4 = \frac{1}{2}(1-x^2-y^2).$$

Par suite, après substitution de ces valeurs, *l'équation*

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

(¹) *Voir* l'énoncé du sujet, même tome, p. 145.

représente la projection stéréographique A *du cercle suivant lequel la sphère* Σ *coupe le plan polaire* P *du point a de coordonnées* u_1, u_2, u_3, u_4.

Le centre du cercle A est d'ailleurs le point où la droite ωa perce le plan $x_1 O x_2$.

2. Si le point A appartient à la sphère Σ, le plan P la touche en ce point, et le rayon du cercle A devient nul; par suite, *l'ensemble des cercles de rayon nul se trouve représenté par l'équation*

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 0.$$

Si, au contraire, le point a est dans le plan π tangent à Σ en ω, le plan P passe par le centre de projection, et le cercle A se réduit à une droite; ainsi *l'équation*

$$u_3 - i u_4 = 0$$

représente l'ensemble des droites du plan.

3. Nous utiliserons souvent une propriété importante de la projection stéréographique, que nous nous contenterons de rappeler : elle consiste en ce que, P étant le plan polaire d'un point a par rapport à une sphère, les projections stéréographiques des points où cette sphère rencontre une sécante issue de a, sont deux points symétriques par rapport au cercle A suivant lequel se projette la section de la sphère par le plan P; autrement dit, *à deux figures en perspective sur la sphère correspondent deux figures symétriques par rapport à un cercle.*

Soient par exemple P_1 et P_2 deux plans dont les sections par la sphère Σ sont en perspective du point de vue a : les projections de ces sections, A_1 et A_2, seront symétriques par rapport au cercle A.

Or les pôles a_1 et a_2 des plans P_1 et P_2 sont sur une même droite issue de a, et ils sont conjugués harmoniques relativement au point a et au point où cette droite coupe le plan P. Ainsi, *à deux points homologues de l'homologie particulière* (a_1, a_2) *correspondent deux cercles symétriques par rapport au cercle* A.

4. Si le point a de l'espace décrit une surface algébrique d'ordre n, le cercle A qui lui correspond, comme nous l'avons indiqué plus haut (n° 1), engendrera *un réseau du* $n^{ième}$ *ordre*. Les cercles points forment donc un réseau du second ordre, et les droites un réseau du premier ordre.

Si le point a décrit seulement une courbe d'ordre p, le cercle A engendrera de même une *série du* $p^{ième}$ *ordre*. On voit donc immédiatement que :

Les cercles communs à deux réseaux, d'ordres m et n, forment une série d'ordre mn.

Enfin, les cercles communs à trois réseaux correspondent aux points communs à trois surfaces, et leur nombre est égal au produit des ordres des réseaux.

5. On sait que, lorsque deux plans sont conjugués à une sphère, ils la coupent suivant des cercles orthogonaux; cette propriété n'étant pas altérée par la projection stéréographique, on voit que si a et a' désignent deux points de l'espace conjugués à Σ, les cercles correspondants A et A' se coupent orthogonalement; l'orthogonalité de deux cercles s'exprime donc par la relation

$$u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + u_3 u'_3 + u_4 u'_4 = 0.$$

On voit de plus que :

Tout réseau linéaire est formé par les cercles orthogonaux à un cercle fixe.

Ce cercle Γ, que nous appellerons la *base* du réseau linéaire, est d'ailleurs évidemment la projection du cercle de la sphère Σ situé dans le plan que décrit alors le point a.

Cette base est le lieu des centres des cercles points du réseau, et les droites qui appartiennent au réseau passent par son centre. Elle peut d'ailleurs se réduire à un point ou à une droite.

Enfin, on voit immédiatement qu'un réseau linéaire est défini par trois cercles qui n'admettent pas un même axe radical.

6. Les cercles communs à deux réseaux linéaires forment une *série linéaire*. Le point a décrit alors une droite Δ et son plan polaire P pivote autour de la conjuguée de Δ par rapport à Σ; les cercles A ont donc un même axe radical ; ils coupent orthogonalement tous les cercles suivant lesquels se projettent les sections de Σ par les plans issus de Δ. Nous aurons parfois à considérer ces deux séries linéaires réciproques, qui correspondent ainsi à deux droites conjuguées à Σ : nous dirons qu'elles sont *orthogonales*.

Si la droite Δ passe par ω_1, les cercles correspondants deviennent concentriques, et la série orthogonale est formée par les droites issues de leur centre commun.

7. Le nombre des cercles communs à une série linéaire et à un réseau quelconque est (n° 4) égal à l'ordre de ce réseau ; autrement dit :

Par deux points arbitraires, il passe m cercles d'un réseau d'ordre m.

De même, *un réseau d'ordre m admet généralement m cercles de centre donné*. Ils correspondent aux points où la surface S, à laquelle correspond le réseau, coupe une droite issue de ω. Il y a exception si S passe par ω : la droite de l'infini, envisagée comme une droite double, appartient alors au réseau, et son centre est indéterminé, de sorte qu'il ne reste plus en réalité que $(m - 1)$ cercles ayant un centre donné : nous dirons alors que le réseau est *parabolique* [1].

8. Avant de passer à l'étude spéciale des réseaux quadratiques, nous allons indiquer quelques propriétés communes à tous les réseaux, d'ordre quelconque, et d'où découleront immédiatement d'importantes propriétés des réseaux quadratiques.

A tout réseau se trouvent attachées deux courbes remarquables : la première est le lieu des centres des cercles points du réseau ; nous l'appellerons sa *base;* la seconde, que nous nommerons sa *directrice,* est l'enveloppe des droites du réseau.

Soit S la surface à laquelle correspond un réseau d'ordre m; la base de ce réseau est évidemment la projection stéréographique de la section de S par Σ; les génératrices de Σ qui se croisent en ω rencontrent chacune S en m points dont les projections sont confondues en un point cyclique ; donc :

La base d'un réseau d'ordre m est en général une courbe d'ordre $2m$, *qui admet les points cycliques comme points multiples d'ordre m.*

---

[1] Un autre cas d'exception est celui où S est un cône de sommet ω; le réseau est alors constitué par les cercles ayant leurs centres sur une courbe d'ordre m.

Quant à la directrice, elle correspond à la section de S par le plan Π, qui touche Σ en ω; elle est donc la trace d'un cône de m^{ieme} classe. Ainsi :

La directrice d'un réseau est généralement d'une classe égale à l'ordre de ce réseau.

Le premier de ces théorèmes est en défaut dans le cas d'un réseau *parabolique* (n° 7) : l'ordre de la base est diminué d'une unité, ainsi que l'ordre de multiplicité des points cycliques. Quant à la directrice, elle touche alors la droite de l'infini.

9. La base et la directrice d'un même réseau ont entre elles une relation remarquable. Pour la mettre en évidence, désignons par a un des points où S coupe une des génératrices de Σ issues de ω; la tangente en ce point à l'intersection de S et Σ est évidemment dans le plan tangent à Σ en ce point; or ce plan passe par la génératrice ωa, et il est, d'autre part, le plan polaire de a par rapport à Σ.

Sa trace sur le plan du réseau est donc une droite isotrope tangente à la base en un point cyclique, et qui touche en même temps la directrice. On en déduit que :

Les foyers de la directrice coïncident avec les foyers singuliers de la base.

10. Nous allons montrer maintenant comment à tout réseau s'en trouve rattaché un autre dont les propriétés sont intimement liées à celles du premier.

Soit en effet A un cercle quelconque d'un réseau correspondant à un point a d'une surface S; considérons le plan P′ tangent en a à S, et soit A′ la projection de sa section par Σ. A tout cercle A du réseau on peut associer ainsi un cercle A'. On voit que *les cercles* A *et* A' *sont orthogonaux* et l'on peut montrer aisément que *le centre de* A' *est l'enveloppe des axes radicaux du cercle* A *avec tous les cercles infiniment voisins du réseau.*

Soit a' le point de l'espace qui correspond à A' : c'est le pôle, relativement à Σ, du plan P' tangent en a à S'. Le réseau [A'] correspond donc à la surface S', polaire réciproque de S par rapport à Σ.

Les réseaux [A] et [A'] *sont réciproques.*

Nous dirons que l'un est le réciproque de l'autre.

11. Toute génératrice de Σ se correspond évidemment à elle-même par polaires réciproques relativement à cette sphère; il en résulte que les génératrices de Σ qui touchent la surface S touchent aussi sa polaire réciproque S'; autrement dit, les courbes suivant lesquelles Σ coupe les surfaces S et S' sont tangentes aux mêmes génératrices de Σ; leurs projections stéréographiques ont donc les mêmes tangentes isotropes, et l'on voit, par suite, que :

Les bases de deux réseaux réciproques sont homofocales.

12. Il est bien évident que la directrice du réseau [A] n'est autre que le contour apparent de la surface S'; comme, d'ailleurs, le lieu des centres des cercles d'une série quelconque du réseau [A'] est la projection d'une courbe tracée sur S', on voit donc que :

Lorsqu'une série de cercles appartient à un réseau, le lieu des centres de ces cercles et la directrice du ré-

seau réciproque du réseau considéré se touchent en leurs points communs.

En particulier :

La base d'un réseau et la directrice du réseau réciproque se touchent en leurs points communs.

On peut également se rendre compte aisément de la propriété suivante :

Les directrices de deux réseaux réciproques ont leurs asymptotes deux à deux rectangulaires.

13. Si la surface S contient une droite, la surface S′ passe par la droite conjuguée; on en déduit que :

Si une série linéaire fait partie d'un réseau, la série orthogonale appartient au réseau réciproque.

En particulier :

Si un réseau est engendré par une série linéaire, la série orthogonale engendre le réseau réciproque.

Dans ce cas, la directrice de chaque réseau est l'enveloppe de l'axe radical de la série linéaire qui l'engendre, et les points communs aux cercles de cette série ont pour lieu la base du réseau réciproque.

14. La correspondance de deux réseaux réciproques est facile à interpréter analytiquement. Si un réseau [A] a pour équation

$$\varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0,$$

au cercle A de ce réseau, de coordonnées u_1, u_2, u_3, u_4, correspond le cercle A′ du réseau réciproque, de coordonnées réciproques

$$\varphi'_{u_1}, \quad \varphi'_{u_2}, \quad \varphi'_{u_3}, \quad \varphi'_{u_4}.$$

Cette correspondance réciproque peut ne pas être univoque; cette circonstance se produit si le réseau [A] correspond à une surface développable : à chaque série linéaire de ce réseau correspond alors un seul cercle A′, et l'ensemble des cercles A′ se réduit à une série. Enfin, si [A] est un réseau linéaire, tous les cercles A′ coïncident avec la base de ce réseau.

15. Abordons maintenant l'étude spéciale des réseaux quadratiques, c'est-à-dire tels (n° 7) que par deux points arbitraires, il passe deux cercles de chacun de ces réseaux. La surface S est alors une quadrique qui coupe Σ suivant une biquadratique sphérique; la projection de cette intersection est une quartique bicirculaire, c'est-à-dire une *cyclique*. Ainsi :

La base d'un réseau quadratique est en général une cyclique.

Une cyclique est, comme on sait, symétrique par rapport à quatre cercles deux à deux orthogonaux, car elle est la projection stéréographique d'une courbe sphérique située sur quatre cônes, dont les sommets u_1, u_2, u_3 et u_4 déterminent le tétraèdre conjugué à la fois à la sphère Σ et à la quadrique S. Les quatre cercles directeurs de la cyclique sont les projections des sections de Σ par les quatre faces de ce tétraèdre. Or, la quadrique S se correspond évidemment à elle-même dans la transformation homologique qui associe à tout point a de l'espace le point a' de la droite $u_1 a$ tel que le segment aa' soit divisé harmoniquement par le point u_1 et par le plan $u_2 u_3 u_4$. Il en résulte donc, en tenant compte du résultat obtenu plus haut (n° 3) que :

Un réseau quadratique est en général symétrique par rapport aux quatre cercles directeurs de sa base.

16. Les résultats généraux obtenus précédemment fournissent les propriétés suivantes dans le cas des réseaux quadratiques :

La directrice d'un réseau quadratique est en général une conique, homofocale aux déférentes de la base du réseau.

Si la quadrique S passe par le centre de projection ω, le réseau quadratique est parabolique.

On voit que :

La base d'un réseau quadratique parabolique est une cubique circulaire ; la directrice est alors une parabole homofocale et coaxiale aux quatre paraboles déferentes de cette cubique.

17. Un réseau quadratique est défini par sa base et sa directrice. Il est par exemple facile d'obtenir la conique qui constitue le lieu des centres des cercles du réseau orthogonaux à un cercle fixe Γ ; en effet, les tangentes à la directrice, issues du centre de Γ, et les quatre points où Γ coupe la base, peuvent être considérés comme six cercles de la série considérée : la conique cherchée passe donc par les points communs à Γ et à la base, et ses asymptotes sont perpendiculaires aux tangentes à la directrice issues du centre de Γ. La compatibilité de ces six conditions constitue un théorème sur les cycliques ; on peut l'énoncer ainsi :

Les cordes communes à une cyclique et à un cercle *sont deux à deux également inclinées sur les droites qui joignent le centre du cercle aux foyers principaux de la cyclique.*

18. La polaire réciproque S' de S par rapport à Σ étant aussi une quadrique, on voit que :

Le réseau réciproque d'un réseau quadratique est aussi quadratique.

Tout cercle du réseau $[A']$, réciproque du réseau $[A]$, est, comme dans le cas général, la projection stéréographique d'un cercle de Σ situé dans un plan tangent à S. Il en résulte que le lieu des centres des cercles de $[A]$ orthogonaux à un cercle quelconque de $[A']$ se compose de deux droites, et que ces cercles forment deux séries linéaires.

La directrice du réseau $[A']$ n'est autre que le contour apparent de la surface S; elle touche en quatre points la base du réseau $[A]$, et ces points sont les projections de quatre points de la sphère situés dans le plan polaire Q de ω relativement à S; les points de contact en question sont donc sur un cercle, dont le centre est la projection du pôle K du plan Q par rapport à Σ. Or la droite ωK est la conjuguée par rapport à Σ de l'intersection du plan Q et du plan Π, tangent à Σ en ω, ou encore de la polaire du point ω par rapport à la section σ de S par le plan Π; la droite ωK est donc la polaire du plan Π par rapport au cône du second degré qui est le polaire réciproque de la conique σ par rapport à la sphère Σ, cône dont la trace sur le plan des réseaux est justement la directrice du réseau (A). On voit donc que :

La directrice d'un réseau quadratique touche la base *du réseau réciproque en quatre points équidistants du centre de la directrice de ce dernier.*

19. Du théorème général du n° 11, il résulte que :

Les bases de deux réseaux quadratiques réciproques sont deux cycliques homofocales.

Ces deux bases se coupent donc orthogonalement en huit points : il est facile de se rendre compte que ces points sont les projections des points de contact de la sphère Σ avec les huit génératrices de S qui touchent cette sphère, et ces génératrices ont justement pour projections les tangentes en ces points à la base du réseau [A]. Or ces projections doivent évidemment toucher le contour apparent de S, c'est-à-dire la directrice du réseau [A′]. On voit donc que :

Les tangentes à la base d'un réseau quadratique aux points où elle coupe la base du réseau réciproque touchent la directrice de ce dernier.

On peut choisir arbitrairement les deux cycliques homofocales qui sont les bases de deux réseaux quadratiques réciproques ; les réseaux sont alors déterminés, et l'on a huit tangentes de chacune de leurs directrices ; il en résulte la propriété suivante des cycliques homofocales :

Les huit tangentes à une cyclique aux points où elle coupe une cyclique homofocale, sont tangentes à une même conique, qui touche la première cyclique en quatre points, et a pour foyers les foyers singuliers de la seconde cyclique.

20. Si la quadrique S passe par le centre de projec-

tion ω, le réseau [A] devient parabolique ; le contour apparent de S se réduit alors à deux points, α et β, qui sont les traces des génératrices de cette quadrique issues de ω. On en déduit que :

Si un réseau quadratique est réciproque d'un réseau parabolique, sa direction se réduit à deux des foyers singuliers de sa base, et réciproquement.

D'autre part, toute courbe de S se projette suivant une courbe passant par α et β ; la base de [A], qui est une cubique circulaire, jouit donc de cette propriété, et, comme la base du réseau conjugué est une cyclique quelconque, homofocale à cette cubique, on voit que :

Lorsqu'une cubique circulaire est homofocale à une cyclique, elle passe par deux des foyers singuliers de celle-ci.

Or, à tout faisceau de cycliques homofocales, appartiennent, comme on sait, deux cubiques circulaires. Par suite :

Le lieu des foyers singuliers des cycliques d'un système homofocal, se compose des deux cubiques du système.

D'ailleurs, les foyers singuliers coïncidant avec les foyers des déférentes, et chacune de celles-ci passant par quatre foyers appartenant à un même cercle directeur, on voit que :

Le lieu des foyers des coniques qui passent par quatre points d'un cercle, se compose des deux cubiques circulaires qui admettent ces points pour foyers.

Les axes de ces coniques ont, comme on sait, des directions fixes ; chaque cubique correspond à l'une de ces directions, qui est d'ailleurs celle de son asymptote réelle. En associant à ces résultats ceux du paragraphe précédent, on voit donc que :

Étant donnée une cubique circulaire et une corde ab parallèle à son asymptote réelle, si l'on mène les tangentes à la cubique par les points a et b, leurs points de contact sont les huit points où la cubique coupe la cyclique homofocale, ayant a et b pour foyers singuliers. Les normales à la cubique en ces huit points touchent une parabole homofocale et coaxiale aux déférentes de cette cubique.

21. Examinons encore le cas où la quadrique S touche en ω la sphère Σ; l'intersection de ces surfaces présente alors en ω un point double, et la base du réseau [A] se réduit alors à une conique. Nous dirons alors que ce réseau est *biparabolique* Dans ce cas, en dehors du cône de sommet ω qui passe par la biquadratique commune à S et à Σ, il n'existe que deux cônes du second degré contenant cette courbe, et leurs sommets sont dans le plan tangent en ω aux deux quadriques ; ils sont d'ailleurs, comme on le voit aisément, sur les bissectrices de l'angle formé par les tangentes au point double ω; il en résulte que :

Tout réseau biparabolique est symétrique par rapport aux axes de sa conique base.

La surface S', polaire réciproque de S par rapport à Σ, touche aussi Σ en ω ; par suite :

Le réseau réciproque d'un réseau biparabolique l'est aussi.

En vertu des théorèmes généraux démontrés précédemment :

Les bases de deux réseaux réciproques biparaboliques sont deux coniques homofocales.

La directrice de chaque réseau est formée par les points à l'infini des normales menées à la base de ce réseau, aux points où elle coupe la base du réseau réciproque.

22. La base d'un réseau quadratique peut se décomposer en deux cercles : ce cas se produit lorsque S et Σ sont bitangentes; S′ et Σ le sont alors aux mêmes points. On voit donc que :

Lorsque la base d'un réseau quadratique se décompose en deux cercles, il en est de même de celle du réseau réciproque.

On voit de plus que :

La directrice de chaque réseau est alors une conique ayant pour foyers les centres des deux cercles qui constituent sa base, et bitangente aux cercles bases du réseau réciproque. Les quatre cercles considérés ont d'ailleurs même axe radical.

Les quadriques S et Σ ont alors une infinité de pôles doubles, situés sur la droite joignant leurs points de contact. Par suite :

Les réseaux quadratiques envisagés sont symétriques par rapport à tous les cercles orthogonaux à leurs cercles bases.

On peut toujours, par une inversion convenable, amener les cercles bases à être concentriques; on a alors des réseaux *de révolution. Les cercles du réseau ayant leurs centres sur un diamètre des cercles bases forment alors une des séries de cercles bitangents à une cyclique à centre,* qui admet pour foyers les points où ce diamètre coupe les cercles bases.

23. L'un des deux cercles en lesquels se décompose la base d'un réseau peut être un cercle point ou la droite de l'infini. Le premier cas se ramène d'ailleurs au second par une inversion ayant pour origine le cercle point en question. On obtient alors encore un réseau de révolution, dont cette fois *la série méridienne est formée d'un des deux systèmes de cercles bitangents à une conique,* comme on peut aisément s'en rendre compte.

Enfin la base peut se réduire à deux cercles points. Dans ce cas, par une inversion ayant pour centre l'un de ces points, on transforme le réseau en *un réseau de révolution, formé par les cercles vus d'un point fixe sous un angle donné.*

Le réseau est alors déterminé par ses deux points de base et par un cercle quelconque, et l'on peut en déduire tous les cercles en remarquant que *le réseau est alors symétrique par rapport à tous les cercles qui passent par les points de base et aussi par rapport aux cercles orthogonaux à ces derniers.*

Les cercles d'un réseau de cette nature sont circonscrits à des triangles circonscrits à la conique directrice. Réciproquement, les cercles circonscrits aux triangles circonscrits à une même conique forment un réseau quadratique jouissant des propriétés précédentes; cette remarque facilite beaucoup l'étude des problèmes relatifs à ces cercles.

24. Lorsque S et Σ sont circonscrites l'une à l'autre, *la base se réduit à un cercle double.*

Le réseau est alors symétrique par rapport à tous les cercles orthogonaux à sa base, et l'on en déduit que *les cercles du réseau coupent la base sous un même angle.* Cet angle peut être nul : *les cercles tangents à un cercle donné forment donc un réseau quadratique*, S est alors un cône circonscrit à Σ.

Un cas particulièrement intéressant est celui où *la base se réduit à la droite de l'infini; symétrique par rapport à une droite quelconque, le réseau est alors formé par les cercles égaux à un cercle donné.*

25. Les surfaces du second degré étant réglées, il en résulte des propriétés des réseaux quadratiques (n° 13); ils peuvent être engendrés de deux manières par une série linéaire variable.

De ce que deux génératrices de systèmes différents d'une même quadrique se rencontrent, il résulte que :

Si l'on considère deux séries linéaires de systèmes différents d'un même réseau quadratique, ces séries ont un cercle commun.

Si l'on se donne une tangente à la directrice d'un réseau quadratique et la base du réseau réciproque, la quadrique à laquelle correspond ce réseau se trouve définie par la donnée d'une biquadratique gauche et d'un plan tangent, et elle a donc trois déterminations. Il est facile d'obtenir les trois réseaux correspondants. En effet, la droite et la cyclique données se coupent en quatre points qu'on peut diviser en couples de trois manières.

A chacun de ces groupements correspond un des réseaux; tous les cercles qui passent par les deux points formant l'un ou l'autre des couples considérés, appartiennent au réseau; chacun d'eux coupe la cyclique en deux nouveaux points, et tous les cercles qui passent par ces deux points appartiennent également au réseau; la droite déterminée par ces deux points est d'ailleurs tangente à la directrice du réseau obtenu.

Ainsi :

Étant donnés deux points fixes a et b sur une cyclique, l'enveloppe des cordes cd de cette courbe telles que les quatre points a, b, c, d soient sur un même cercle, est une conique quadruplement tangente à la cyclique.

On pourra encore déterminer un réseau quadratique en se donnant trois séries linéaires de ce réseau; soient aa', bb' et cc' les cordes communes aux cercles de ces séries.

Soient m et m' les points communs aux cercles d'une série de système différent des séries données; ces points forment avec aa', bb' et cc' trois quadrangles inscriptibles à des cercles, et sont d'ailleurs aussi sur la cyclique base du réseau réciproque du réseau cherché. On en déduit que :

Étant donnés trois couples de points, aa', bb' et cc'; le lieu des points m, tels que les cercles maa', mbb' et mcc' aient un second point commun, m', se compose d'une cyclique, qui est aussi le lieu de m', et la droite mm' enveloppe une conique.

26. Des propriétés précédentes et de celles du n° 20 résulte que tout réseau réciproque d'un réseau parabolique est formé par les cercles tels que l'une de leurs cordes communes avec une cubique circulaire donnée passe par un point fixe de cette courbe. Il en est alors de même de l'autre corde commune.

Enfin, un réseau biparabolique est formé par les cercles tels que l'une de leurs cordes communes avec une conique fixe ait une direction donnée.

27. On pourrait multiplier les exemples d'application de ce procédé de transformation des propriétés des quadriques. Ainsi, au théorème d'après lequel toutes les quadriques qui passent par sept points passent par un huitième, se trouve associée la propriété suivante :

Tous les réseaux quadratiques qui comprennent sept cercles en comprennent un huitième.

La construction des huit cercles communs à trois réseaux quadratiques revient à celle des huit points communs à trois quadriques. Ce problème se ramène au second degré si les trois quadriques sont circonscrites à Σ; on pourra donc, avec la règle et le compas, construire les huit cercles qui coupent respectivement sous des angles donnés trois cercles donnés, C_1, C_2 et C_3. Développons ce point.

Considérons d'abord les cercles qui coupent sous des angles donnés deux cercles donnés C_1 et C_2; ils correspondent aux points communs à deux quadriques circonscrites à Σ; celles-ci se coupent suivant deux coniques. Les cercles envisagés forment donc deux séries, les cercles de chaque série étant orthogonaux à un cercle fixe. Quatre diamètres de ces deux cercles fixes sont faciles à obtenir : ce sont les droites qui coupent respectivement les deux cercles donnés sous les angles donnés; or les droites qui coupent un cercle sous un angle donné enveloppent un cercle concentrique; les centres ω_3 et ω'_3 des deux cercles cherchés sont donc les centres d'homothétie de deux cercles Γ_1 et Γ_2 concentriques à C_1 et à C_2. Ces cercles (ω_3) et (ω'_3) ont d'ailleurs même axe radical que

C_1 et C_2. On déterminerait de même les cercles (ω_1), (ω'_1), (ω_2) et (ω'_2). Ces six cercles sont les projections stéréographiques des sections de Σ par les plans des courbes communes à deux des quadriques Q_1, Q_2 et Q_3.

Or ces six plans passent, comme on sait, par le point a, commun aux plans des courbes de contact de Σ avec ces trois surfaces, et ils se coupent trois à trois suivant quatre droites issues de a : chacune de ces quatre droites passe par deux des points communs aux trois quadriques; il en résulte que les cercles cherchés se couperont deux à deux sur le cercle qui correspond au point a, c'est-à-dire sur le cercle A orthogonal aux cercles donnés C_1, C_2 et C_3.

D'autre part, les cercles cherchés doivent couper orthogonalement un cercle de chacun des couples (ω_1) et (ω'_1), (ω_2) et (ω'_2), (ω_3) et (ω'_3), qui peuvent, en effet, d'après ce qui précède, être groupés trois à trois de quatre manières, de manière à avoir même axe radical; chaque groupement correspond à chacun des axes d'homothétie des trois cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3. Les points où chacun de ces axes coupe le cercle A sont donc les points communs aux cercles de chacun des quatre couples formés par les cercles cherchés; la détermination des cercles de chaque couple est alors ramenée à celle des deux cercles qui passent par deux points donnés et coupent un cercle donné sous un angle donné, problème qui se résout sans difficulté.

28. On obtient comme cas particulier une construction des huit cercles tangents à trois cercles donnés : comme on voit, ces huit cercles forment quatre couples de cercles qui se coupent sur le cercle orthogonal aux cercles donnés et admettent pour axes radicaux les axes d'homothétie de ceux-ci. Cette construction n'est pas

nouvelle; elle est due à Poncelet. Facile à établir directement, elle semble être plus simple, et elle est certainement plus suggestive que celle de Gergonne; elle est néanmoins beaucoup moins connue.

29. Des constructions analogues s'étendraient à l'espace.

D'ailleurs les coordonnées que nous venons d'étudier dans le plan pour les cercles sont analogues aux coordonnées pentasphériques dans l'espace. Celles-ci peuvent s'interpréter aisément dans un espace à quatre dimensions, et tous les théorèmes que nous avons obtenus sur les cycliques sont susceptibles d'être étendus aux surfaces cyclides.