P. SONDAT

Théorème sur les équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 25-28

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__25_1>

[A3a]

THÉORÈME SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. P. SONDAT.

Si l'équation

$$(1)\quad \varphi(x) = ax^n - nbx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}cx^{n-2} - \ldots + nkx - l = 0$$

de degré impair, *a* $\frac{n+1}{2}$ *racines égales, on a, pour cette racine multiple,*

$$\rho = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1},$$

Δ, Δ_1 *et* Δ_2 *étant des fonctions homogènes et du second degré des coefficients* $a, b, c, \ldots, h, k, l$.

Appelons $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}, a$, les dérivées successives de φ, divisées respectivement par n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$, ..., et soit

$$\psi(x) = bx^{n-1} - (n-1)cx^{n-2} + \ldots - (n-1)kx + l.$$

Dans φ_1 et ψ, remplaçons les puissances décroissantes de x par k, h, ..., c, b, a et ensuite par l, k, h, ..., c, b, ou posons

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta = ak - (n-1)bh + \ldots - (n-1)hb + ka, \\ \Delta_1 = al - (n-1)bk + \ldots - (n-1)hc + kb, \\ \Delta_2 = bl - (n-1)ck + \ldots - (n-1)kc + lb. \end{cases}$$

Dans ces fonctions homogènes, remplaçons

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad h, \quad k, \quad l$$

par

$$a, \quad \varphi_{n-1}, \quad \varphi_{n-2}, \quad \ldots, \quad \varphi_2, \quad \varphi_1, \quad \varphi,$$

et appelons Δ', Δ'_1, Δ'_2 les résultats des substitutions. Nous aurons

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta' = a\varphi_1 - (n-1)\varphi_2\varphi_{n-1} + \ldots - (n-1)\varphi_2\varphi_{n-1} + a\varphi_1, \\ \Delta'_1 = a\varphi - (n-1)\varphi_1\varphi_{n-1} + \ldots - (n-1)\varphi_2\varphi_{n-2} + \varphi_1\varphi_{n-1}, \\ \Delta'_2 = \varphi\varphi_{n-1} - (n-1)\varphi_1\varphi_{n-2} + \ldots - (n-1)\varphi_1\varphi_{n-2} + \varphi\varphi_{n-1}. \end{cases}$$

Or $\dfrac{d\Delta'}{dx} = 0$, donc Δ' est indépendant de x.

De plus

$$(4)\qquad \Delta' = \Delta,$$

car en faisant $x = 0$, on rend les termes de Δ' égaux à ceux de Δ (1).

On trouve aussi

$$\frac{d\Delta'_1}{dx} = \Delta,$$

d'où

$$\Delta'_1 = \Delta x + c,$$

et, en faisant $x = 0$, $-\Delta_1 = c$. Donc

$$(5)\qquad \Delta'_1 = \Delta x - \Delta_1.$$

---

(1) *Voir* un théorème analogue, *N. A.*, p. 169; 1897.

En procédant de même, on aura

$$\frac{d\Delta'_2}{dx} = 2\Delta'_1 = 2\Delta x - 2\Delta_1,$$

$$(6) \qquad \Delta'_2 = \Delta x^2 - 2\Delta_1 x + \Delta_2.$$

Cela posé, si l'équation (1) a $\frac{n+1}{2}$ racines égales, en attribuant à x la valeur, soit ρ, de cette racine multiple, annulant φ, φ_1, ..., $\varphi_{\frac{n-1}{2}}$ et, par suite, Δ'_1 et Δ'_2, on aura, pour la déterminer, les deux équations

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{r} \Delta\rho - \Delta_1 = 0, \\ \Delta\rho^2 - 2\Delta_1\rho + \Delta_2 = 0, \end{array} \right.$$

d'où

$$(8) \qquad \rho = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1},$$

et, par suite,

$$\Delta_1^2 - \Delta\Delta_2 = 0,$$

pour l'une des conditions de multiplicité.

Remarques. — I. Si ρ était une racine multiple de l'ordre $\frac{n+3}{2}$, annulant Δ', Δ'_1, Δ'_2, les équations (7), devenant identiques, la laisseraient indéterminée, mais l'équation $\varphi_2 = 0$, traitée de la même manière, la ferait connaître, et l'on aurait alors les trois conditions simples de multiplicité

$$\Delta = 0, \qquad \Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 = 0.$$

II. Avec $n = 2\nu$ pair, si l'équation (1) avait $\nu + 1$ racines égales, chacune des équations $\varphi_1 = 0$, $\psi = 0$, de degré impair, en aurait ν, car

$$\varphi = x\varphi_1 - \psi,$$

et le théorème leur serait applicable.

Donc, *quand une équation algébrique, de degré quélconque, a plus de la moitié de ses racines égales, la racine multiple doit affecter la forme* (8).

Applications. — I. Si $n = 3$, on a, pour une racine *double*,

$$\rho = \frac{bc - ad}{2(b^2 - ac)} = \frac{2(c^2 - hd)}{bc - ad}. \tag{9}$$

II. Si $n = 5$, on a, pour une racine *triple*,

$$\rho = \frac{2cd - 3be + af}{2(3c^2 - 4bd + ae)} = \frac{2(3d^2 - 4ce + bf)}{2cd - 3be + af}, \tag{10}$$

et les trois trinomes seraient nuls avec une racine *quadruple,* donnée par (9).

III. Si $n = 6$, une racine *quintuple* est donnée par (9), une racine *quadruple* par (10) et entraîne alors la condition

$$10d^2 - 15ce + 6bf - ag = 0.$$