NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. EFIMOV

Les séries dans la pangéométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 28-31

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__28_1>

[Q1b]

LES SÉRIES DANS LA PANGÉOMÉTRIE;

PAR M. M. EFIMOV.

Dans son *Précis de Géométrie ou Pangéométrie*, Lobatchefsky emploie les relations

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x},$$

$$\sin\Pi(x) = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}},$$

$$\cos\Pi(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}.$$

Puis en remplaçant, dans un triangle dont les côtés sont infiniment petits, ces expressions par leurs valeurs approchées

$$\sin \Pi(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2,$$

$$\cos \Pi(x) = x - \frac{1}{3} x^3 = x,$$

$$\operatorname{tang} \Pi(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{6} x^2\right) = \frac{1}{x},$$

il trouve les théorèmes de la géométrie non-euclidienne.

On peut montrer que l'équation

$$\sin \Pi(a) \sin \Pi(b) = \sin \Pi(c)$$

embrasse aussi le théorème de Pythagore. En effet, en substituant les valeurs approchées, on aura

$$\left(2 - \frac{a^2}{2}\right)\left(1 - \frac{b^2}{2}\right) = 1 - \frac{c^2}{2}.$$

Ensuite, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au second, particulièrement dans un triangle presque isoscèle, il vient

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

De la même manière, la relation de Lagrange entre triangles sphérique et rectiligne, dans lesquels les côtés sont égaux, mais les angles différents, permet de déduire la formule fondamentale de la pangéométrie pour la résolution des triangles obliquangles.

En remplaçant, dans la formule du triangle sphérique

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

les valeurs des côtés par leurs développements en séries trigonométriques, on a

$$1 - \frac{c^2}{2} = \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)\left(1 - \frac{b^2}{2}\right) + ab\left(1 - \frac{a^2 + b^2}{6}\right) \cos C.$$

Il en résulte

$$\sin\Pi(c) = \sin\Pi(a)\sin\Pi(b) + \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\left(1 - \frac{a^2+b^2}{6}\right)\cos C.$$

Puis, dans tout triangle rectiligne,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C';$$

et quand l'angle C' s'approche de $\frac{\pi}{2}$, alors son cosinus tend vers zéro; par suite

$$1 - \frac{a^2+b^2}{6} = 1 - \frac{c^2}{6}.$$

Mais

$$\operatorname{tang}\Pi(c) = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{6}c^2\right),$$

ce qu'on déduit aussi immédiatement de

$$\frac{\sin\Pi(c)}{\cos\Pi(c)} = \frac{1 - \frac{1}{2}c^2}{c - \frac{1}{3}c^3}.$$

Par conséquent

$$\operatorname{tang}\Pi(c) = \frac{1}{\cos\Pi(c)}\left(1 - \frac{1}{6}c^2\right),$$

d'où

$$1 - \frac{1}{6}c^2 = \sin\Pi(c).$$

On détermine enfin

$$\sin\Pi(c) = \sin\Pi(a)\sin\Pi(b) + \sin\Pi(c)\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos C,$$

d'où, en divisant par le premier terme,

$$1 - \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos C = \frac{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)}{\sin\Pi(c)}.$$

Il est évident que les valeurs approchées, actuellement enseignées, sont les deux premiers termes des séries suivantes

$$\sin \Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{4!} - \frac{61x^6}{6!} + \frac{1385x^8}{8!} - \frac{50521x^{10}}{10!} + \ldots.$$

Dans l'autre cas,

$$\sin \Pi(x) = \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = 1 - \frac{1}{3}\frac{x^2}{2} + \frac{7}{15}\frac{x^4}{4!} - \frac{31}{21}\frac{x^6}{6!} + \frac{381}{45}\frac{x^8}{8!} - \ldots.$$