NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. JAMET

Sur les invariants de la forme biquadratique binaire

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 419-427

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__419_1>

[B7b]

SUR LES INVARIANTS DE LA FORME BIQUADRATIQUE BINAIRE;

Par M. V. JAMET.

1. Je me propose de montrer comment la méthode de Ferrari, pour la résolution de l'équation du quatrième degré, fait connaître les invariants proprement dits de la forme biquadratique binaire, et aussi les coefficients

de l'équation aux rapports anharmoniques des racines de l'équation biquadratique.

M. Niewenglowski, dans son *Cours d'Algèbre*, tome II, page 453, fait observer que l'équation résolvante de Ferrari admet pour racines les valeurs que prend l'expression

$$x_1 x_2 + x_3 x_4,$$

lorsqu'on y remplace, de toutes les manières possibles, x_1, x_2, x_3, x_4 par les racines de l'équation biquadratique proposée. On peut adapter comme il suit, aux formes biquadratiques binaires, la remarque que nous venons d'énoncer.

2. Soit

$$f = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

une forme biquadratique donnée. On aura identiquement

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} af &= (ax^2 + 2bxy + hy^2)^2 \\ &\quad - [2(-3ac + 2b^2 + ah)x^2 + 4(bh - ad)xy + (h^2 - ae)y^2]y^2 \end{aligned} \right.$$

et la forme proposée sera décomposée en une différence de carrés ou en un produit de deux formes quadratiques binaires, si l'on a

$$(2)\quad 2(bh - ad)^2 - (-3ac + 2b^2 + ah)(h^2 - ae) = 0.$$

Soit h une racine de cette équation, telle qu'on ait

$$h^2 - ae \neq 0.$$

On pourra transformer l'identité (1) comme il suit :

$$\begin{aligned} af &= (ax^2 + 2bxy + hy^2)^2 \\ &\quad - \frac{y^2}{h^2 - ae}[2(bh - ad)x + (h^2 - ae)y)]^2 \end{aligned}$$

ou bien

$$af = \left[ax^2 + 2\left(b + \frac{bh - ad}{\sqrt{h^2 - ae}}\right)xy + (h + \sqrt{h^2 - ae})y^2\right]$$
$$\left[ax^2 + 2\left(b - \frac{bh - ad}{\sqrt{h^2 - ae}}\right)xy + (h - \sqrt{h^2 - ae})y^2\right],$$

et l'on voit que si l'équation

$$f(x, 1) = 0,$$

admet pour racines x_1, x_2, x_3, x_4, on aura, par exemple,

$$\frac{h + \sqrt{h^2 - ae}}{a} = x_1 x_3, \qquad \frac{h - \sqrt{h^2 - ae}}{a} = x_3 x_4,$$

d'où l'on déduit

$$(3) \qquad x_1 x_2 + x_3 x_4 = \frac{h}{2a}.$$

3. Cette relation subsiste si l'on suppose $h^2 - ae = 0$. Car alors on trouve aussi, en vertu de (2),

$$bd - ah = 0$$

et l'identité (1) devient

$$af = [ax^2 + 2(b + \sqrt{3ac - 2b^2 - ah})xy + hy^2]$$
$$[ax^2 + 2(b - \sqrt{3ac - 2b^2 - ah})xy + hy^2].$$

On en déduit encore la relation (3); et celle-ci entraîne, comme conséquence, la remarque énoncée plus haut, à condition que dans l'équation (2) on fasse la substitution $h = 2at$.

4. Supposons maintenant qu'on ait décomposé la forme f en un produit de deux facteurs quadratiques, savoir :

$$(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)(\alpha' x^2 + 2\beta' xy + \gamma' y^2);$$

on sait que les expressions

$$\beta^2 - \alpha\gamma, \quad \beta'^2 - \alpha'\gamma'$$

sont des invariants du second ordre, de telle sorte que leur produit est un invariant de quatrième ordre. Mais si les équations

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0, \qquad \alpha' x^2 + 2\beta' x + \gamma' = 0$$

ont pour racines, respectivement x_1, x_2, et x_3, x_4, on aura

$$\beta^2 - \alpha\gamma = \frac{\alpha^2}{4}(x_1 - x_2)^2,$$

$$\beta'^2 - \alpha'\gamma' = \frac{\alpha'^2}{4}(x_3 - x_4)^2$$

et

$$(\beta^2 - \alpha\gamma)(\beta'^2 - \alpha'\gamma') = \frac{\alpha^2\alpha'^2}{16}(x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4)^2$$

$$= \frac{a^2}{16}(x_1 x_3 + x_2 x_4 - x_2 x_3 - x_1 x_4)^2.$$

Soient h_1, h_2, h_3 les racines de l'équation (2). On en déduira

$$(\beta^2 - \alpha\gamma)(\beta'^2 - \alpha'\gamma') = \frac{1}{64}(h_1 - h_2)^2$$

et $(h_1 - h_2)^2$ sera un invariant du quatrième ordre, ainsi que $(h_1 - h_3)^2$ et $(h_2 - h_3)^2$. Donc la somme

$$(h_1 - h_2)^2 + (h_2 - h_3)^2 + (h_3 - h_1)^2$$

sera elle-même un invariant du quatrième ordre. Or cette somme est égale à

$$2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - h_1 h_2 - h_2 h_3 - h_3 h_1)$$

ou bien à

$$(4) \qquad 2[(h_1 + h_2 + h_3)^2 - 3(h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_1 h_3)].$$

Mais l'équation (2) se développe comme il suit :

$$h^3 - 3ch^2 + (4bd - ae)h - 2ad^2 + 3ace - 2eb^2 + c^3 = 0.$$

Donc l'expression (4) est égale, à un facteur numérique près, à

$$3c^2 - 4bd + ae,$$

et celle-ci est un invariant du quatrième ordre.

5. Le produit

$$(h_1 - h_2)^2 (h_2 - h_3)^2 (h_3 - h_1)^2$$

est aussi, d'après ce qui précède, un invariant du douzième ordre. Mais, pour calculer ce produit, il est à propos de transformer l'équation (2) comme il suit :

$$(h-c)^3 + (4bd - ae - 3c^2)h - 2ad^2 + 3ace - 2eb^2 + c^3 = 0$$

ou bien

$$\begin{aligned}&(h - c)^3 + (4bd - ae - 3c^2)(h - c)\\ &\qquad - 2ad^2 + 2ace - 2eb^2 - 2c^3 + 4bdc = 0;\end{aligned}$$

puis, en posant

$$h - c = \lambda, \qquad 4bd - ae - 3c^2 = -S,$$
$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 = T,$$

on trouvera finalement

$$\lambda^3 - S\lambda + 2T = 0.$$

Si les racines de cette dernière équation sont $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, on trouvera

$$\begin{aligned}&(h_1 - h_2)^2 (h_2 - h_3)^2 (h_3 - h_1)^2\\ &\quad = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\lambda_2 - \lambda_3)^2 (\lambda_3 - \lambda_1)^2 = 4(S^3 - 27T^2).\end{aligned}$$

Donc T^2 est un invariant du douzième ordre, et T est un invariant de l'ordre 6.

6. Il s'ensuit aussi que le rapport $\frac{S^3}{T^2}$ est un invariant absolu de la forme biquadratique. La méthode ci-dessus

permet de montrer aisément comment ce rapport intervient dans la formation de l'équation aux rapports anharmoniques des racines de l'équation $f(x, 1) = 0$. En effet, si l'on désigne ces racines, comme nous l'avons déjà fait, par x_1, x_2, x_3, x_4, l'un des rapports anharmoniques qu'elles déterminent est égal à

$$\frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}$$

ou bien à

$$\frac{x_3 x_4 - x_1 x_2 - x_1 x_4 - x_2 x_3}{x_3 x_4 + x_1 x_2 - x_2 x_4 - x_1 x_3},$$

et, par conséquent, chacun des six rapports anharmoniques considérés est égal à la valeur que prend l'expression

$$\frac{\lambda_i - \lambda_h}{\lambda_i - \lambda_k}$$

lorsque i, h, k désignent une quelconque des permutations des indices 1, 2, 3. Soit donc ρ un tel rapport anharmonique, et soit

$$\rho = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3}.$$

On en conclut

$$\rho + \frac{1}{\rho} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}.$$

Soit encore

$$\lambda^3 - S\lambda + 2T = \varphi(\lambda),$$

l'égalité précédente donnera

$$\rho + \frac{1}{\rho} = \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 3\lambda_1^2}{\varphi'(\lambda_1)}$$
$$= \frac{2S + 3\lambda_1^2}{3\lambda_1^2 - S}.$$

On en conclut

$$\lambda_1^2 = \frac{S(\rho + 1)^2}{3(\rho^2 - \rho + 1)}.$$

D'ailleurs, on déduit de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$,

$$\lambda_1^2(\lambda_1^2 - S)^2 - 4T^2 = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{S^3(\rho+1)^2[-2\rho^2+5\rho-2]^2}{27(\rho^2-\rho+1)^2} - 4T^2 = 0,$$

ou encore

$$S^3(\rho+1)^2(2\rho-1)^2(\rho-2)^2 - 108\,T^2(\rho^2-\rho+1)^2 = 0.$$

Telle est l'équation cherchée; elle montre que le rapport $\frac{S^3}{T^2}$ est la valeur que prend la fraction

$$\frac{108(\rho^2-\rho+1)^2}{(\rho+1)^2(2\rho-1)^2(\rho+2)^2}$$

quand on y remplace ρ par l'un quelconque des six rapports anharmoniques des racines de l'équation

$$f(x, 1) = 0.$$

7. Nous terminerons ce travail en indiquant un procédé de calcul très simple pour ramener une forme quadrique binaire à la forme canonique

$$Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4.$$

Soit encore

$$f = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

la forme donnée. Faisons la substitution

$$x = \alpha x' + \beta y',$$
$$y = x' + y',$$

et, dans l'expression de la forme transformée, calculons les coefficients de x'^3y' et $x'y'^3$. Ces coefficients sont égaux à

$$4[a\alpha^3\beta + b(\alpha^3 + 3\alpha^2\beta) + 3c(\alpha^2 + \alpha\beta) + d(\alpha + 3\beta) + e]$$

et à

$$4[a\alpha\beta^3 + b(\beta^3 + 3\alpha\beta^2) + 3c(\beta^2 + \alpha\beta) + d(\beta + 3\alpha) + e].$$

En égalant ces coefficients à zéro, on trouve deux équations qui, retranchées membre à membre, donnent lieu à l'équation suivante :

$$(5) \quad a\alpha\beta(\alpha + \beta) + b[(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta] + 3c(\alpha + \beta) + 2d = 0.$$

En les ajoutant membre à membre, on trouve

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & a\alpha\beta[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] + b(\alpha + \beta)^3 \\ & \quad + 3c(\alpha + \beta)^2 + 4d(\alpha + \beta) + 2e = 0. \end{aligned} \right.$$

Puis, en multipliant les deux membres de (5) par $\alpha + \beta$, et retranchant (5) et (6) membre à membre, on trouve encore

$$(7) \qquad a\alpha^2\beta^2 + b\alpha\beta(\alpha + \beta) - d(\alpha + \beta) - e = 0.$$

Soit

$$(8) \qquad a\alpha\beta + b(\alpha + \beta) = \lambda.$$

Les équations (5) et (7) se transforment comme il suit :

$$(9) \qquad (\lambda + 3c)(\alpha + \beta) + 2b\alpha\beta + 2d = 0,$$

$$(10) \qquad d(\alpha + \beta) - \lambda\alpha\beta + e = 0.$$

Éliminant $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ entre (8), (9) et (10), on trouve, pour déterminer λ, l'équation suivante :

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} a & b & -\lambda \\ 2b & \lambda + 3c & 2d \\ -\lambda & d & e \end{vmatrix} = 0,$$

que l'on ramène à une forme plus symétrique par la substitution

$$\lambda = -c + 2\mu.$$

En effet, on trouve ainsi

$$\begin{vmatrix} a & b & c-2\mu \\ b & c+\mu & d \\ c-2\mu & d & e \end{vmatrix} = 0,$$

et cette équation se ramène à la forme

$$\lambda'^3 - S\lambda' + 2T = 0$$

par la substitution $\mu = -\frac{\lambda'}{2}$.

8. Mais, en faisant la substitution $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = x' + y'$, nous supposons essentiellement que son déterminant $\alpha - \beta$ n'est pas nul. Si la résolution du système des équations (9), (10) et (11) donnait $\alpha = \beta$, la constante α qui figure dans cette dernière égalité devrait vérifier les équations (5) et (6), et l'on aurait $f(\alpha, 1) = 0$, $f'(\alpha, 1) = 0$. L'équation $f = 0$ aurait alors au moins une racine multiple, et la réduction de la forme f, réduction possible chaque fois que l'équation n'a pas de racine triple, n'offrirait qu'un intérêt secondaire; c'est pourquoi nous nous abstiendrons de développer la discussion dans ces cas particuliers.