ÉDOUARD COLLIGNON

Problèmes sur les normales aux courbes planes. Courbes dans lesquelles la somme $N + N'$ est constante

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 433-442

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__433_0>

[O2b]

PROBLÈMES SUR LES NORMALES AUX COURBES PLANES. COURBES DANS LESQUELLES LA SOMME N + N′ EST CONSTANTE;

PAR M. ÉDOUARD COLLIGNON.

En un point M d'une courbe AB on mène la normale MN, qui coupe en N l'axe Ox, et en N′ l'axe Oy, perpendiculaire à Ox. Nous appellerons N et N′ les longueurs MN, MN′, que l'on peut regarder comme les deux normales finies de la courbe rapportée aux axes rectangulaires Ox, Oy.

On propose de déterminer la courbe AB de telle sorte qu'il y ait une relation donnée entre les deux normales N et N′,

$$\varphi(N, N') = 0.$$

Soit α l'angle que fait la tangente MR à la courbe avec l'axe Ox; α sera aussi l'angle MN′O que fait la normale avec l'axe Oy pris dans le sens YO; et si x et y représentent les coordonnées OP = MP′, MP du point M, on aura

$$N = \frac{y}{\cos\alpha}, \qquad N' = \frac{x}{\sin\alpha}.$$

Soit $p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\alpha$. On en déduit

$$\sin\alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}},$$

et l'équation différentielle de la courbe sera

$$\varphi\left(y\sqrt{1+p^2},\ x\frac{\sqrt{1+p^2}}{p}\right) = 0;$$

p tient la place de $\frac{dy}{dx}$. L'intégration de cette équation ne pourra se faire que lorsque la fonction φ sera déterminée. Nous examinerons ici le cas où elle se réduit à la somme ou à la différence des deux quantités N et N′, ce qui revient à poser

$$N \pm N' = \text{const.}$$

Soit donc $N + N' = a$, en appelant a la somme algébrique des deux quantités N et N′.

La droite NN′, formée de deux normales placées bout à bout, sera une droite de longueur constante a, dont les extrémités glissent respectivement sur les axes Ox et Oy. Les courbes cherchées sont les trajectoires orthogonales de ces droites, c'est-à-dire les développantes de la courbe que la droite mobile enveloppe dans son mouvement.

On obtient facilement l'équation de ces courbes en employant les *coordonnées podaires*. De l'origine O abaissons OR perpendiculaire sur la tangente MR à la courbe cherchée, normale à NN′. Nous poserons $OR = r$, et angle $yOR = \alpha$.

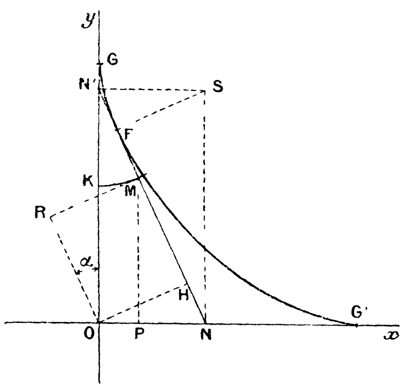
Pour obtenir toutes les positions de la droite NN′ dans l'angle yOx il suffit de faire varier α de o à $\frac{\pi}{2}$. A la valeur $\alpha = 0$ correspond la position de la droite mobile relevée le long de l'axe Oy; à $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la position de la droite couchée sur l'axe Ox.

Dans ce système de coordonnées la longueur RM de la tangente comprise entre le pied de la perpendiculaire OR et le point de contact M est égale en valeur absolue à la dérivée $\frac{dr}{d\alpha}$. L'inspection de la figure montre que, lorsqu'on fait varier α de o à $\frac{\pi}{2}$, r diminue, de sorte que $\frac{dr}{d\alpha}$ est négatif. On doit donc poser

$$\mathrm{RM} = -\frac{dr}{d\alpha}.$$

L'angle α se retrouve d'ailleurs en ON'N et en HON,

Fig. 1.



si l'on mène OH parallèle à RM par l'origine. On a donc

$$\mathrm{RM} = \mathrm{OH} = \mathrm{ON}\cos\alpha = a\sin\alpha\cos\alpha,$$

et l'équation podaire différentiellè de la courbe est

$$\frac{dr}{d\alpha} = -a\sin\alpha\cos\alpha.$$

Il vient en intégrant, et en appelant C une constante arbitraire,

$$r = \mathrm{C} - \tfrac{1}{2}a\sin^2\alpha.$$

Si dans cette équation on fait $\alpha = 0$, ce qui suppose la droite mobile relevée en OG le long de Oy, on a $r = \mathrm{C}$. La constante C est donc l'ordonnée du point K qui forme sur l'axe Oy le point de départ de la courbe. On a, en effet, pour ce point $r = C$, $\alpha = 0$, $\frac{dr}{d\alpha} = 0$; la courbe est normale en K à l'axe Oy.

La constante C peut recevoir, d'ailleurs, toutes les valeurs positives ou négatives. Mais nous nous occuperons principalement ici des valeurs de C qui correspondent à l'addition effective des deux segments NM, MN′ pour former la somme a. Il en sera ainsi si le point K tombe entre l'origine O et le point G, extrémité de la droite NN′ relevée sur Oy; il faut et il suffit, par conséquent, que la constante C soit positive et moindre que a.

On aura, en projetant le contour ORM sur les axes, les coordonnées x et y rapportées aux axes rectangulaires Ox, Oy. Il vient

$$x = \mathrm{OP} = a \sin\alpha \cos^2\alpha - r \sin\alpha = (a - C) \sin\alpha - \tfrac{1}{2} a \sin^3\alpha,$$

$$y = \mathrm{PM} = a \sin^2\alpha \cos\alpha + r \cos\alpha = \left(\frac{a}{2} + C\right) \cos\alpha - \tfrac{1}{2} a \cos^3\alpha.$$

L'élimination de l'angle α entre ces deux équations conduirait à l'équation cartésienne de la courbe.

Sans former cette équation, nous pouvons voir entre quelles limites la courbe reste comprise.

1° Considérons d'abord le rayon vecteur r.

La dérivée $\frac{dr}{d\alpha}$ s'annule pour $\sin\alpha = 0$ et pour $\cos\alpha = 0$, c'est-à-dire pour $\alpha = 0$ et pour $a = \frac{\pi}{2}$; r varie entre les limites C et $C - \frac{1}{2} a$; elles sont toutes deux positives, si C est positif et supérieur à $\frac{a}{2}$. Lorsque, au contraire, C, supposé compris entre 0 et a, est moindre que $\frac{1}{2}a$, r change de signe, et prend la valeur 0 lorsqu'on a

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2C}{a}}.$$

2° Les limites de x correspondent de même à $\frac{dx}{d\alpha} = 0$, c'est-à-dire à la valeur de α fournie par l'équation

$$(a - C)\cos\alpha - \tfrac{3}{2}a\sin^2\alpha\cos\alpha = 0,$$

ce qui entraîne les relations

$$\cos\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sin\alpha = \sqrt{\frac{2(a-C)}{3a}}$$

La première donne

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad x = \tfrac{1}{2}a - C, \qquad y = 0.$$

La seconde fournit une valeur réelle de l'angle α, si C est positif et moindre que a. Nous verrons tout à l'heure que cette valeur de l'angle α correspond au point de rebroussement de la courbe. On a alors

$$x = (a-C)\sqrt{\frac{2(a-C)}{3a}} - \tfrac{1}{2}a\,\frac{2(a-C)}{3a}\sqrt{\frac{2(a-C)}{3a}}$$

$$= \tfrac{2}{3}(a-C)\sqrt{\frac{2(a-C)}{3a}},$$

$$r = C - \tfrac{1}{2}a\,\frac{2(a-C)}{3a} = \frac{4C-a}{3},$$

$$y = \sqrt{\frac{(a+2C)^3}{27a}}.$$

L'abscisse x devient nulle pour $\alpha = 0$, $y = C$, $r = C$, et elle devient nulle aussi lorsqu'on a

$$\sin^2\alpha = \frac{2(a-C)}{a},$$

relation qui définit une valeur réelle de l'angle α lorsque C est $> \frac{a}{2}$ et $< a$. La valeur correspondante de y est égale à $\frac{1}{2}\sqrt{a(2C-a)}$. Ce sont les coordonnées du point double de la courbe sur l'axe Oy.

3° Les limites de y sont fournies par l'équation

$$\frac{dy}{d\alpha} = -\left(\frac{a}{2} + C\right)\sin\alpha + \tfrac{3}{2}\,a\cos^2\alpha\sin\alpha = 0,$$

c'est-à-dire par

$$\sin\alpha = 0, \qquad \alpha = 0, \qquad x = 0, \qquad y = C;$$

et par la valeur de $\cos\alpha$ fournie par l'équation

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{a + 2C}{3a}}.$$

Pour que l'angle α soit réel, il faut et il suffit que l'on ait

$$a + 2C < 3a \qquad \text{ou} \qquad C < a,$$

condition que nous supposons remplie. On en déduit pour le point correspondant

$$x = \frac{\left[\frac{2}{3}(a - C)\right]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}},$$

$$y = \frac{(a + 2C)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3a}}.$$

Cherchons les points pour lesquels $y = 0$. Ils seront donnés par les équations

$$\cos\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{a}{2} + C\right) = \tfrac{1}{2}\,a\cos^2\alpha,$$

ou bien

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{a + 2C}{a}}.$$

Si l'on prend C entre 0 et a, cette dernière équation ne définit qu'un angle imaginaire. Il faudrait, pour trouver un angle réel, qu'on eût C négatif et inférieur à $-\frac{a}{2}$.

Le rayon de courbure ρ en un point M quelconque est donné, en coordonnées podaires, par l'équation

$$\rho = r + \frac{d^2 r}{d\alpha^2}.$$

Si on l'applique à l'équation de la courbe,

$$r = C - \tfrac{1}{2} a \sin^2 \alpha,$$

il vient d'abord

$$\frac{d^2 r}{d\alpha^2} = - a \cos 2\alpha,$$

puis

$$\begin{aligned} \rho &= C - \tfrac{1}{2} a \sin^2 \alpha - a \cos 2\alpha \\ &= C - a + \tfrac{3}{2} a \sin^2 \alpha \\ &= - \left[(a - C) - \tfrac{3}{2} a \sin^2 \alpha\right]. \end{aligned}$$

L'analyse attribue ici un certain signe au rayon de courbure et c'est le signe —, lorsque la somme $C + \frac{3}{2} a \sin^2 \alpha$ est inférieure à a.

Si l'on adopte ce signe et qu'on prenne aussi r avec le signe que lui assigne l'équation $r = C - \frac{1}{2} a \sin^2 \alpha$, on obtient l'équation suivante

$$\rho + 3r = 4C - a,$$

de sorte que la somme algébrique du rayon de courbure et du triple du rayon podaire est constante tout le long de la courbe.

La valeur absolue du rayon de courbure au point M est donnée sur la figure. Achevons le rectangle ONSN'. Le point S, sommet de ce rectangle, est le centre instantané de la droite NN' quand ses extrémités glissent simultanément sur les deux axes; et si l'on abaisse de ce point la perpendiculaire SF sur la droite, on aura en F le point où la droite mobile touche son enveloppe. La longueur FM, comprise entre le point de contact F et la développante MR de l'enveloppe, est le rayon de courbure de la développante, ou de la courbe cherchée. Or on a

$$\mathrm{FM} = \mathrm{FH} - \mathrm{HM} = \mathrm{FH} - \mathrm{OR} = a - C - \tfrac{3}{2} a \sin^2 \alpha.$$

Le rayon de courbure ρ change de signe en passant par zéro lorsqu'on a

$$\tfrac{3}{2} a \sin^2 \alpha = a - C$$

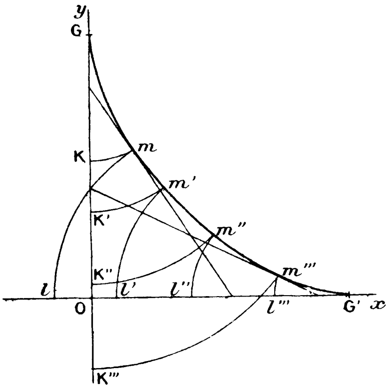
ou

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2(a - C)}{3a}}.$$

Soit α_0 cet angle particulier, qui correspond au cas où les points F et M coïncident. Si l'on n'attribue à C que des valeurs comprises entre o et a, la valeur de α_0 sera toujours réelle. Elle correspond aux points de rebroussement de la courbe.

Il résulte de là que, si l'on détermine les coordonnées de la courbe qui correspondent à $\alpha = \alpha_0$, on aura en même temps les coordonnées de l'enveloppe GG' et l'éli-

Fig. 2.



mination de C entre les deux équations qui les font connaître conduira à l'équation de l'enveloppe elle-même.

En coordonnées podaires, la courbe-enveloppe GG' de la droite NN' a pour équation

$$r' = a \sin \alpha \cos \alpha,$$

r' étant le rayon vecteur OH et α l'angle HOX.

Les courbes cherchées affectent les formes Kml, K$'m'l'$, ..., K$'''m'''l'''$. Deux d'entre elles passent par l'origine; l'une de ses courbes correspond à $C = \frac{1}{2}a$, ce qui donne, avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

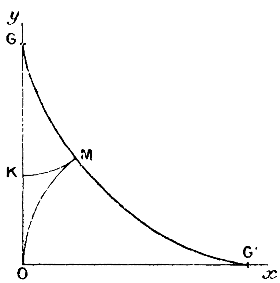
$$r = C - \tfrac{1}{2}a = 0,$$

$$\frac{dr}{d\alpha} = 0,$$

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

Cette courbe touche en O l'axe Oy.

Fig. 3.



L'autre courbe correspond à $C = 0$ avec $\alpha = 0$, ce qui donne à la fois

$$r = 0, \qquad \frac{dr}{d\alpha} = 0, \qquad x = 0, \qquad y = 0.$$

Elle touche en O l'axe Ox.

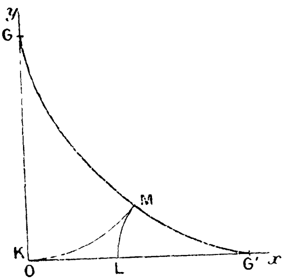
Pour obtenir la valeur de l'arc de la courbe, il faudrait intégrer la fonction $\rho\, d\alpha$, en ayant soin de prendre ρ en valeur absolue.

Les courbes obtenues sont symétriques, non seulement par rapport aux axes Ox, Oy, mais encore par rapport à leurs bissectrices. Si l'on donne à C des valeurs réelles quelconques en dehors des limites 0 et a

où nous l'avons considérée, on obtient d'autres courbes qui sont représentées par les mêmes équations; elles ne rencontrent plus la courbe-enveloppe, et pour elles c'est la différence, et non la somme des normales, qui reste constante.

Pour une très grande valeur de C, la courbe cherchée

Fig. 4.



se rapproche indéfiniment d'une circonférence décrite du point O comme centre avec C pour rayon. Les équations qui font connaître x et y se réduisent, en effet, à la forme approximative

$$x = -\,C\sin\alpha,$$
$$y = \quad C\cos\alpha,$$

ce qui conduit à l'équation du cercle $x^2 + y^2 = C^2$.

L'hypothèse revient, en effet, à réduire la longueur a à une valeur infiniment petite; les normales de la courbe cherchée passent alors sensiblement par le point fixe O, et elles sont sensiblement égales, puisque leur différence est constante et égale à a, quantité supposée négligeable. On retrouve donc le cercle comme limite des courbes pour a infiniment petit, ou C infiniment grand.