NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. MANGEOT

Sur la symétrie de deux figures algébriques par rapport à un point

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 451-466

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__451_0>

[M1 3e] [M2 2e]

SUR LA SYMÉTRIE DE DEUX FIGURES ALGÉBRIQUES PAR RAPPORT A UN POINT;

PAR M. S. MANGEOT,
Docteur ès Sciences.

La multiplication et la division sont les seules opérations d'Algèbre qu'il y ait à effectuer pour résoudre le problème de la recherche des centres dans les figures ou systèmes des deux figures algébriques définis analytiquement.

J'ai déjà traité ici (1) une partie de ce problème, celle qui a pour objet la détermination des centres des courbes planes ou des surfaces. Je ne reviendrai pas sur cette question, renvoyant le lecteur à la solution que j'en ai donnée. Cette solution, que j'ai pu formuler par des règles, n'exige pas d'autres calculs d'Algèbre que des multiplications de polynomes entiers (2). Les autres cas du problème, qui font l'objet de la présente Note, se ramèneront à celui-ci et pourront être complètement résolus par des multiplications et des divisions algébriques (3).

La question à traiter est la suivante :

Étant données, par des équations cartésiennes en-

(1) Mai 1898.

(2) Les produits à calculer ne sont même tous que des puissances de fonctions linéaires de trois variables au plus.

(3) Les éliminations sont évitées dans tous les cas. On n'a pas non plus d'équations à résoudre (sauf peut-être un système de trois équations du premier degré à trois inconnues).

tières, deux courbes planes, ou deux surfaces, ou deux courbes gauches qui peuvent être confondues, trouver s'il existe un point ω par rapport auquel les deux figures soient symétriques l'une de l'autre, et déterminer la position de ce point.

Les coordonnées courantes étant x, y, z, je désignerai celles du point ω par x_0, y_0, z_0 : les axes de coordonnées sont rectangulaires ou obliques.

Dans ce qui va suivre, j'emploierai deux notations dont je donne dès à présent la définition. Si une lettre affectée d'indice, telle que f_r, désigne un polynome entier en x, y, z, la notation f_{-r} représentera l'expression obtenue en remplaçant dans ce polynome x, y, z par $2x_0 - x$, $2y_0 - y$, $2z_0 - z$. Toute notation de la forme (P), si P est un symbole désignant un polynome entier en x, y, z, sera censée représenter la somme des termes de ce polynome dont le degré est le plus élevé.

Cas de deux courbes planes ou de deux surfaces.

Soient $f_1(x, y, z) = 0$, $\varphi_1(x, y, z) = 0$ deux équations entières entre x, y, z, de même degré m. Pour que les deux surfaces S, S' qu'elles représentent soient symétriques l'une de l'autre par rapport à un point $\omega(x_0, y_0, z_0)$, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$f_{-1} = a\varphi_1.$$

On déduit de là cette relation

$$f_{-1} \pm f_1 = a\varphi_1 \pm f_1;$$

et si l'on remarque que l'une des deux déterminations de son premier membre a un degré de parité contraire à celle de m la forme que présente ce premier membre donne ce théorème :

Pour que les deux surfaces S, S' *soient symétriques l'une de l'autre par rapport à un point* ω, *il est nécessaire, et il suffit aussi, que les termes du* $m^{\text{ième}}$ *degré de* f_1 *soient égaux à ceux du* $m^{\text{ième}}$ *degré de* φ_1 *à un facteur près* k; *que le polynome* $k\varphi_1 - f_1$ *ait son degré de parité contraire à celle de* m; *et que les deux surfaces représentées par les équations*

$$(1) \qquad k\varphi_1 + f_1 = 0, \qquad k\varphi_1 - f_1 = 0$$

aient un centre commun (x_0, y_0, z_0). *Ce point coïncide avec le point* ω (¹).

La condition est suffisante, parce qu'en posant

$$k\varphi_1 + f_1 = 2u_1, \qquad k\varphi_1 - f_1 = 2v_1,$$

on a

$$f_{-1} = u_{-1} - v_{-1},$$

et, par suite, u_1 et v_1 ayant leurs degrés de parités différentes,

$$\pm f_{-1} = u_1 + v_1 = k\varphi_1.$$

Le théorème précédent s'applique à deux courbes planes du $m^{\text{ième}}$ ordre, C, C', ayant pour équations entières $f_1(x, y) = 0$, $\varphi_1(x, y) = 0$, si l'on remplace dans son énoncé le mot *surfaces* par le mot *courbes;* ici, le point ω a pour coordonnées x_0, y_0.

En définitive, on voit que les points ω relatifs aux deux surfaces S, S', ou aux deux courbes C, C', ne sont pas autre chose que les centres communs que peuvent

---

(¹) Les deux équations (1) sont, la première de degré m, la seconde de degré inférieur à m. On regarde une surface (ou une courbe plane) rejetée à l'infini ou indéterminée, comme ayant pour centre un point quelconque de l'espace (ou du plan de la courbe).

avoir les deux surfaces ou les deux courbes planes, représentées par les équations (1), dont les degrés doivent toutefois avoir des parités différentes.

Cas de deux courbes gauches définies par quatre équations de même degré.

Soient F l'intersection de deux surfaces ayant pour équations

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0,$$

et Φ l'intersection de deux surfaces représentées par les équations

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_2(x, y, z) = 0,$$

les quatre équations étant supposées entières et de même degré m.

Pour que les deux courbes F et Φ soient symétriques l'une de l'autre par rapport à un point $\omega(x_0, y_0, z_0)$, il faut et il suffit que les polynomes f_{-1}, f_{-2} soient des fonctions linéaires homogènes des polynomes φ_1, φ_2 telles que

$$(2) \qquad \begin{cases} f_{-1} = a\,\varphi_1 + b\,\varphi_2 \\ f_{-2} = a'\varphi_1 + b'\varphi_2 \end{cases} \qquad (ab' - ba' \neq 0) \quad (^1).$$

Les identités (2) donnent

$$(3) \qquad \begin{cases} (-1)^m (f_1) = a\,(\varphi_1) + b\,(\varphi_2), \\ (-1)^m (f_2) = a'(\varphi_1) + b'(\varphi_2). \end{cases}$$

Il y a lieu de distinguer deux cas, que je vais examiner séparément :

1° *Les deux fonctions homogènes* (f_1), (f_2) *ne sont pas proportionnelles.* — Il devra en être de même des deux fonctions (φ_1), (φ_2), d'après les relations (3), et il

---

(1) Les équations $f_{-1} = 0$, $f_{-2} = 0$ sont celles de la courbe symétrique de F par rapport à ω.

ne pourra pas y avoir alors plus d'un système de valeurs des constantes a, b, a', b', pour lesquelles ces relations soient vérifiées identiquement.

Prenons à volonté, dans le polynome φ_1, deux termes du $m^{\text{ième}}$ degré, $Ax^p y^q z^r$, $A'x^{p'}y^{q'}z^{r'}$ tels que, si $Bx^p y^q z^r$ et $B'x^{p'}y^{q'}z^{r'}$ sont les termes semblables de φ_2, la constante $AB' - BA'$ soit différente de zéro; et, $Cx^p y^q z^r$, $C'x^{p'}y^{q'}z^{r'}$ désignant les termes correspondants de f_1, et $Dx^p y^q z^r$, $D'x^{p'}y^{q'}z^{r'}$ ceux de f_2, posons

$$k = \frac{CB' - BC'}{AB' - BA'}, \qquad h = \frac{AC' - CA'}{AB' - BA'},$$

$$k' = \frac{DB' - BD'}{AB' - BA'}, \qquad h' = \frac{AD' - DA'}{AB' - BA'}.$$

Ce seront là les valeurs que doivent avoir les constantes a, b, a', b', multipliées par $(-1)^m$. L'addition de $\pm f_1$ ou de $\pm f_2$ aux deux membres des identités (2) conduit alors à ce théorème :

Quand les deux polynomes (f_1) *et* (f_2) *ne sont pas proportionnels, pour que les deux courbes* F *et* Φ *soient symétriques l'une de l'autre par rapport à un point* ω, *il est nécessaire, et il suffit également, que chacun des deux polynomes*

$$k\varphi_1 + h\varphi_2 - f_1, \qquad k'\varphi_1 + h'\varphi_2 - f_2$$

ait son degré inférieur à m et de parité contraire à celle de m, ou soit nul identiquement, et que les quatre surfaces représentées par les équations

$$(4) \qquad k\varphi_1 + h\varphi_2 \pm f_1 = 0, \qquad k'\varphi_1 + h'\varphi_2 \pm f_2 = 0$$

aient un centre commun (x_0, y_0, z_0). *Ce point coïncide avec le point* ω.

La condition est suffisante, parce que si l'on pose

$$k\varphi_1 + h\varphi_2 + f_1 = 2u_1, \qquad k\varphi_1 + h\varphi_2 - f_1 = 2v_1,$$

on a

$$f_{-1} = u_{-1} - v_{-1}, \qquad \pm f_{-1} = u_1 + v_1 = k\varphi_1 + h\varphi_2;$$

et l'on aura de même

$$\pm f_{-2} = k'\varphi_1 + h'\varphi_2.$$

Les points ω relatifs aux deux courbes F et Φ sont donc ici les centres communs que peuvent avoir les quatre surfaces définies par les équations (4), les deux polynomes $k\varphi_1 + h\varphi_2 - f_1$ et $k'\varphi_1 + h'\varphi_2 - f_2$ étant supposés remplir les conditions dont il vient d'être parlé.

2° *Les deux polynomes* (f_1), (f_2) *sont proportionnels.* — D'après les relations (3), les quatre polynomes (f_1), (f_2), (φ_1), (φ_2) doivent être les mêmes à un facteur près. Multiplions les quatre équations données par des nombres rendant égaux ces quatre polynomes, et posons alors

$$(5) \qquad f_1 - f_2 = F_1, \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \Phi_1;$$

on aura, en vertu des identités (3),

$$(-1)^m = a + b = a' + b'$$

et les deux conditions (2) pourront s'écrire

$$(6) \quad f_{-1} - (-1)^m\varphi_1 = -b\Phi_1, \qquad f_{-2} - (-1)^m\varphi_1 = -b'\Phi_1.$$

En les retranchant, on obtient celle-ci :

$$F_{-1} = (b' - b)\Phi_1,$$

qui peut remplacer l'une d'elles. Elle montre que, si l'on considère les deux surfaces représentées par les deux équations connues

$$F_1 = 0, \qquad \Phi_1 = 0 \quad (^1),$$

(¹) Ces deux équations, de degré inférieur à m, contiendront certainement les variables.

ces deux surfaces devront être de même ordre et symétriques l'une de l'autre par rapport au point ω lui-même. Je suis donc conduit à chercher un point ω' par rapport auquel ces deux surfaces particulières seraient symétriques l'une de l'autre : c'est le problème traité plus haut. Si le point ω' n'existe pas, j'en conclurai qu'il n'y a pas de point ω; si je trouve un seul point ω' ayant pour coordonnées x', y', z', ce point sera un point ω à la condition que l'expression

$$f_1(2x'-x,\ 2y'-y,\ 2z'-z)+(-1)^{m+1}\varphi_1(x,y,z)$$

soit nulle ou proportionnelle à Φ_1 (1); et il n'y aura pas d'autre point ω que celui-ci. Je vais examiner maintenant l'hypothèse où il y aurait une infinité de points ω' : le lieu de ces points est une droite connue D, ou un plan connu P. Si le point ω existe, il doit appartenir à ce lieu. Faisons une transformation de coordonnées en prenant D pour axe des z dans le premier cas, et P pour plan des xy dans le second cas; et, dans les deux cas, conservons les notations x, y, z, f_1, f_2, φ_1, φ_2 pour désigner les nouvelles coordonnées courantes et les transformées des quatre fonctions données. L'un au moins, f_1, des deux polynomes f_1, f_2 n'étant pas supposé indépendant des variables x, y, comme aussi l'un au moins, φ_1, des polynomes φ_1, φ_2, soient

$$f_1 = U_0(x,y)z^m + U_1(x,y)z^{m-1}+\ldots,$$
$$\varphi_1 = V_0(x,y)z^m + V_1(x,y)z^{m-1}+\ldots,$$

ces deux polynomes ordonnés suivant les puissances décroissantes de z.

Actuellement, les deux polynomes $F_1 = f_1 - f_2$,

---

(1) Pour calculer cette expression, on peut prendre indifféremment, pour f_1, l'un ou l'autre des deux polynomes f_1, f_2, et pour φ_1, l'un ou l'autre des polynomes φ_1, φ_2.

$\Phi_1 = \varphi_1 - \varphi_2$ sont, dans le premier cas, des fonctions de x et y seulement, et, dans le second cas, des fonctions de la seule variable z.

Supposons-nous d'abord placé dans le premier de ces deux cas, et écartons pour le moment l'hypothèse où f_1 ne contiendrait pas la variable z. La seule condition à remplir est ici

$$f_1(-x, -y, 2z_0 - z) + (-1)^{m+1}\varphi_1(x, y, z) = -b\Phi_1.$$

$U_\alpha(x, y)$ désignant le premier des polynomes U_0, U_1, ..., qui n'est pas nul de lui-même, écrivons que le terme en $z^{m-\alpha-1}$ du premier membre a son coefficient nul, nous avons la relation

$$2(m-\alpha)z_0 U_\alpha(-x, -y) + U_{\alpha+1}(-x, -y) + (-1)^\alpha V_{\alpha+1}(x, y) = 0.$$

Donc, pour que le point ω existe ici, il faut et il suffit que la fraction finie

$$\frac{(-1)^{\alpha+1}V_{\alpha+1}(x, y) - U_{\alpha+1}(-x, -y)}{2(m-\alpha)U_\alpha(-x, -y)}$$

ait une valeur constante c, et que le polynome

$$f_1(-x, -y, 2c - z) + (-1)^{m+1}\varphi_1(x, y, z)$$

soit nul ou proportionnel à Φ_1. Le point ω, unique, est le point du nouvel axe des z, D, dont la cote est égale à c.

Si f_1 était indépendant de z, il devrait en être de même de chacune des fonctions f_2, φ_1, φ_2 d'après les relations (5) et (6) : les deux figures F, Φ seraient composées de droites parallèles au nouvel axe des z, et tous les points de cet axe seraient des points ω à la condition que le polynome

$$f_1(-x, -y) + (-1)^{m+1}\varphi_1(x, y)$$

fût nul ou proportionnel à $\varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)$.

Supposons-nous maintenant placé dans le second des deux cas considérés.

La condition d'existence du point ω ayant ici la forme

$$f_1(2x_0 - x, 2y_0 - y, -z) + (-1)^{m+1}\varphi_1(x, y, z) = -b\Phi_1$$
$$= -b(M_0 z^m + M_1 z^{m-1} + \ldots) \qquad (M_0 = 0),$$

pour qu'elle soit satisfaite, il faut et il suffit que l'on ait

$$U_n(2x_0 - x, 2y_0 - y) + (-1)^{n+1} V_n(x, y) = (-1)^{m-n+1} b M_n$$
$$(n = 0, 1, \ldots, m).$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont qu'il existe un nombre b tel que, si U_n est une constante, $U_n + (-1)^{n+1} V_n$ soit une constante égale à $(-1)^{m-n+1} b M_n$, et que, dans le cas contraire (qui se présentera pour une valeur de n au moins), les deux fonctions (U_n), $(-1)^{n-\delta}(V_n)$, où δ désigne le degré de U_n, soient identiques entre elles, et les deux courbes du nouveau plan des xy,

$$U_n(x, y) + (-1)^{m-n} b M_n = 0, \qquad V_n(x, y) = 0$$

symétriques l'une de l'autre, quel que soit n, par rapport à un même point (1). Ce point, unique ou non, est un point ω, et il n'y a pas d'autres points ω que celui-ci.

Cas de deux courbes gauches définies par quatre équations n'ayant pas toutes le même degré (2).

J'emploie les mêmes notations qu'au paragraphe précédent. Soient m le degré de f_1 et m' celui de f_2 $(m > m' > 1)$ (3).

---

(1) La constante b n'interviendra pas dans le calcul des coordonnées de ce point. Cette constante se trouvera connue par le fait des conditions indiquées : elle pourra être nulle.

(2) Il n'y a eu aucune division algébrique à effectuer dans les cas précédemment traités.

(3) Si l'on avait $m' = m$, il faudrait, pour l'existence du point ω, que les quatre équations des deux courbes eussent le même degré.

Pour qu'ici les deux courbes F et Φ soient symétriques l'une de l'autre par rapport à un point

$$\omega(x_0, y_0, z_0),$$

il faut et il suffit que le degré de φ_1 soit égal à m, celui de φ_2 égal à m', que f_{-2} soit proportionnel à φ_2, et qu'enfin le polynome $f_{-1} + a\varphi_1$ soit divisible par φ_2 [1], pour une certaine valeur non nulle de la constante a. On voit qu'en désignant par S_1, S_2, T_1, T_2 les quatre surfaces représentées respectivement par les équations $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, les deux surfaces S_2, T_2, d'ordre m', doivent être symétriques l'une de l'autre par rapport au point ω lui-même. La recherche du point ω est donc ramenée à celle d'un point ω' par rapport auquel ces deux surfaces S_2, T_2 seraient symétriques l'une de l'autre : c'est une des questions traitées plus haut. Si le point ω' existe et est unique, il ne restera plus, après avoir calculé ses coordonnées, qu'à vérifier l'existence de la constante a, ce qui pourra se faire au moyen d'une division [2].

Examinons le cas où l'on trouverait toute une droite D de points ω'. Le point ω, s'il existe, doit être situé sur cette droite. Les deux surfaces S_2, T_2 sont ici deux cylindres parallèles à D, et l'on peut admettre qu'aucune des deux surfaces S_1, T_1 n'est à son tour un cylindre parallèle à D, puisque autrement il suffirait de vérifier si un point choisi arbitrairement sur D est un point ω pour avoir terminé la question. Rapportons toutes les surfaces

---

[1] Au lieu de dire, en parlant d'un polynome : *nul ou divisible par...*, je dirai simplement : *divisible par...*, faisant ainsi rentrer dans le cas de la divisibilité d'un polynome par un autre le cas particulier où ce polynome serait identiquement nul.

[2] La question serait terminée si, pour ce point ω', f_{-1} était proportionnel à φ_1.

à la droite D prise comme axe des z, et conservons les notations employées, en remarquant que f_1 et φ_1 contiendront la variable z, et que f_2 et φ_2 seront deux fonctions indépendantes de z, dont l'une devra devenir proportionnelle à l'autre si l'on y change x et y en $-x$ et $-y$. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence du point ω est alors que le polynome

$$(7) \qquad f_1(-x, -y, 2z_0 - z) + a\varphi_1(x, y, z)$$

soit divisible par φ_2. Admettons que ce point existe. Posons

$$f_1(x, y, z) = \mathrm{U}_0(x, y)z^m + \mathrm{U}_1(x, y)z^{m-1} + \ldots,$$
$$\varphi_1(x, y, z) = \mathrm{V}_0(x, y)z^m + \mathrm{V}_1(x, y)z^{m-1} + \ldots,$$

et soit $\mathrm{U}_\beta(x, y)$ le premier des polynomes $\mathrm{U}_0(x, y)$, $\mathrm{U}_1(x, y)$, ..., qui n'est pas divisible par f_2 [1]. La première des fonctions $\mathrm{U}_0(-x, -y)$, $\mathrm{U}_1(-x, -y)$, ... qui ne contient pas φ_2 en facteur sera $\mathrm{U}_\beta(-x, -y)$. Le polynome (7) étant divisible par φ_2, la partie de ce polynome qui a pour expression

$$a\varphi_1(x, y, z) + \mathrm{U}_\beta(-x, -y)(2z_0 - z)^{m-\beta}$$
$$+ \mathrm{U}_{\beta+1}(-x, -y)(2z_0 - z)^{m-\beta-1} + \ldots$$

devra jouir de la même propriété. Prenons, dans cette expression, les termes en $z^{m-\beta}$ et $z^{m-\beta-1}$. Leurs coefficients, qui sont les deux polynomes

$$(-1)^{m-\beta}\mathrm{U}_\beta(-x, -y) + a\mathrm{V}_\beta(x, y),$$
$$(-1)^{m-\beta+1}[2(m-\beta)z_0\mathrm{U}_\beta(-x, -y) + \mathrm{U}_{\beta+1}(-x, -y)]$$
$$+ a\mathrm{V}_{\beta+1}(x, y),$$

---

[1] f_1 n'est pas supposé divisible par f_2, ni φ_1 par φ_2.

Je puis admettre que β est plus petit que m; car, dans l'hypothèse $\beta = m$, la fonction (7), et celle-ci,

$$\mathrm{U}_m(-x, -y) + a\,\varphi_1(x, y, z),$$

sont divisibles par φ_2 en même temps l'une que l'autre, quelle que soit du reste la valeur de z_0.

devront être divisibles par φ_2. La première de ces deux conditions exige que $V_\beta(x,y)$ ne soit pas divisible par φ_2 : elle fera connaître la valeur de la constante a. La seconde condition donnera ensuite la valeur de z_0 ([1]). Pour achever le problème, il faudra voir si, avec les valeurs de a et z_0 ainsi calculées, valeurs qui seront uniques, le polynome (7) est bien divisible par φ_2.

Il nous reste encore à examiner le cas où il y aurait tout un plan P de points ω'. Le point ω, s'il existe, doit appartenir à ce plan. Prenons le plan P pour plan des yz, et conservons les notations adoptées, en observant que f_2 et φ_2 seront maintenant des fonctions de la seule variable x (dont l'une devient proportionnelle à l'autre quand on y change x en $-x$), et que ni f_1 ni φ_1 ne pourront être des fonctions de x seulement. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence du point ω est ici que le polynome

$$(8)\qquad f_1(-x,\, 2y_0-y,\, 2z_0-z)+a\,\varphi_1(x,y,z)$$

soit divisible par φ_2. Ordonnons le polynome $f_1(x,y,z)$ par groupes homogènes de degrés décroissants relativement aux deux variables y, z, et soient

$$A_0(x)z^{m-p}+A_1(x)z^{m-p-1}y+A_2(x)z^{m-p-2}y^2+\ldots$$

le premier de ces groupes dont tous les coefficients ne sont pas divisibles par f_2, et $A_r(x)$ le premier des coefficients $A_0(x)$, $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., qui n'est pas lui-même divisible par f_2. Je puis toujours supposer, sauf à

([1]) On pourra généralement abréger ces calculs de a et z_0 en fixant à volonté l'une des deux variables x ou y, soit y, dans les fonctions U, V, f_2, φ_2, si, pour cette valeur donnée à y, les polynomes en x, $U_0, U_1, \ldots, U_{m-1}$ ne sont pas tous divisibles par f_2. Ici, $U_\beta(x,y)$ désignerait le premier de ces polynomes qui ne remplit pas cette condition de divisibilité.

échanger les lettres y, z, que la variable y figure dans le terme correspondant $A_r(x)z^{m-p-r}y^r$, en sorte que r n'est pas nul.

Je désigne le groupe suivant par

$$B_0(x)z^{m-p-1} + B_1(x)z^{m-p-2}y + B_2(x)z^{m-p-3}y^2 + \ldots.$$

Soient aussi

$$C_0(x)z^{m-p} + C_1(x)z^{m-p-1}y + C_2(x)z^{m-p-2}y^2 + \ldots$$

et

$$D_0(x)z^{m-p-1} + D_1(x)z^{m-p-2}y + D_2(x)z^{m-p-3}y^2 + \ldots$$

les deux groupes de termes de $\varphi_1(x, y, z)$ qui sont de degrés $m-p$ et $m-p-1$ relativement aux deux variables y, z. Dans l'hypothèse où le point ω existe, la partie du polynome (8) qui a pour expression

$$\begin{aligned}
&a\varphi_1(x,y,z) + A_r(-x)(2z_0 - z)^{m-p-r}(2y_0 - y)^r \\
&\quad + A_{r+1}(-x)(2z_0 - z)^{m-p-r-1}(2y_0 - y)^{r+1} + \ldots \\
&\quad + B_0(-x)(2z_0 - z)^{m-p-1} \\
&\quad + B_1(-x)(2z_0 - z)^{m-p-2}(2y_0 - y) + \ldots \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

doit être divisible par φ_2. Donc les coefficients qui affectent les termes en $z^{m-p-r}y^r$ et $z^{m-p-r}y^{r-1}$, dans cette expression, à savoir

$$\begin{aligned}
&(-1)^{m-p}A_r(-x) + aC_r(x), \\
&(-1)^{m-p+1}[2ry_0A_r(-x) + B_{r-1}(-x)] + aD_{r-1}(x),
\end{aligned}$$

devront être divisibles par φ_2. Si l'on remarque que $C_r(x)$ ne peut pas, d'après la première de ces deux conditions, être divisible par φ_2, on voit que ces deux conditions feront connaître, la première, la valeur de la constante a, puis la seconde celle de y_0. Il n'y a que deux valeurs de a et y_0 qui puissent satisfaire à ces deux conditions de divisibilité. Ces deux nombres étant calculés de la sorte, si $f_1(x, y, z)$ est indépendant de z, la question se trouvera ramenée à voir si le polynome (8), alors complètement connu, est divisible par φ_2, et tous les points de la droite $y = y_0$ du nouveau plan des yz seraient des points ω. Dans l'hypothèse contraire, pour avoir la valeur de z_0, on est ramené au cas qui vient d'être traité. Cette valeur se calculera donc par la condition que le polynome

$$(-1)^{m-\beta+1}[2(m-\beta)z_0 U_\beta(-x, 2y_0-y) + U_{\beta+1}(-x, 2y_0-y)]$$
$$+ a V_{\beta+1}(x, y)$$

soit divisible par la fonction φ_2 de x, $U_\beta(x, y)$, $U_{\beta+1}(x, y)$ et $V_{\beta+1}(x, y)$ étant définis comme dans ce cas. Il restera à s'assurer si, avec les valeurs uniques ainsi trouvées pour a, y_0, z_0, le polynome (8) est bien divisible par φ_2.

Centre d'une courbe gauche.

Pour reconnaître si l'intersection F de deux surfaces S_1, S_2, d'ordres m et m' ($m' \leqq m$), ayant pour équations entières

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0,$$

possède un centre, et pour déterminer ce point, il suffira d'appliquer les méthodes que je viens d'exposer en se plaçant dans le cas où les polynomes φ_1, φ_2 sont les mêmes que les polynomes f_1, f_2. Il est facile de voir ce que deviennent, dans ce cas, les résultats fournis par l'analyse précédente. Je me bornerai à énoncer ces deux-ci :

Quand m' est inférieur à m, si la courbe F a un centre, ce point doit être aussi centre de la surface S_2 ;

Quand m' égale m, si le rapport de (f_1) à (f_2) n'est pas constant, la courbe F n'admet, en fait de centres, que les centres que peuvent avoir en commun les deux surfaces S_1, S_2.

L'intersection de deux surfaces qui n'ont pas le même cône asymptotique n'a pas de centre si aucune des deux surfaces ne possède de centre.

Remarque. — En supposant que les équations par lesquelles sont définies les deux figures F, Φ, distinctes ou confondues, ne dépendent que de deux mêmes variables, on a, par ce qui précède, sans le secours de l'élimination, une solution de ces deux problèmes de Géométrie plane :

1° *Reconnaître si le système des points communs à deux courbes algébriques admet un centre, et trouver ce centre;*

2° *Reconnaître si deux systèmes analogues au précédent sont symétriques l'un de l'autre par rapport à un point, et déterminer ce point.*

Dans les deux cas, le point en question doit être un centre de courbes planes algébriques dont on connaît les équations.

Nota. — Connaissant les équations de deux figures algébriques, on sait, ainsi qu'il résulte d'une Note que j'ai communiquée à l'Académie des Sciences [1], former des équations de surfaces du second ordre jouissant de cette propriété que, si les deux figures sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un point ω, ces quadriques doivent avoir pour centre le point ω. On pourrait faire usage de ces quadriques pour reconnaître l'existence et

[1] *Comptes rendus*, 11 septembre 1899.

la position du point ω; mais leur emploi serait insuffisant à résoudre la question si elles possédaient une infinité de centres communs.