A. DE SAINT-GERMAIN

Solution du problème de mécanique proposé au concours d'agrégation en 1899

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 468-475

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__468_1>

SOLUTION DU PROBLÈME DE MÉCANIQUE PROPOSÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1899;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Je vais, comme j'ai fait plusieurs fois dans les *Nouvelles Annales*, indiquer une solution, bien simple, du problème de Mécanique proposé au Concours d'agrégation de 1899. Je résume l'énoncé :

Une sphère S, *pesante, homogène, non élastique, de rayon* ρ, *de masse* m, *d'abord en repos sur un plan horizontal* H *parfaitement poli, est choquée, en un point* P *de sa surface, par un point* M, *de poids* mg, *animé d'une vitesse horizontale connue et non tangente à* S; *après le choc,* M *s'incruste en* P *sur la sphère. Déterminer le mouvement du système aussitôt après le choc; dire dans quelles régions doit se trouver* P *pour que la sphère soit soulevée, ou ne le soit pas, au-dessus du plan* H. *Calculer, dans les deux cas, la perte de force vive. Chercher, dans le second cas, le mouvement ultérieur du système.*

([1]) Cette Note a été rédigée à la demande de M. Appell, qui s'est servi de ce théorème de Géométrie dans un article relatif aux expériences du commandant Hartmann (*Bulletin de la Société mathematique de France*, 1900).

Prenons des axes rectangulaires fixes dont l'origine O coïncide avec le centre de S avant le choc, OX dirigé dans le sens de la vitesse initiale du point M, vitesse égale à V, OZ suivant la verticale ascendante. Soient x, y, z les coordonnées initiales de P : x est nécessairement négatif. Je fais $m = 1$ et le moment d'inertie μ de S autour d'un de ses diamètres est $\frac{2}{5}\rho^2$. Je définirai le mouvement du système immédiatement après le choc par les composantes u, v, w de la vitesse acquise par le centre de la sphère et par les composantes p, q, r de la rotation instantanée ω. La vitesse du point M, égale à celle de P, aura pour composantes

$$u + qz - ry, \qquad v + rx - pz, \qquad w + py - qx.$$

Supposons d'abord que S doive être soulevée au-dessus du plan H et, par suite, que w soit positif. La somme des projections des quantités de mouvement étant la même avant et après le choc, nous avons trois équations :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} V &= 2u + qz - ry, \\ 0 &= 2v + rx - pz, \\ 0 &= 2w + py - qx; \end{aligned} \right.$$

la conservation de la somme des moments des quantités de mouvement par rapport aux trois axes donne encore

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \mu p + y(w + py - qx) - z(v + rx - pz), \\ Vz &= \mu q + z(u + qz - ry) - x(w + py - qx), \\ -Vy &= \mu r + x(v + rx - pz) - y(u + qz - ry). \end{aligned} \right.$$

Ajoutant ces équations respectivement multipliées par x, y, z, on a :

$$(3) \qquad px + qy + rz = 0,$$

cette équation exprime que ω est perpendiculaire à OP;

on pouvait l'écrire à l'avance parce que ω doit être dirigé suivant le diamètre conjugué du plan du couple de percussion par rapport à l'ellipsoïde central de S, qui est lui-même une sphère. Les équations (1) donnent

$$(4) \quad u = \frac{V + ry - qz}{2}, \qquad v = \frac{pz - rx}{2}, \qquad w = \frac{qx - py}{2}.$$

Je substitue ces valeurs dans les équations (2), puis, en vertu de la relation (3), je remplace, dans la première des équations obtenues, les termes $-\frac{qy + rz}{2}x$ par $\frac{px^2}{2}$; dans la seconde, les termes en y deviennent de même $\frac{qy^2}{2}$; dans la troisième, les termes en z deviennent $\frac{rz^2}{2}$. Je forme ainsi trois équations renfermant chacune une seule inconnue, et, en remplaçant μ par $\frac{2}{5}\rho^2$, $x^2 + y^2 + z^2$ par ρ^2, j'en tire

$$p = 0, \qquad q = \frac{5Vz}{9\rho^2}, \qquad r = -\frac{5Vy}{9\rho^2};$$

puis les équations (4) donnent, après de simples réductions,

$$u = \frac{9x^2 + 4y^2 + 4z^2}{18\rho^2}V, \qquad v = \frac{5xyV}{18\rho^2}, \qquad w = \frac{5xzV}{18\rho^2}.$$

Pour être d'accord avec notre hypothèse, il faut que la valeur trouvée pour w soit positive; x étant négatif, z doit l'être aussi et le point P situé sur la moitié inférieure de la surface S, ce qui semble assez évident *a priori*.

Calculons directement la perte Q de force vive due au choc,

$$(5) \quad \begin{cases} Q = V^2 - u^2 - v^2 - w^2 - \mu\omega^2 - (u + qz - ry)^2 \\ \qquad - (v - rx - pz)^2 - (w + py - qx)^2 ; \end{cases}$$

remplaçant u, v, w par leurs valeurs (4), on trouve, après réduction des termes semblables,

$$Q = \frac{1}{2}V^2 - \mu\omega^2 - \frac{1}{2}[(qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2].$$

En vertu de l'identité de Lagrange et de la relation (3), la quantité entre crochets se réduit à

$$(p^2 + q^2 + r^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

et l'on a

$$Q = \frac{1}{2}V^2 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right)\rho^2\omega^2 = \frac{9x^2 + 4y^2 + 4z^2}{18\rho^2}V^2 = Vu.$$

Un calcul analogue permettrait de vérifier le théorème de Carnot. Mais si l'on admet *a priori* l'application de ce théorème, on arrivera presque immédiatement à la valeur précédente de Q. Écrivons, en effet, que la force vive perdue est égale à la force vive due aux vitesses perdues; on a

$$(6)\quad \begin{cases} Q = u^2 + v^2 + w^2 + \mu\omega^2 + (V - u - qz + ry)^2 \\ \qquad + (v + rx - pz)^2 + (w + py - qx)^2. \end{cases}$$

Ajoutons membre à membre avec l'équation (5); il se produit d'énormes réductions grâce à ce fait que S était d'abord en repos et la vitesse initiale de M parallèle à OX; il reste

$$2Q = 2V^2 - 2V(u + qz + ry) = 2V(V - u - qz + ry);$$

or, en vertu de la première équation (1), la dernière parenthèse est égale à u, et Q à Vu.

Passons au cas où S doit rester sur le plan H, w étant nul. La sphère reçoit du plan une percussion N, mais comme celle-ci est dirigée suivant OZ, nous aurons encore les deux premières équations (1) et (4), les équations (2) avec w nul et la relation (3). Si, dans les équations (2), je remplace u et v par leurs valeurs (4), j'obtiens des équations un peu moins symétriques que dans le premier cas :

$$(7)\qquad o = \mu p + y(py - qx) - z\frac{rx - pz}{2},$$

$$(8)\qquad \frac{1}{2}Vz = \mu q + z\frac{qz - ry}{2} - x(py - qx),$$

$$(9)\qquad -\frac{1}{2}Vy = \mu r + x\frac{rx - pz}{2} - y\frac{qz - ry}{2}.$$

L'équation (9) est la même que l'équation correspondante dans le premier cas et nous en tirerons encore pour r,

$$r = -\frac{5Vy}{9\rho^2};$$

donc, eu égard à l'équation (3),

$$(10)\qquad px + qy = \frac{5Vyz}{9\rho^2}.$$

Ajoutons les équations (7) et (8) multipliées par y et par $-x$:

$$-\frac{1}{2}Vxz = \left(\mu + x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2\right)(py - qx);$$

d'où, en posant $x^2 + y^2 = \alpha^2$,

$$(11)\qquad py - qx = -\frac{5Vxz}{9\rho^2 + 5\alpha^2}.$$

Des équations (10) et (11) on tire,

$$p = \frac{25Vxyz}{9\rho^2(9\rho^2 + 5\alpha^2)},\qquad q = \frac{5Vz(9\rho^2 + 5y^2)}{9\rho^2(9\rho^2 + 5\alpha^2)},$$

et les valeurs (4) de u, v deviennent

$$u = \frac{(63x^2 + 28y^2 + 18z^2)V}{9(9\rho^2 + 5\alpha^2)},\qquad v = \frac{35Vxy}{9(9\rho^2 + 5\alpha^2)}.$$

La percussion N est égale à l'accroissement de la somme des quantités de mouvement projetées sur OZ, ou à $py - qx$, dont nous avons la valeur (11) : or N doit être positive ; il faut donc que xz soit négatif et, par suite, z positif : le point P sera sur la moitié supérieure de la surface de S.

On peut calculer directement, comme dans le premier cas, la perte de force vive due au choc : ce calcul exige quelque attention. Mais on peut aussi employer la méthode qui nous a conduit si rapidement au résultat : la perte de force vive est encore exprimée par la formule (5) où w serait nul : le théorème de Carnot conduit encore à l'équation (6) malgré l'intervention de la percussion N, parce que son travail est nul : en combinant les deux expressions, on trouve, comme dans le premier cas, que la force vive perdue est égale à Vu.

Le mouvement ultérieur du système est celui d'un solide de révolution qui glisse sans frottement sur un plan horizontal. Le solide a son centre de gravité G au milieu du rayon de S qui aboutit en P : sa masse est égale à 2 ; ses moments d'inertie autour de l'axe de figure GP et d'une perpendiculaire quelconque menée par le point G sont

$$C = \frac{2}{5}\rho^2, \qquad A = \frac{2}{5}\rho^2 + \frac{2}{4}\rho^2 = \frac{9}{10}\rho^2.$$

Conservons les axes fixes du début et définissons la position du solide à l'instant t par les coordonnées ξ, η, ζ du point G et par les angles d'Euler θ, ψ, φ ; θ étant l'angle de GP avec OZ, ζ est égal à $\frac{1}{2}\rho\cos\theta$ et la force vive

$$2T = 2\xi'^2 + 2\eta'^2 + \frac{1}{2}\rho^2\theta'^2\sin^2\theta$$
$$+ A(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta) + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2.$$

Pour un déplacement virtuel compatible avec les liaisons, le travail des forces agissant sur le système est $-2g\delta\zeta$ ou $g\rho\sin\theta\,\delta\theta$; les équations de Lagrange relatives à ξ, η, φ, ψ sont

$$\frac{d\xi'}{dt} = 0, \qquad \frac{d\eta'}{dt} = 0, \qquad \frac{d(\varphi' + \psi'\cos\theta)}{dt} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[A\psi'\sin^2\theta + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\theta] = 0.$$

Les deux premières expriment que ξ', η' ont des valeurs constantes, qui sont évidemment $\frac{1}{2}V$ et zéro. La valeur de $\varphi' + \psi'\cos\theta$ est aussi constante et égale à la projection de la rotation initiale ω sur GP, c'est-à-dire à $\frac{px + qy + rz}{\rho}$ ou, (3), à zéro. On a donc toujours

$$\varphi' + \psi'\cos\theta = 0.$$

Mais ce résultat simplifie beaucoup la quatrième équation de Lagrange, qui exprime alors l'invariabilité de $\psi'\sin^2\theta$; ce produit, qui représente dans le cas actuel la projection de la rotation instantanée du système sur OZ, est égal à sa valeur initiale r,

$$\psi'\sin^2\theta = r.$$

Au lieu de la cinquième équation de Lagrange, prenons l'intégrale des forces vives : eu égard aux résultats précédents, elle peut s'écrire

$$\left(\frac{1}{2}\rho^2\sin^2\theta + A\right)\theta'^2 + A\frac{r^2}{\sin^2\theta} + 2g\rho\cos\theta = h.$$

La constante h est la valeur initiale du premier membre. Or $\rho\cos\theta_0$ est égal à z, $\rho\sin\theta_0$ à α; θ'_0 est la projection de ω sur une horizontale perpendiculaire à GP et dont les cosinus directeurs sont $-\frac{y}{\alpha}$, $\frac{x}{\alpha}$, 0;

sa valeur $\frac{qx - py}{\alpha}$ est donnée par la formule (11). Remplaçant les quantités connues par leurs valeurs et faisant les réductions, je trouve

$$h = \frac{5V^2}{18} \frac{14y^2 + 9z^2}{9\rho^2 + 5\alpha^2} + 2gz,$$

valeur essentiellement positive. Si, enfin, dans l'intégrale des forces vives je prends pour inconnue $\rho\cos\theta = \lambda$, au lieu de θ, l'équation peut se mettre sous la forme

$$(12) \left\{ \begin{aligned} &\frac{14\rho^2 - 5\lambda^2}{10} \frac{d\lambda^2}{dt^2} \\ &= \left[\frac{5V^2}{18} \frac{14y^2 + 9z^2}{9\rho^2 + 5\alpha^2} + 2g(z - \lambda)\right](\rho^2 - \lambda^2) - \frac{5V^2y^2}{18}. \end{aligned} \right.$$

Les variables se séparent et t s'exprime par une intégrale abélienne en λ; λ lui-même oscille entre deux limites comprises entre $-\rho$ et ρ et toujours différentes. Le cas de $x = 0$ est exclu; si y est nul, ψ' et φ' le sont aussi; t est encore donné par une intégrale abélienne, mais on voit que le second membre de l'équation (12) s'annule quand λ est égal à $\pm\rho$ ou à

$$\lambda_1 = z + \frac{5V^2z^2}{4(9\rho^2 + 5x^2)g};$$

λ varie entre $-\rho$ et la plus petite des deux quantités λ_1, ρ; si c'est ρ, le solide tourne toujours dans le même sens autour d'une parallèle à OY menée par le point G; si c'est λ_1, le sens de la rotation sera variable; si $\lambda_1 = \rho$, GP deviendra vertical au bout d'un temps infini. Quand z est nul, λ varie entre zéro et la racine négative de l'équation

$$\lambda^2 - \frac{5V^2y^2}{36g\rho^2}\lambda - \rho^2 = 0.$$