Nouvelles annales de mathématiques

# Bibliographie

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 19 (1900), p. 476-480

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__476_0>

## BIBLIOGRAPHIE.

Éléments de la Théorie des nombres; par M. *E. Cahen*. VIII+403 pages grand in-8°. Paris, Gauthier-Villars, 1900. Prix : 12fr.

Le Livre que vient de publier M. Cahen était vivement désiré et son Auteur a tous les titres à notre reconnaissance.

Depuis le célèbre Traité de Legendre, il n'avait pas paru en France d'Ouvrage où fussent réunies et exposées d'une façon complète les doctrines fondamentales de la théorie des nombres. Or, le Traité de Legendre, quoique riche en résultats, a vieilli sur beaucoup de points et ne répond plus aux exigences actuelles.

D'autres auteurs, en des Ouvrages qui n'étaient pas consacrés à la théorie des nombres, ont été amenés à exposer assez complètement certaines parties de cette Science; mais, naturellement, ils ont laissé de côté tout ce qui n'était pas indispensable à leur sujet. Aussi, l'*Algèbre supérieure,* de Serret, qui renferme des développements étendus sur les fractions continues et sur les congruences, est muette sur les formes quadratiques.

Il y avait ainsi, dans la littérature mathématique française de notre époque, une lacune bien regrettable à un double point de vue.

En premier lieu, la théorie des nombres se relie étroitement aux autres parties des Mathématiques, et l'on sait que, principalement dans les recherches élevées de l'Analyse, beaucoup de vérités revêtent un caractère nettement arithmétique. Par exemple, on ne peut guère arriver à l'intelligence complète des théories concernant les fonctions automorphes, la transformation des fonctions elliptiques et celle des fonctions abéliennes sans connaître au moins dans leurs parties essentielles les propriétés des formes quadratiques à coefficients entiers et des irrationnelles qui s'y rattachent.

On sait aussi combien, dans ces dernières années, les questions relatives à la distribution des nombres premiers ont contribué à attirer l'attention des analystes sur les propriétés des fonctions entières, et comment les recherches ainsi provoquées ont amené de mémorables découvertes.

Les personnes désireuses de pousser un peu loin leurs études mathématiques étaient donc obligées, pour acquérir des connaissances véritablement indispensables, de s'adresser à des Ouvrages étrangers, allemands pour la plupart, fort bien faits sans doute, mais dont la lecture n'est pas accessible à tous.

Le Livre de M. Cahen, appelé à rendre de grands services à ceux qui veulent étudier l'Arithmétique en vue de ses applications à d'autres parties de la Science, ne sera pas moins bien accueilli de ceux qui chérissent la théorie des nombres pour elle-même. Et ces derniers ne seront pas les moins nombreux : Sur beaucoup d'esprits, les propriétés des nombres entiers exercent un charme d'une singulière puissance, dont on peut discerner diverses raisons : d'abord, de toutes les vérités mathématiques, celles de l'ordre arithmétique empruntent le moins à l'expérience, et les postulats dont elles dérivent sont ceux que l'on ne pourrait rejeter sans s'interdire de penser. Il suffit de dire : *J'ai la faculté de distinguer, d'associer et de compter des concepts,* pour en conclure avec une rigueur absolue : *tout nombre entier est la somme de quatre carrés.* Cela est indépendant de tout renseignement que nos sens peuvent nous donner sur le monde, et ce caractère d'abstraction et de certitude parfaite revêt l'Arithmétique d'une incontestable beauté.

En second lieu, les propositions de la théorie des nombres ont fréquemment des énoncés d'une simplicité frappante, intelligibles presque sans initiation mathématique, même quand leur démonstration a exigé les efforts de l'invention la plus subtile, même quand cette démonstration nous reste encore inaccessible. Enfin, cette étude qui, rapidement, conduit aux problèmes les plus difficiles peut-être qui puissent se poser aux Géomètres, n'exige point de connaissances préalables. Le premier venu, réunissant les conditions de savoir lire, d'avoir l'esprit mathématique et de goûter les jouissances abstraites, peut aborder la théorie des nombres et prendre part, après quelques jours, aux spéculations les plus élevées de l'esprit humain.

Le Livre de M. Cahen remplit parfaitement ce double programme : d'une part, exposer les parties de l'Arithmétique qui sont essentielles pour l'intelligence complète d'autres théories;

de l'autre, être accessible aux lecteurs les plus dénués de préparation, en ne faisant appel à aucune notion antérieurement acquise. Cette dernière préoccupation est visible dans tout l'Ouvrage, qui, d'un bout à l'autre, se suffit à lui-même. La rédaction en est fort claire, les résultats sont mis nettement en évidence, au fur et à mesure qu'ils sont acquis. Enfin, de nombreux exemples numériques permettent au lecteur de se rendre compte de la valeur pratique des méthodes exposées, tout en le reposant des considérations abstraites.

Une courte analyse montrera le plan que s'est tracé l'Auteur:

Le Chapitre I résume les théories les plus élémentaires concernant les opérations fondamentales, la numération, la divisibilité, les nombres premiers, les nombres fractionnaires.

Le Chapitre II contient un complément de ces théories élémentaires. On y étudie les diviseurs des nombres, les indicateurs des divers ordres (dont des recherches récentes ont montré l'importance), la décomposition en facteurs de $n!$. Les nombres négatifs sont alors introduits et le Chapitre se termine par l'exposé des propriétés les plus simples des fractions continues.

Au Chapitre III, nous pénétrons dans la théorie des nombres proprement dite, avec la notation des congruences, l'analyse indéterminée du premier degré, les congruences binomes, les racines primitives et les indices, les théorèmes de Fermat, d'Euler et de Wilson. Ces derniers se trouvent élégamment généralisés par la considération des fonctions symétriques des nombres inférieurs à un nombre premier donné.

Le Chapitre IV est consacré à l'étude des résidus quadratiques et aux congruences du second degré. L'Auteur y étudie avec grand soin cette célèbre *loi de réciprocité*, de Legendre, sur laquelle tant d'illustres géomètres ont exercé leur sagacité. Il en donne les deux démonstrations les plus simples connues, et passe à l'extension faite par Jacobi du symbole de Legendre, extension si importante au point de vue des calculs numériques, indépendamment de son grand intérêt théorique. Il applique ensuite les théories précédentes à la résolution des congruences du second degré. Dès maintenant (et nous ne sommes pas à la moitié du Livre), le lecteur peut éprouver la satisfaction que donne la solution complète et irréprochable d'une question difficile.

Au Chapitre V sont introduits les nombres incommensurables, définis au moyen d'ensembles de nombres rationnels et dont la notion, bien qu'étrangère à la théorie des nombres proprement dite, est indispensable pour la suite. On étudie le développement de ces nombres en fractions continues, puis vient l'examen des critères, malheureusement encore bien imparfaits, qui permettent de distinguer les nombres rationnels des incommensurables et les nombres algébriques des nombres transcendants. Le théorème de Liouville sur les nombres algébriques est établi et le Chapitre se termine par l'étude du développement en fractions continues des nombres algébriques du second degré, les seuls sur lesquels nos connaissances aient acquis, jusqu'à ce jour, quelque précision.

Le Chapitre VI, de beaucoup le plus important, est consacré à l'étude des formes quadratiques binaires. On peut dire que c'est le véritable sujet du Livre, semblable, en cela, à la *Zahlentheorie,* de Dirichlet; mais M. Cahen, qui s'est évidemment guidé sur l'illustre auteur allemand, ne l'a pas imité servilement.

Deux notions importantes, celle des *groupes de substitutions modulaires* et celle des *congruences de substitutions*, dont M. Cahen fait un emploi systématique, permettent en effet de rendre l'exposition plus claire en bien des points et, en même temps, font mieux ressortir la philosophie des méthodes suivies.

Après une courte étude des substitutions modulaires, sont énoncés les trois problèmes fondamentaux que pose la question de l'équivalence des formes. Ils sont ensuite résolus, d'abord pour les formes à discriminant positif, puis pour celles à discriminant négatif. L'étude faite, dans un Chapitre antérieur, du développement en fractions continues des irrationnelles quadratiques, rend la lecture de ces dernières pages sensiblement plus facile que celle de Dirichlet.

J'exprimerai ici un regret (le seul d'ailleurs que m'ait laissé la lecture de l'Ouvrage tout entier): c'est que le désir de se restreindre ait empêché M. Cahen de faire connaître les représentations géométriques si simples et si ingénieuses que M. Klein a imaginées pour les formes réduites, et qui se rattachent aux théories des fonctions modulaires et fuchsiennes.

Le Livre est complété par plusieurs Notes intéressantes, parmi lesquelles je citerai comme particulièrement suggestives celles sur les *nombres premiers,* sur le *groupe modulaire,* sur les *fonctions numériques,* sur les *nombres entiers imaginaires,* et, enfin, par des Tables numériques empruntées à la *Théorie des congruences,* de Tchebycheff.

En terminant, je formerai l'espoir que M. Cahen ne tardera pas à accomplir une promesse faite par lui dans la Préface de son Livre : c'est de nous donner un second Volume, suite naturelle de celui-ci, et consacré à l'Arithmétique transcendante [nombre des classes de formes quadratiques, idéaux, fonction $\zeta(s)$, etc.]. Ces théories ont fait l'objet de beaux travaux contemporains, parmi lesquels ceux de M. Cahen lui-même occupent une place distinguée.

Il y a grand intérêt à les réunir dès maintenant en corps de doctrine et tous les lecteurs du présent Volume penseront comme moi que nul, mieux que son auteur, n'est désigné pour accomplir cette tâche.

RAOUL BRICARD.