ISSALY

Sur l'hélicoïde général

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 499-502

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__499_0>

[O4h]

SUR L'HÉLICOÏDE GÉNÉRAL;

PAR M. l'abbé ISSALY.

On sait que ce nom a été donné au lieu géométrique représenté par le système

$$(1) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = \varphi(r) + a\theta.$$

C'est une surface qui jouit notamment de cette propriété que, à l'aide d'une détermination convenable de la fonction φ, elle devient apte à reproduire toute une série de surfaces *minima* allant de l'hélicoïde gauche, à plan directeur, à l'alysséide de Bour.

Il s'agit de déterminer cette fonction φ par une méthode simple et directe, n'empruntant rien, ni à l'équation de Lagrange y relative, ni à l'intégrale de Monge, ni, par conséquent, à l'emploi si sujet à caution (selon nous) des lignes coordonnées dites *de longueur nulle*.

A cet effet, nous ferons observer d'abord que, d'après notre article inséré dans les *Nouvelles Annales* (p. 56; 1900), la condition caractéristique de toute surface minima peut s'écrire

$$(2) \qquad -q + p' - 2p\cos\Phi = 0.$$

Or si, d'autre part, on met le carré de l'élément linéaire sous la forme appropriée

$$dS^2 = A^2\,du^2 + A'^2\,du'^2 + 2B''\,du\,du',$$

laquelle, remarquons-le, entraîne $\cos\Phi = \frac{B''}{AA'}$, on établira sans difficulté les relations de proportionnalité suivantes :

$$\frac{-q}{\frac{A'}{A}D} = \frac{p'}{\frac{A}{A'}D'} = \frac{p}{D''},$$

les déterminants bien connus D, D′, D″ correspondant (nous permutons les *accents* dans leur notation habituelle) aux dérivées respectives $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u'^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial u'}$.

Il s'ensuit que la condition (2) peut aussi s'écrire

$$(2') \qquad A'^2 D + A^2 D' - 2B'' D'' = 0.$$

Ceci posé, revenons à notre hélicoïde. On déduit immédiatement de ses équations, dans l'hypothèse de $u = \theta$, $u' = r$:

$$\begin{array}{lll} A^2 = r^2 + a^2, & A'^2 = 1 + \varphi'^2, & B'' = a\varphi', \\ D = -r^2\varphi', & D' = -r\varphi'', & D'' = a. \end{array}$$

Portant ces valeurs dans (2′), on arrive à l'équation différentielle

$$(3) \qquad r(r^2 + a^2)\varphi'' + (r^2 + 2a^2)\varphi' + r^2\varphi'^3 = 0,$$

équation qu'il s'agit d'intégrer. Pour cela nous posons d'abord

$$z - a\theta = \zeta = \varphi(r),$$

et, conséquemment,

$$r = f(\zeta), \qquad \varphi'(r) = \frac{1}{f'(\zeta)}, \qquad \varphi''(r) = -\frac{f''(\zeta)}{f'^3(\zeta)};$$

ce qui nous permet de donner à l'équation (3) la forme, tout autrement avantageuse,

$$r(r^2 + a^2)f'' - (r^2 + 2a^2)f'^2 - r^2 = 0,$$

voire celle-ci

$$(3') \qquad r(r^2 + a^2)\frac{d^2 r}{d\zeta^2} - (r^2 + 2a^2)\frac{dr^2}{d\zeta^2} - r^2 = 0.$$

Faisons maintenant $\frac{dr}{d\zeta} = v$ et, par là même, $\frac{d^2 r}{d\zeta^2} = \frac{dv}{dr} v$; il viendra

$$dv - \frac{r^2 + 2a^2}{r(r^2 + a^2)} v\,dr - \frac{r\,dr}{v(r^2 + a^2)} = 0.$$

C'est une *équation de Bernoulli.* On la transforme en une équation *linéaire* en y posant $v^2 = w$. Elle devient ainsi

$$(3'') \qquad dw - \frac{2(r^2 + 2a^2)}{r(r^2 + a^2)} w\,dr - \frac{2r\,dr}{r^2 + a^2} = 0.$$

Intégrant et désignant par m^2 la constante, on en conclut

$$w = v^2 = \frac{dr^2}{dz^2} = \frac{r^2(r^2 - m^2)}{m^2(r^2 + a^2)};$$

d'où

$$\zeta = m \int \frac{\sqrt{r^2 + r^2}}{r\sqrt{r^2 - m^2}} dr.$$

Pour achever le calcul, multiplions haut et bas par $\sqrt{r^2 + a^2}$; nous aurons

$$\zeta = z - a\theta = m \int \frac{r\,dr}{\sqrt{(r^2 + a^2)(r^2 - m^2)}}$$
$$- ma^2 \int \frac{dr}{r\sqrt{(r^2 + a^2)(r^2 - m^2)}}.$$

Or si, après avoir posé $\rho = r^2$ dans la première intégrale et $\frac{1}{\rho_1} = r$ dans la seconde, on fait respectivement dans chacune

$$\sqrt{(\rho + a^2)(\rho - m^2)} = (\rho + a^2)t,$$
$$\sqrt{(1 + a^4\rho_1)(1 - m^2\rho_1)} = (1 - m^2\rho_1)t_1,$$

on trouvera enfin

$$z = m \log \frac{\sqrt{r^2 + a^2} + \sqrt{r^2 - m^2}}{m}$$
$$- a \operatorname{arc\,tang} \frac{m}{a} \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\sqrt{r^2 - m^2}} + a\theta + C.$$

C'est la fonction qu'il s'agissait de définir. Elle coïncide (au signe près du deuxième terme) avec celle donnée, pour la première fois, par Scherk. On constate d'ailleurs qu'elle reproduit bien, pour $m = 0$, l'hélicoïde gauche et, pour $a = 0$, l'alysséide, ainsi que nous l'avions annoncé dès le début.