NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de juillet 1899. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 77-85

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__77_1>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1899. — COMPOSITIONS.

Poitiers.

ANALYSE.

1. *Montrer que l'on peut toujours ramener aux quadratures l'intégration d'une équation de la forme*

$$y + x f(y') + \varphi(y') = 0.$$

Dans quels cas admet-elle des solutions singulières?

2. *Intégrer*

$$(y + xy')^2 = 4x^2y'.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *La surface représentée par l'équation*

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{4a^2b^2}{a^2y^2+b^2x^2}$$

renferme un volume égal au produit de πab par le périmètre de l'ellipse

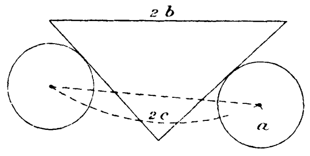
$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Rennes.

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Étude cinématique du pivotement d'un corps rigide sur un point fixe.*

2° *Sur deux cylindres de révolution horizontaux*



fixes de même rayon a, distants de $2c$, et dont les axes sont parallèles et situés dans un même plan horizontal, s'appuie un prisme horizontal homogène dont $2b$ est la base.

Montrer que l'axe instantané décrit dans l'espace un cylindre de révolution. Examiner comment se comporte par rapport au prisme la génératrice de ce cylindre qui est diamétralement opposé à l'axe instantané. En conclure le lieu de cet axe dans le prisme et les trajectoires des différents points dans l'hypothèse où le prisme n'a pas de glissement horizontal sur les *génératrices des cylindres. Faire voir que tout plan du prisme, parallèle à ses arêtes, enveloppe un cylindre de révolution horizontal : plans pour lesquels ce cylindre se réduit à une droite.*

Déterminer enfin le mouvement que le poids fait prendre à ce prisme.

Remarque. — En suivant pas à pas la marche de l'énoncé, on résout très simplement ce problème.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un pendule composé est formé d'une tige métallique prismatique de petite section σ dont on connaît la longueur l. Cette tige est homogène et son poids spécifique est p. Elle est munie supérieurement d'un conteau et porte une masse mobile de poids P, qu'on peut fixer en diverses positions sur sa longueur ; le centre de gravité de cette masse parcourt l'axe de la tige. On n'a pas de moyen de déterminer exactement sa distance à l'axe du couteau, mais on peut mesurer avec une grande précision le déplacement ξ de ce point suivant la tige.*

On observe les durées d'oscillation t, t' pour deux positions de la masse séparées par la distance ξ. En conclure les deux longueurs de pendules synchrones et le moment d'inertie de la masse par rapport à l'axe mené par son centre de gravité parallèlement à l'arête du couteau.

Le couteau est supposé muni d'un appareil de réglage permettant dans le calcul des observations de faire abstraction de son moment d'inertie.

Effectuer les calculs pour les données numériques suivantes :

$$l = 2^{\text{m}},50, \qquad \sigma = 0^{\text{mq}},000006, \qquad p = 7^{\text{gr}}, \qquad \text{P} = 540^{\text{gr}},$$
$$\xi = 0^{\text{m}},3871, \qquad t = 1^{\text{s}},483, \qquad t' = 1^{\text{s}}.574.$$

ANALYSE.

1° *Étude de la fonction analytique u définie par l'équation*

$$z = \cos u.$$

Loi des valeurs qu'elle peut prendre pour chaque valeur de z.

Points critiques. — *Expliquer comment le parcours d'un chemin convenable par la variable z permet à cette fonction d'acquérir en chaque point du plan une quelconque des valeurs dont elle est susceptible en ce point.*

2° *L'expression*

$$u = \frac{1}{x^m}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

dans laquelle m désigne un nombre entier positif, devant satisfaire identiquement à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

on demande : 1° *de déterminer la forme la plus générale de la fonction* $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$; 2° *de transformer et de résoudre la même question en coordonnées polaires.*

Si l'on pose

$$\frac{y}{x} = t,$$

on trouve pour déterminer φ l'équation du second ordre

$$(1)\qquad (1+t^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2(m+1)t\frac{d\varphi}{dt} + m(m+1)\varphi = 0.$$

En comparant cette équation à la formule de Liebnitz, on est ramené à poser

$$\varphi = \frac{d^{m-1}\psi}{dt^{m-1}}.$$

On trouve alors

$$\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}[(1+t^2)\psi] = 0.$$

D'où

$$\psi = \frac{f_m(t)}{1+t^2} = \frac{A+Bt}{1+t^2} + f_{m-2}(t),$$

$f_m(t)$ et $f_{m-2}(t)$ désignant des polynomes de degrés respectifs m et $m-2$, A et B désignant des constantes arbitraires.

On en déduit

$$\varphi(t) = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left(\frac{A+Bt}{(1+t^2)}\right).$$

La transformation et la résolution de cette question en coordonnées polaires ne présentent aucune difficulté.

Toulouse.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *On considère la surface réglée* S *formée par les normales menées à une quadrique en tous les points de la courbe d'intersection* C *de cette surface avec un plan donné* P. *Démontrer que la ligne de striction de cette surface* S *est la courbe de contact du cône qui lui est circonscrit et qui a même sommet que le cône circonscrit à la quadrique tout le long de la courbe* C.

II. *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} - x - y - z = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} - x - y + z = 0,$$

$$\frac{dz}{dt} - x + y - z = 0,$$

III. *On considère l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$(1+p^2+q^2)z^2=1,$$

où p et q désignent les dérivées partielles de la fonction inconnue z par rapport aux variables indépendantes x et y.

Déterminer une surface intégrale passant par la courbe dont les équations sont

$$x=0, \qquad y^2+z^2=1.$$

Épreuve pratique. — *Trouver pour la fonction*

$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)},$$

le développement dont le théorème de Laurent démontre l'existence dans la partie du plan comprise entre les deux cercles

$$x^2+y^2=1,$$
$$x^2+y^2=4.$$

Mécanique rationnelle.

I. *Un disque circulaire homogène très mince de rayon a est assujetti à tourner autour d'un axe vertical passant par son centre et perpendiculaire à son plan avec une vitesse angulaire constante* ω.

En un de ses points, on pose une sphère homogène de rayon b qui peut rouler sur le plan du disque sans glissement et sans frottement.

Étudier le mouvement relatif de la sphère sur le plan du disque.

II. *Définir les courbes brachistochrones dans le plan lorsque le point matériel qui les décrit est soumis à* *l'action d'une force dérivant d'un potentiel. Montrer que la composante normale de la force est égale à la force centrifuge.*

Applications. — 1° La parabole est une courbe brachistochrone pour un point matériel qui la décrit sous l'action d'une force perpendiculaire à la directrice et variant en raison inverse du carré de la distance à cette directrice.

2° L'ellipse est une courbe brachistochrone pour un point qui la décrit sous l'action d'une force répulsive émanant d'un de ses foyers F′ *et variant en raison inverse du carré de la distance de ce point à l'autre foyer* F.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

EPREUVE ÉCRITE. — *Le mouvement relatif de deux plans* A *et* B *se représente par le roulement de deux courbes, l'une* AB *dans le plan* A *et l'autre* BA *dans le plan* B′.

1° *On considère trois plans* A, B, C *glissant les uns sur les autres; connaissant le mouvement relatif de* A *et* C, *c'est-à-dire les deux roulettes* AC, CA *et la loi de leur roulement, connaissant de même le mouvement relatif de* B *et* C, *en déduire le mouvement relatif de* A *et* B.

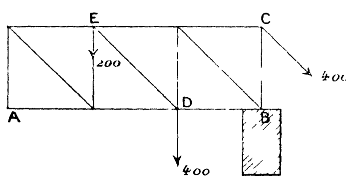
2° *Trouver de toutes les façons possibles une courbe* α *dans* A, *une courbe* β *dans* B *et une courbe* γ *dans* C, *de telle façon que* α *étant l'enveloppe de* γ *dans le plan* A *et* β *l'enveloppe de* γ *dans le plan* B, *les deux courbes* α *et* β *soient des profils conjugués dans le mouvement relatif de* A *et* B. *Cas où la courbe* γ *est absoment arbitraire.*

3° *Le mouvement relatif de* A *et* B *étant donné ainsi que deux courbes* α *et* β *constituant deux profils con-*

jugués, déterminer le mouvement du plan C *ainsi que la courbe* γ *de ce plan, de façon à engendrer* α *et* β *comme enveloppes de* γ. *Préciser les arbitraires qui entrent dans la solution générale.*

4° *Le mouvement des trois plans* A, B, C *étant défini de la façon suivante :* A *tourne autour d'un point fixe* ξ, B *tourne autour d'un point fixe* η *avec une vitesse constante* ω, C *se déplace de façon qu'une de ses droites glisse sur elle-même, enfin les deux roulettes* BA, BC *sont confondues en un cercle de rayon* R *ayant* η *pour centre, déterminer complètement les mouvements relatifs des trois plans ainsi que les courbes* α, β, γ.

Épreuve pratique. — *Une poutre articulée droite de hauteur constante est formée par des triangles rectangles isoscèles comme l'indique la figure.*



La poutre est placée horizontalement, le nœud A *étant fixé et le nœud* B *reposant sur un appui horizontal poli.*

Au nœud C *est appliquée une force égale à* 400^{kg} *et inclinée à* 45° *comme l'indique la figure. Le nœud* D *supporte une charge de* 400^{kg} *et le nœud* E *une charge de* 200^{kg}.

On néglige le poids propre du système. On demande :

1° *Épure donnant les réactions des deux appuis ;*

2° *Épure donnant les tensions. Indiquer, sur la poutre, les barres comprimées par de gros traits.*

Les deux épures seront faites séparément à l'échelle de 1^{cm} *par* 100^{kg} *pour la première et de* 2^{cm} *par* 100^{kg} *pour la seconde et l'on y joindra quelques indications très sommaires sur la méthode employée.*

ASTRONOMIE OU MÉCANIQUE CÉLESTE.

On donne les éléments suivants de l'orbite d'une planète, rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens à une date connue t_0 : *demi-grand axe, excentricité, anomalie moyenne à la date* t_0, *longitude du nœud ascendant, inclinaison du plan de l'orbite sur l'écliptique, longitude du périhélie.*

Faire connaître les formules à appliquer pour calculer les coordonnées polaires équatoriales héliocentriques à une autre date t.

On se bornera à écrire, sans les démontrer, celles de ces formules qui servent à calculer le rayon vecteur et l'anomalie vraie; on démontrera les autres. On insistera sur l'emploi des constantes de Gauss.