# Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 19 (1900), p. 90-95

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__90_1>

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 360.

(1857, p. 58.)

NOTE

Par un Abonné.

L'énoncé, reproduit dans le numéro d'avril 1898, page 194, renferme une erreur typographique. Si O est foyer d'une section méridienne d'une quadrique de révolution, on a pour la distance du point O à un point de la quadrique

$$\rho = Ax + By + Cz + D;$$

si donc l'on considère cinq points de la quadrique, on a

$$OA \times \text{Vol.}\, BCDE + OB \times \text{Vol.}\, CDEA + \ldots = 0,$$

les volumes ayant des signes.

### Question 448.

(1858, p. 359.)

Note

Par un Abonné.

L'énoncé, reproduit à la page 52 du numéro de janvier 1899, est inexact en plusieurs points. Il s'agit évidemment d'une projection du théorème de cotes, pris dans les deux cas simples auxquels il donne lieu, et la question est alors trop facile pour que l'on doive insister.

## Question 495.

(1859, p. 444.)

*Une courbe* $C_n$ *de degré* $n$ *et une conique* $C_2$ *sont données dans le même plan; on prend la polaire d'un point quelconque situé sur* $C_n$ *par rapport à la conique* $C_2$; *soient* P *et* Q *les points d'intersection de cette polaire avec la conique : le lieu du point d'intersection des deux normales menées en* P *et* Q *à la conique est d'ordre* $3n$ *au plus.*

(DESBOVES.)

SOLUTION.

Par UN ABONNÉ.

Le fait énoncé résulte immédiatement des formules bien connues, données par M. Desboves,

$$X = \frac{c^2 x(b^2 - y^2)}{b^2 x^2 + a^2 y^2}, \qquad Y = \frac{-c^2 y(a^2 - x^2)}{b^2 x^2 + a^2 y^2},$$

qui expriment les coordonnées X et Y du point de rencontre des normales aux extrémités de la corde dont le pôle a pour coordonnées $x$ et $y$ : si le point $(x, y)$ décrit une courbe d'ordre $n$, les points (X, Y) situés sur une droite donnée seront, en effet, les intersections de la courbe d'ordre $n$ avec la cubique transformée de la droite par les formules ci-dessus. On a d'ailleurs facilement les formules ci-dessus en exprimant que l'hyperbole d'Apollonius relative au point (X, Y) et la conique donnée admettent pour corde commune la polaire du point $(x, y)$ : on écrit pour cela que la conique $H + \lambda S = 0$ comprend cette droite; *voir* aussi SALMON, *Sections coniques*, n° 181, exercice 4.

## Question 496.

(1859, p. 444.)

*Par un point pris arbitrairement dans l'espace, on peut, en général, mener* $\frac{mp(m-1)(p-1)}{2}$ *droites, dont chacune* *rencontre en deux points la ligne à double courbure résultant de l'intersection de deux surfaces algébriques d'ordres m et p; toutes ces droites sont sur un cône d'ordre* $(m-1)(p-1)$.

*Il suit de là que la perspective de l'intersection de deux surfaces d'ordres m et p a* $\dfrac{mp(m-1)(p-1)}{2}$ *points doubles situés sur une courbe d'ordre* $(m-1)(p-1)$.

(MOUTARD.)

SOLUTION

Par M. G. FONTENE.

L'existence des $\dfrac{mp(m-1)(p-1)}{2}$ droites est démontrée dans le *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions* de Salmon, n° 343 : on désigne par $a$, $b$, $c$, $d$ les coordonnées tétraédriques du point donné O, et l'on écrit que les deux points $(x, y, z, t)$ et $(x+\lambda a, y+\lambda b, \ldots)$ sont sur la courbe. Si l'on veut obtenir le cône de l'énoncé, il faut procéder autrement.

Soient les deux surfaces $f=0$, $\varphi=0$. L'origine O des coordonnées étant le point d'émission des droites, le point $(x, y, z)$ appartiendra à l'une des droites cherchées si les deux équations en $\sigma$ : $f\left(\dfrac{x}{\sigma}, \dfrac{y}{\sigma}, \dfrac{z}{\sigma}\right)=0$, $\varphi\left(\dfrac{x}{\sigma}, \dfrac{y}{\sigma}, \dfrac{z}{\sigma}\right)=0$, ont *deux* racines communes; ces deux équations deviennent

$$f_0\sigma^m+f_1\sigma^{m-1}+\ldots=0, \qquad \varphi_0\sigma^p+\varphi_1\sigma^{p-1}+\ldots=0,$$

les $f$ et les $\varphi$ étant homogènes. Si l'on écrit d'abord que les deux équations ont une racine commune, on aura l'équation du cône C d'ordre $mp$ qui a O pour sommet et la courbe gauche pour directrice : la méthode d'élimination d'Euler (méthode des polynomes multiplicateurs), ou la méthode dialytique de Sylvester, donnerait l'équation de ce cône par un déterminant d'ordre $m+p$. Pour écrire l'existence d'une seconde racine commune, nous emploierons la méthode des polynomes multiplicateurs, en tenant compte de ce que les deux équations ont déjà une racine commune : au lieu d'identifier complètement les deux équations

$$(A\sigma^{p-2}+B\sigma^{p-3}+\ldots)(f_0\sigma^m+f_1\sigma^{m-1}+\ldots)=0,$$
$$(G\sigma^{m-2}+H\sigma^{m-3}+\ldots)(\varphi_0\sigma^p+\varphi_1\sigma^{p-1}+\ldots)=0,$$

nous écrirons seulement que les premiers membres sont identiques à une constante près; comme ils sont nuls tous deux pour une même valeur de $\sigma$, cette constante sera nécessairement nulle. On a ainsi la condition

$$\begin{array}{r} p-1 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ m-1 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & f_m & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f_0 & f_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & f_m & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_p & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \varphi_0 & \varphi_1 & \dots & \dots & \varphi_p & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

et cette relation nécessairement homogène représente un cône C' d'ordre $(m-1)(p-1)$, comme le montre la considération du terme principal $(f_0)^{p-1} \times (\varphi_{p-1})^{m-1}$. Ce cône C' a en commun avec le cône C des génératrices en nombre $mp \times (m-1)(p-1)$; mais les droites cherchées sont des génératrices doubles du cône C et leur nombre est la moitié du précédent; on voit pourquoi l'on a tenu à conserver la condition qui donne le cône C.

Une marche analogue à celle adoptée ici peut être employée quand on doit écrire que deux équations des degrés $m$ et $p$ ont $k$ racines communes : on aurait $k$ déterminants d'ordres $m+p$, $m+p-2$, $m+p-4$, ..., donnant des conditions qui ont pour points respectifs

$$mp, \quad (m-1)(p-1), \quad (m-2)(p-2), \quad \dots;$$

dans un espace analytique à un nombre quelconque de dimensions, cela permettrait de généraliser la question actuelle.

La méthode de Lagrange (*voir* la *Théorie des déterminants* de Baltzer, § XI, 9) conduirait pour la question actuelle à un cône d'ordre $m(p-1)$ ou à un cône d'ordre $(m-1)p$, au lieu du cône d'ordre $(m-1)(p-1)$ donné par la méthode d'Euler.

## Question 1788.

(1898, p. 148.)

*On considère, dans un cercle de centre* O, *un rayon fixe* OA *et un rayon variable* OM. *Le point* M *se projette en* P *sur* OA. *Le lieu du centre des symédianes du triangle*

MOP *est une courbe fermée dont l'aire est le $\frac{5}{32}$ de l'aire du cercle.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

En prenant O pour origine et OA pour axe des $x$, les coordonnées rectangulaires du point de Lemoine K du triangle OMP sont données par

$$(1)\qquad \begin{cases} 2x = r\cos\theta(1+\cos^2\theta), \\ 2y = r\sin\theta\cos\theta, \end{cases}$$

$r$ étant le rayon du cercle et $\angle$ MOP $= \theta$; nous avons donc

$$4y\,dx = (3r^2\sin^4\theta - 4r^2\sin^2\theta\cos^2\theta)\,d\theta,$$

et le double de l'aire est

$$\begin{aligned} A &= 3r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta - 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta \\ &= 3r^2\frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2} - 4r^2\left(\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi r^2}{16} - \frac{4\pi r^2}{16} = \frac{5\pi r^2}{16}. \end{aligned}$$

*Observation.* — En posant $\cos^2\theta = t$, les équations (1) donnent

$$4x^2 = r^2 t(1+t^2).$$
$$4(x^2+y^2) = r^2 t(1+3t),$$

et éliminant $t$, nous trouvons pour équation du lieu

$$(2)\qquad 4(x^2+y^2)^3 - 4r^2(x^2+y^2)^2 + r^2y^2(27x^2+r^2) = 0.$$

Le lieu est une courbe du sixième ordre et deuxième genre, symétrique par rapport aux axes, ayant un tacnode à l'origine et l'axe des $x$ pour tangente tacnodale; la courbe est bitangente au cercle donné, sur l'axe des $x$; a un rebroussement en chacun des points circulaires à l'infini, avec la droite à l'infini pour bitangente cuspidale, et deux points doubles isolés sur l'axe des $y$ $(x = 0, y = \pm r : \sqrt{2})$; elle a enfin quatre points d'inflexions réels.

Le lieu de la projection de K sur le rayon OM est le *folium* *double*

(3) $$(x^2+y^2)^3 = r^2 x^4;$$

l'enveloppe de la droite | PK |, c'est-à-dire l'antipodaire de (3) par rapport au centre, est la sextique

(4) $$(x^2+y^2)^3 - r^2(x^4+20x^2y^2-8y^4)+16r^4y^2 = 0,$$

qui a aussi un tacnode à l'origine avec l'axe des $x$ par tangente tacnodale, deux rebroussements aux points circulaires à l'infini et la droite à l'infini pour tangente double cuspidale; la courbe a en outre quatre rebroussements réels

$$\left(x = \pm 4r\sqrt{6} : 9,\ y = \pm 4r\sqrt{3} : 9\right)$$

et deux points doubles imaginaires sur l'axe des $y$.

La droite | MK | rencontre la perpendiculaire en O à | OM | en le pôle de | OP | par rapport au cercle ayant $\overline{\text{OM}}$ pour diamètre; les coordonnées de ce pôle étant évidemment

$$x = \frac{r}{2}\cos\theta, \qquad y = \frac{r}{2}\cos\theta\cot\theta,$$

nous avons, en éliminant $\theta$, pour équation du lieu de ce point

(5) $$r^2y^2 = 4x^2(x^2+y^2),$$

qui représente un *cappa* dirigé vers l'axe des $y$ et avec son tacnode à l'origine.

Autres solutions de MM. Droz-Farny et Lez.