Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 281-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__281_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1075.

(1872, p. 190.)

Le nombre des nombres premiers compris entre un nombre entier positif A *et son double est moindre que celui des nombres premiers non supérieurs à* A.

(LIONNET.)

SOLUTION

Par M. E. LANDAU.

Le théorème démontré, il y a quelques années, par MM. von Mangoldt et de la Vallée-Poussin que le nombre $\pi(x)$ des nombres premiers inférieurs à x est asymptotique à $\frac{x}{\log x}$ ne prouve que l'égalité asymptotique des deux grandeurs en question; ce n'est que la proposition suivante, due à M. de la Vallée-Poussin, qui permet de trancher la question :

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \mathrm{O}\left(x\, e^{-a\sqrt{\log x}}\right),$$

où $\mathrm{Li}(x)$ désigne le logarithme intégral, a une constante positive et $\mathrm{O}[\mathrm{G}(x)]$ une fonction telle que son quotient par $\mathrm{G}(x)$ reste fini pour $x = \infty$.

En effet, en vertu de l'identité

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\log x} &= \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + 2\int \frac{dx}{\log^3 x}\\ &= \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \mathrm{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\end{aligned}$$

on a, l'ordre de grandeur de $xe^{-a\sqrt{\log x}}$ étant inférieur à celui de $\frac{x}{\log^3 x}$,

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right),\\ \pi(2x) &= \frac{2x}{\log x + \log 2} + \frac{2x}{(\log x + \log 2)^2} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\\ &= \frac{2x}{\log x} - \frac{2\log 2 . x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right).\end{aligned}$$

Or, l'excès du nombre des nombres premiers compris entre x et $2x$ sur celui des nombres premiers inférieurs à x est

$$\pi(2x) - 2\pi(x) = -2\log 2 \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right);$$

cet excès est donc négatif pour tous les x supérieurs à une certaine limite. Le calcul de cette limite, à partir de laquelle le théorème en question est ainsi démontré, n'offre aucun intérêt, car elle dépasse de beaucoup la limite des Tables de nombres premiers.

1548.

(1885, p. 487.)

Prouver que

$$\frac{(C_{2n-2p,n-p} \times C_{2p,p})^2}{C_{n,p}} = \textit{entier}.$$

(Catalan.)

SOLUTION

Par M. E. Landau.

En posant

$$n - p = x_1, \qquad p = x_2,$$

il s'agit de démontrer que

$$\begin{aligned}&\frac{(C_{2x_1,x_1} \times C_{2x_2,x_2})^2}{C_{x_1+x_2,x_2}}\\ &= \frac{2x_1!\,2x_1!\,2x_2!\,2x_2!\,x_1!\,x_2!}{x_1!\,x_1!\,x_1!\,x_1!\,x_2!\,x_2!\,x_2!\,x_2!\,(x_1+x_2)!}\\ &= \frac{2x_1!\,2x_1!\,2x_2!\,2x_2!}{x_1!\,x_1!\,x_1!\,x_2!\,x_2!\,x_2!\,(x_1+x_2)!} = \text{entier}.\end{aligned}$$

Pour cela, il suffit, en vertu du théorème que j'ai établi (p. 356 du t. XIX, 1900) que

$$(1) \qquad 2[2y_1] + 2[2y_2] \geqq 3[y_1] + 3[y_2] + [y_1 + y_2],$$

pour toutes les valeurs de y_1, y_2 comprises entre 0 et 1 (inclusivement).

1° Pour $y_1 = 1, y_2 = 1$, l'on a en effet

$$4 + 4 = 3 + 3 + 2;$$

2° Pour $y_1 = 1, y_2 < 1$, (1) prend la forme

$$4 + 2[2y_2] \geqq 3 + 1 = 4,$$

ce qui est évident, $[2y_2]$ étant 0 ou 1;

3° Pour $y_1 < 1, y_2 = 1$, (1) revient pareillement à l'inégalité évidente

$$2[2y_1] + 4 \geqq 3 + 1 = 4;$$

4° Pour $y_1 < 1, y_2 < 1$, il faut prouver que

$$2[2y_1] + 2[2y_2] \geqq [y_1 + y_2].$$

En effet, la plus grande des deux quantités $2y_1$, $2y_2$ est, à elle seule, au moins égale à leur moyenne arithmétique

$$y_1 + y_2.$$

1675.

(1894, p. 4*.)

On considère tous les cercles de rayon constant tangents à une conique. Lieu du pôle de la seconde corde d'intersection du cercle et de la conique par rapport à la conique. Cas particulier d'un cercle de rayon nul. Montrer que, dans ce cas, le pôle de la seconde corde d'intersection du cercle et de la conique n'est autre que le point fixe du théorème de Frégier, relatif aux angles droits ayant leur sommet au point considéré de la conique.

(ANDRÉ CAZAMIAN.)

SOLUTION

Par M. E.-N. Barisien.

1° *Cas d'une conique à centre* (*ellipse*). — Soit l'équation de l'ellipse

$$(1) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

La tangente au point (x_1y_1) de l'ellipse a pour équation

$$b^2xx_1 - a^2yy_1 - a^2b^2 = 0.$$

La seconde sécante d'intersection de l'ellipse avec un cercle tangent en (x_1y_1) à l'ellipse a pour équation

$$(2) \qquad b^2xx_1 - a^2yy_1 + \mu = 0;$$

de sorte que l'équation de ce cercle est de la forme

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) \\ \quad + (b^2xx_1 + a^2yy_1 - a^2b^2)(b^2xx_1 - a^2yy_1 + \mu) = 0, \end{cases}$$

avec la condition

$$\lambda = \frac{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}{c^2}.$$

En tenant compte de cette valeur de λ, et de la relation

$$(4) \qquad b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2,$$

l'équation (3) du cercle devient

$$(5) \quad \begin{cases} a^4b^4(x^2+y^2) \\ \quad + b^2c(\mu - a^2b^2)x_1x + a^2c(\mu + a^2b^2)y_1y \\ \qquad - a^2b^2(\mu c^2 + a^4y_1^2 + b^4x_1^2) = 0. \end{cases}$$

Si R désigne le rayon de ce cercle, on a

$$(6) \quad \begin{cases} 4R^2a^8b^8 = b^4c^4x_1^2(\mu - a^2b^2)^2 \\ \quad + a^4c^4y_1^2(\mu + a^2b^2)^2 + 4a^6b^6(\mu c^2 + a^4y_1^2 + b^4x_1^2). \end{cases}$$

Or, cette relation peut s'écrire

$$(7) \qquad 4R^2a^8b^8 = (b^4x_1^2 + a^4y_1^2)[\mu c^2 + a^2b^2(a^2+b^2)]^2.$$

La polaire d'un point (α, β) par rapport à l'ellipse donnée est

$$b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2 = 0. \tag{8}$$

En identifiant (2) et (8), on trouve

$$\frac{x_1}{\alpha} = \frac{-y_1}{\beta} = \frac{\mu}{-a^2b^2}. \tag{9}$$

On aura le lieu du pôle (α, β) en éliminant x_1, y_1 et μ entre les équations (4) et (7) et les deux équations (9). En résolvant (9) et (4), on trouve

$$x_1 = \frac{ab\alpha}{\sqrt{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}},$$

$$y_1 = -\frac{ab\beta}{\sqrt{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}},$$

$$\mu = \frac{-a^3b^3}{\sqrt{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}}.$$

En portant ces valeurs dans (7), on obtient pour l'équation du lieu

$$4a^2b^2R^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)^2 = (b^4\alpha^2 + a^4\beta^2)\left[(a^2 + b^2)\sqrt{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2} - abc^2\right]^2,$$

ou, en chassant le radical,

$$\left\{\begin{aligned} &\Big\{(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2)[(a^2 + b^2)^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2) + c^4a^2b^2] \\ &\qquad\qquad - 4a^2b^2R^2(b^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2)^2\Big\}^2 \\ &= 4a^2b^2c^4(a^2 + b^2)^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2)^2; \end{aligned}\right. \tag{10}$$

c'est une courbe du huitième degré.

L'équation (7) donne les deux valeurs de μ, correspondant à chacun des deux cercles de rayon R, tangents à l'ellipse au point $(x_1 y_1)$.

Lorsque $R = 0$, on a

$$\mu = -\frac{a^2b^2(a^2 + b^2)}{c^2}, \tag{11}$$

et le lieu (10) devient

$$(12)\qquad (a^2+b^2)^2(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)-c^4a^2b^2=0;$$

c'est une ellipse concentrique et homothétique à l'ellipse donnée.

En portant la valeur (11) de μ dans (9), on a

$$(13)\qquad \alpha=\frac{c^2x_1}{a^2+b^2},\qquad \beta=\frac{c^2y_1}{a^2+b^2}.$$

Considérons maintenant le triangle rectangle inscrit dans l'ellipse, ayant le sommet de l'angle droit en (x_1y_1) et les côtés de l'angle droit parallèles aux axes. L'hypoténuse de ce triangle a pour équation

$$(14)\qquad y=-x\frac{y_1}{x_1}.$$

Celle de la normale en (x_1y_1) est

$$(15)\qquad a^2xy_1-b^2yx_1=c^2x_1y_1.$$

En résolvant (14) et (15), on trouve pour les coordonnées du point de Frégier

$$x=\frac{c^2x_1}{a^2+b^2},\qquad y=-\frac{c^2y_1}{a^2+b^2};$$

ce sont précisément les coordonnées (13).

Donc, lorsque $R=0$, le point (α,β) est bien le point de Frégier relatif à la normale au point (x_1y_1).

2° *Cas de la parabole.* — Le calcul se conduit d'une façon tout à fait analogue au cas de la conique à centre.

L'équation de la parabole est

$$(16)\qquad y^2-2px=0.$$

L'équation de la tangente en (x_1y_1) est

$$(17)\qquad yy_1-px-px_1=0.$$

Celle de la seconde corde d'intersection est

$$(18)\qquad yy_1+px+\mu=0.$$

L'équation du cercle tangent à la parabole en $(x_1 y_1)$ est

$$(19)\quad \lambda(y^2 - 2px) + (yy_1 - px - px_1)(yy_1 + px + \mu) = 0,$$

avec la condition

$$\lambda = -(y_1^2 + p^2) = -p(2x_1 + p).$$

L'équation (19) s'écrit donc

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} & p^2(x^2+y^2) + p(\mu - 3px_1 - 2p^2)x \\ & \qquad - y_1(\mu - px_1)y + p\mu x_1 = 0; \end{aligned} \right.$$

R étant le rayon de ce cercle, on trouve

$$(21)\quad 4R^2p^3 = (2x_1 + p)[\mu - p(x_1 + 2p)]^2.$$

La polaire d'un point (α, β) par rapport à la parabole a pour équation

$$(22)\quad px - \beta y + p\alpha = 0.$$

En identifiant les équations (18) et (22), on trouve

$$(23)\quad y_1 = -\beta,$$

$$(24)\quad \mu = p\alpha.$$

De (23) on déduit

$$(25)\quad x_1 = \frac{\beta^2}{2p}.$$

Si donc on porte dans (21) les valeurs (24) et (25) de μ et de x_1, on trouve

$$(26)\quad (\beta^2 + p^2)(\beta^2 - 2p\alpha + 4p^2)^2 = 16R^2p^4.$$

Dans le cas de la parabole, le lieu de (α, β) s'abaisse de deux degrés et devient une sextique.

Si, dans (21), l'on fait $R = 0$, il vient

$$\mu = p(x_1 + 2p).$$

Alors, d'après (24) et (23),

$$(27)\quad \alpha = x_1 + 2p,$$

$$(28)\quad \beta = -y_1.$$

Ce sont encore bien les coordonnées du point du théorème de Frégier, relatif au point $(x_1 y_1)$.

Lorsque $R = 0$, le lieu du point (α, β) est la parabole d'équation

$$\beta^2 - 2p\alpha + 4p^2 = 0. \tag{29}$$

Autre solution de M. H. Dellac.

1823.

(1899, p. 244.)

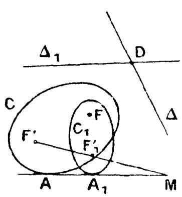
Deux coniques C *et* C_1 *ont en commun le foyer* F, *auquel correspondent pour chacune d'elles les directrices* Δ *et* Δ_1 *qui se coupent au point* D. *Démontrer que les tangentes communes à ces coniques passent par le point de rencontre de la droite qui joint les deux autres foyers* F' *et* F'_1 *et de la perpendiculaire élevée en* F *à la droite* FD.

(M. d'Ocagne.)

SOLUTION

Par M. J. Lez.

Soit AA_1 une tangente commune qui coupe $F'F'_1$ en M; les deux autres tangentes issues de M devant faire avec MF des



angles égaux à $\widehat{AMF'}$, et du même côté de MF, coïncident. M est donc un ombilic.

La droite FM, joignant deux ombilics conjugués, a même pôle par rapport aux deux coniques; ce pôle est à la fois sur les polaires Δ et Δ_1 de F, c'est-à-dire en D; et alors FM, polaire du point D de la directrice Δ par rapport à C, est perpendiculaire à FD, ce qui démontre le théorème.

Autres solutions de MM. Audibert et Droz-Farny.