G. FONTENÉ

Sur un contour hexagonal variable circonscrit à une quadrique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 319-321

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__319_1>

[L[2]14a]

SUR UN CONTOUR HEXAGONAL VARIABLE CIRCONSCRIT A UNE QUADRIQUE;

PAR M. G. FONTENÉ.

En étudiant de nouveau la question que j'avais proposée dans les *Nouvelles Annales* (1899, p. 485) pour le premier concours de 1900, j'ai obtenu ce résultat :

Si trois tangentes α, β, γ *en trois points* A, B, C *d'une sphère font, avec les tangentes en* A, B, C *au cercle* ABC *des angles* λ, μ, ν *qui vérifient la relation*

$$\cos\lambda + \cos\mu + \cos\nu = \cos(\lambda + \mu + \nu),$$

la sphère étant orientée, le cercle ABC *étant dirigé,* *les tangentes* α, β, γ *étant dirigées convenablement, il existe une série indéfinie de contours hexagonaux* $A'B''C'A''B'C''A'$ *dont les couples de sommets opposés sont respectivement sur les droites* α, β, γ, *et qui sont circonscrits à la sphère, les points de contact étant dans un même plan pour chacun des trois contours quadrangulaires* $A'A''B'B''A'$, ...

La démonstration peut se faire ainsi. Le pôle du plan ABC étant D, si l'on prend comme tétraèdre de référence le tétraèdre ABCD, la quadrique supposée quelconque a pour équation

$$Ayz + Bzx + Cxy - t^2 = 0,$$

et les équations des tangentes α, β, γ peuvent être mises sous la forme

$$\frac{t}{\sqrt{ABC\,\text{tang}\,\lambda}} = \frac{y}{B} = \frac{z}{-C},$$

$$\frac{t}{\sqrt{ABC\,\text{tang}\,\mu}} = \frac{z}{C} = \frac{x}{-A},$$

....

Si l'on considère le contour ouvert $A'B''C'A''$, et si l'on écrit que l'une des huit relations homographiques qui ont lieu entre A' et A'' est involutive, comme cela doit avoir lieu, on obtient, avec $\varepsilon = \pm 1$, ...,

$$\varepsilon \cos\lambda + \varepsilon' \cos\mu + \varepsilon'' \cos\nu = \cos(\lambda + \mu + \nu);$$

on doit d'ailleurs prendre

$$\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' = +1,$$

l'hypothèse contraire donnant des solutions parasites. En remplaçant au besoin λ et μ par $\lambda + \pi$ et $\mu + \pi$, on a d'ailleurs $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = +1$, par suite $\varepsilon'' = +1$.

Si G_1 et G_2 sont les génératrices en A de la quadrique, le rapport anharmonique (G_1, G_2, α, AD) est celui de quatre plans $\frac{t}{y} = m$, m ayant des valeurs proportionnelles à i, $-i$, $\tang\lambda$, ∞. Donc, si la quadrique est une sphère, λ est l'angle indiqué dans l'énoncé donné au début.

Voici une conséquence :

La quadrique étant donnée, soient α, β, γ *trois tangentes dont les points de contact sont* A, B, C, *telles qu'un hexagone gauche circonscrit à la quadrique puisse varier en ayant ses couples de sommets sur ces droites. Si l'on considère les trois hyperboloïdes qui sont circonscrits à la quadrique le long de la conique* ABC, *et qui contiennent respectivement les droites* α, β, γ, *on peut remplacer* α *par une génératrice quelconque de même système du premier hyperboloïde, etc. On peut remplacer simultanément* α, β, γ *par trois génératrices appartenant à l'autre système.*