Concours d'admission à l'École normale supérieure en 1901

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 326-328

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__326_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1901.

Mathématiques.

On considère l'hyperboloïde (H) représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

et les deux systèmes de génératrices rectilignes définis par les équations

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= u\left(1 + \frac{z}{c}\right), \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \frac{1}{u}\left(1 - \frac{z}{c}\right), \end{aligned} \right.$$

et

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = v\left(1 - \dfrac{z}{c}\right), \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{v}\left(1 + \dfrac{z}{c}\right). \end{cases}$$

A chaque système de valeurs attribuées aux paramètres u et v correspond un point de l'hyperboloïde (H), intersection des génératrices (I) et (II); réciproquement, à chaque point de l'hyperboloïde correspond un système de valeurs pour u et v.

Former la relation qui doit exister entre les paramètres u et v pour que le point de l'hyperboloïde qui correspond au système de valeurs (u, v) appartienne à l'un des conoïdes (C) représentés par l'équation

$$z = \frac{2abcxy}{(1+m)b^2x^2 + (1-m)a^2y^2},$$

où m désigne un paramètre variable. De quoi se compose l'intersection complète de l'un de ces conoïdes et de l'hyperboloïde quand $m^2 - 1$ est différent de zéro et quand $m^2 - 1$ est nul?

Déterminer les points où la courbe (Q), commune à (H) et à l'un des conoïdes, coupe les génératrices du système (II); exprimer les coordonnées des points de cette courbe en fonction du paramètre v.

En combien de points la courbe (Q) rencontre-t-elle chaque génératrice du système (I)? Déterminer le lieu décrit par le centre des moyennes distances des points situés sur une de ces génératrices, lorsque celle-ci se déplace sur l'hyperboloïde.

Démontrer qu'il existe un conoïde (C) pour lequel le plan tangent à l'hyperboloïde en chaque point de la courbe (Q) est perpendiculaire au plan déterminé par la génératrice du système (II) qui passe en ce point et par la génératrice parallèle de (H).

Distinguer, suivant la valeur du paramètre m, ceux des conoïdes (C) pour lesquels les points d'intersection d'une génératrice du système (I) et de la courbe (Q) sont tous réels, ceux pour lesquels un seul point d'intersection est toujours réel, ceux enfin pour lesquels le nombre des points réels varie avec la génératrice.

N. B. — Il est inutile de reproduire l'énoncé.