NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 328-335

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__328_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

597.

(1861, p. 399)

Si l'on prend les polaires des points milieux des côtés d'un triangle, relativement à une conique quelconque inscrite dans le triangle, ces polaires déterminent un triangle qui a une surface constante. (FAURE.)

SOLUTION

Par M. NICOLAI, à Pistoia.

Prenons pour axes de coordonnées les deux côtés OA, OB, du triangle OAB et posons $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$; l'équation d'une conique tangente aux deux arcs de coordonnées est de la forme

$$\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1\right)^2 + 2\lambda xy = 0,$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que la droite AB soit une tangente est

$$\lambda = \frac{2(p-a)(b-q)}{abpq}.$$

On trouve alors pour les coordonnées des polaires des points milieux des côtés du triangle OAB, relativement à une conique quelconque inscrite dans le triangle, les expressions

$$A_1 = \frac{b}{2pq}\left[1 - \frac{2(a-p)(b-q)}{ab}\right] - \frac{1}{p},$$

$$A_2 = \frac{b}{2pq}\left[1 - \frac{2(a-p)(b-q)}{ab}\right] + \frac{1}{p}\left(\frac{a}{2p} - 1\right),$$

$$A_3 = \frac{1}{p}\left(\frac{a}{2p} - 1\right),$$

$$B_1 = \frac{1}{q}\left(\frac{b}{2q} - 1\right),$$

$$B_2 = \frac{a}{2pq}\left[1 - \frac{2(a-p)(b-q)}{ab}\right] + \frac{1}{q}\left(\frac{b}{2q} - 1\right),$$

$$B_3 = \frac{a}{2pq}\left[1 - \frac{2(a-p)(b-q)}{ab}\right] - \frac{1}{p},$$

$$C_1 = 1 - \frac{b}{2q},$$

$$C_2 = -\frac{a}{2p} - \frac{b}{2q} + 1,$$

$$C_3 = 1 - \frac{a}{2p}.$$

Soient T la surface du triangle en question, θ l'angle que OA fait avec OB; pour évaluer T, utilisons la formule

$$T = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2 \sin\theta}{2\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}};$$

de là, en développant après quelques réductions,

$$T = \frac{1}{2} ab \sin\theta.$$

Les polaires des points milieux des côtés d'un triangle, relativement à une conique quelconque inscrite dans le triangle, déterminent donc un triangle ayant même surface que le triangle donné.

1804.

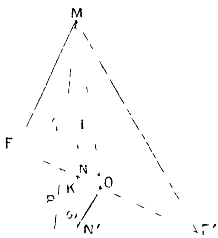
(1898, p. 240)

Soit M *un point variable situé sur une ellipse de foyers* F *et* F′. *La parabole qui est tangente à* MF *et* MF′ *en* F *et* F′ *a même axe et même foyer que la parabole osculatrice à l'ellipse en* M. (BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. DUPORCQ.

Soit ω le centre du cercle osculateur en M à l'ellipse donnée, et soit I le milieu du segment $M\omega$: on sait que le cercle de diamètre MI est le lieu des foyers des paraboles qui admettent ω comme centre de courbure relatif au point M. Le diamètre, MO, de l'ellipse donnée étant d'ailleurs évidemment parallèle



à l'axe de la parabole osculatrice en M à cette ellipse, cette parabole admet pour foyer la projection, φ, du point I sur la droite $M\varphi$, symétrique de MO par rapport à la normale $M\omega$.

La direction MO étant évidemment aussi celle de l'axe de la parabole tangente en F et F′ aux droites MF et MF′, il nous reste à prouver que le point φ coïncide avec le foyer φ' de cette parabole : or, ce point est, comme on sait, le milieu de la corde interceptée sur la droite $M\varphi$ par la circonférence MFF′. La question revient donc à montrer que la projection P du point ω sur $M\varphi$ appartient à la circonférence MFF′ : il suffit pour cela de prouver l'égalité

$$\text{(1)} \qquad MO.MP = MN.MN',$$

N et N′ étant les points où la normale $M\omega$ coupe l'axe focal et le petit axe de l'ellipse donnée, car le point N′ appartient au cercle MFF'. Soit K la projection de O sur $M\omega$, on a visiblement

$$MO.MP = M\omega.MK.$$

D'ailleurs, on sait que les parallèles menées repectivement de ω et N aux droites NO et KO se coupent sur MO : on a donc

$$\frac{MN}{M\omega} = \frac{MK}{MN'},$$

et l'égalité (1) se déduit immédiatement des deux précédentes. La propriété énoncée en résulte.

Autre réponse de M. Lez.

1806.

(1898, p. 388.)

On considère une série d'ellipses concentriques et ayant même direction d'axes et un point fixe M *de leur plan. Soit* TT' *la corde polaire de l'une de ces ellipses par rapport à* M. *Le lieu du foyer des paraboles bitangentes à l'ellipse en* T *et* T' *est la droite qui joint les projections de* M *sur les axes des ellipses.* (Barisien.)

SOLUTION

Par M. Duporcq.

Transformons homographiquement la figure, de sorte que les points à l'infini des axes des coniques considérées deviennent les points cycliques. Ces coniques se transformeront en hyperboles équilatères concentriques, et, aux points cycliques de la première figure, correspondront les points à l'infini de deux directions rectangulaires, de sorte qu'on aura à démontrer la propriété suivante :

On considère une série d'hyperboles équilatères de même centre O, *et un point fixe* m *de leur plan. Soit* tt' *la polaire de* m *par rapport à l'une de ces hyperboles : il existe une parabole bitangente en* t *et* t' *à l'hyperbole. On considère l'angle droit circonscrit à cette parabole, dont les côtes sont parallèles à deux axes fixes donnés : le lieu du sommet de cet angle est la normale au milieu de* mO.

Je vais, en effet, démontrer que cette normale est la directrice commune à toutes les paraboles envisagées. On sait, en effet, que si l'on considère toutes les coniques tangentes en t et t' aux droites mt et mt', le point m a la même polaire par rapport à leurs cercles orthoptiques, et que cette polaire est la perpendiculaire abaissée sur mO de l'orthocentre du triangle mtt'. Comme le cercle orthoptique de l'hyperbole équilatère se réduit à son centre, et celui de la parabole, à sa directrice, la propriété annoncée devient immédiate.

Autres réponses de MM. Audibert, Durlimbert, Lez, Merlin.

1807.

(1898, p. 388.)

Soient M *un point du plan d'une ellipse et* PQ *la corde polaire de cette ellipse par rapport à* M. *Le lieu des points* M, *tels que la parabole bitangente à l'ellipse en* P *et* Q *ait son foyer sur l'ellipse, se compose des deux cercles de Chasles concentriques à l'ellipse et ayant pour diamètres la somme ou la différence des axes de l'ellipse.*

(Barisien.)

SOLUTION

Par M. Duporcq.

On sait que si, sur une normale à une ellipse en un point φ, on porte de part d'autre de φ des longueurs φM et φM' égales au demi-diamètre conjugué du diamètre Oφ, les points M et M' engendrent les cercles de Chasles : les droites OM et OM' sont également inclinées sur les axes de l'ellipse et, comme φ est le milieu de MM', on voit que ces droites sont les asymptotes de l'hyperbole, homofocale à l'ellipse, qui passe par φ.

Cela posé, supposons que le point φ de l'ellipse donnée soit le foyer d'une parabole bitangente à cette conique en P et Q, et soit M le pôle de PQ. Considérons l'involution des tangentes menées de φ aux coniques bitangentes en P et Q à l'ellipse; dans cette involution se correspondent les droites isotropes issues de φ; les rayons doubles sont d'ailleurs évidemment la droite φM et la tangente en φ à l'ellipse; ces droites sont donc rectangulaires; autrement dit, φM est normale à l'ellipse en φ.

D'autre part, la droite MO est évidemment parallèle à l'axe de la parabole considérée; par suite, les droites MO et Mφ

sont également inclinées sur les tangentes MP et MQ : il en résulte qu'elles sont tangentes à une même conique homofocale à l'ellipse donnée; autrement dit, la droite MO est une des asymptotes de l'hyperbole, homofocale à l'ellipse, menée par φ. Par suite de notre remarque préliminaire, le point M est donc sur un des cercles de Chasles de l'ellipse.

Réciproquement, si M est un des deux points correspondant à φ sur les cercles de Chasles, la conique de foyer φ, bitangente en P et Q à l'ellipse, est une parabole; car, MO et Mφ étant alors également inclinées sur les tangentes MP et MQ, la droite MO passe par le second foyer de cette conique, dont elle est bien évidemment un diamètre.

Autres solutions de MM. Durlimbert et Lez.

1804, 1806 et 1807 [1].

SOLUTIONS ANALYTIQUES

Par M. L. Ripert.

1. Résolvons d'abord la question 1806. L'équation générale des coniques bitangentes à $(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0)$ aux extrémités de la corde polaire $(b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2 = 0)$ du point $M(\alpha, \beta)$ est

$$\lambda(b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2)^2 + b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

ou

$$b^2(\lambda b^2\alpha^2 + 1)x^2 + 2\lambda a^2b^2\alpha\beta xy + a^2(\lambda a^2\beta^2 + 1)y^2 + \ldots = 0.$$

La parabole correspond à $\lambda = -\dfrac{1}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}$; son équation développée est

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\beta^2x^2 - 2\alpha\beta xy + \alpha^2y^2 + 2b^2\alpha x + 2a^2\beta y \\ &\qquad\qquad - (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 + a^2b^2) = 0. \end{aligned}\right.$$

D'une manière générale, on sait que, les coordonnées étant rectangulaires, le foyer de la parabole

$$(AX^2 + 2BXY + \ldots + F' = 0)$$

---

[1] Ces trois questions sont connexes et dépendent des mêmes calculs.

a pour coordonnées

$$x = \frac{C(AF + CF + D^2 - E^2) - 2BDE}{2(A + C)(BE - CD)},$$

$$y = \frac{A(AF + CF - D^2 + E^2) - 2BDE}{2(A + C)(BD - AE)}.$$

Par application, les coordonnées du foyer de (1) sont, avec $c^2 = a^2 - b^2$,

$$(2) \qquad x = \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)}{2(\alpha^2 + \beta^2)}, \qquad y = \frac{\beta(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)}{2(\alpha^2 + \beta^2)},$$

et elles satisfont, quels que soient a et b (et même a^2 et b^2) à l'équation

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1.$$

L'axe de la parabole (1) est la droite

$$(3) \qquad \alpha y - \beta x + \frac{c^2 \alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = 0.$$

II. Si M est un point variable de l'ellipse fixe (question 1804), la *parabole polaire* de M devient la parabole osculatrice en M; les équations (1), (2), (3) restent les mêmes [en remplaçant, si l'on veut, le dernier terme de (1) par $-2a^2b^2$]. La parabole tangente à MF et MF′ en F et F′ a pour équation

$$(\alpha y - \beta x)^2 - 2\beta c^2 y - \beta^2 c^2 = 0.$$

Elle a même axe (3) et même foyer (2). La propriété s'applique aussi bien à la parabole polaire d'un point M du plan qu'à la parabole osculatrice d'un point de la conique.

III. A cause des coordonnées (2), l'équation du lieu de la question 1807 est

$$b^2\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)^2 + a^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 = 0.$$

Cette équation se décompose ainsi :

$$(4) \quad (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)[\alpha^2 + \beta^2 - (a + b)^2][\alpha^2 + \beta^2 - (a - b)^2] = 0.$$

C. Q. F. D.

Réciproquement et plus généralement, la conique étant ellipse ou hyperbole, si le point M décrit un cercle concentrique ($\alpha^2 + \beta^2 = R^2$), le foyer (2) devient une ellipse

$$\frac{x^2}{(R^2 - c^2)^2} + \frac{y^2}{(R^2 - c^2)^2} = \frac{1}{4R^2},$$

la même pour toutes les coniques homofocales, et qui, dans les cas (ellipse) de $R = a + b$ ou $R = a - b$, devient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le foyer d'une parabole polaire par rapport à une hyperbole ne peut jamais se trouver sur cette hyperbole.

Remarques. — Toutes les paraboles polaires d'un point M par rapport à une famille de coniques homofocales ont même axe (3) et même foyer (2). Il en est ainsi en particulier des deux paraboles osculatrices à deux coniques homofocales en chacun de leurs points communs.

On peut être tenté de dire, à cause de l'équation (4), que, dans le cas de l'hyperbole, le lieu (III) de M est le système des asymptotes ($a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = 0$, a^2 et b^2 étant de signes contraires). Mais un point pris sur une asymptote n'a pas de parabole polaire; car, s'il en avait une, elle admettrait l'asymptote de l'hyperbole pour asymptote *finie*, ce qui est absurde.

Toute propriété de la parabole osculatrice en un point d'une conique paraît devoir donner naissance à une propriété de la parabole polaire d'un point du plan. C'est un fait remarquable, analogue à celui des propriétés de la tangente en un point que l'on retrouve, souvent identiques, parfois généralisées, dans la polaire d'un point.