NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. LEMOINE

Sur une détermination nouvèle simple de la direction des axes d'une conique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 385-401

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__385_0>

[L¹3]

SUR UNE DÉTERMINATION NOUVÈLE SIMPLE DE LA DIRECTION DES AXES D'UNE CONIQUE;

PAR M. E. LEMOINE (¹).

Lorsque l'on veut déterminer la direction des axes d'une conique donée par son équation générale en coordonées cartésiènes obliques, on est conduit à des calculs classiques mais assez compliqués et le résultat final, par exemple la valeur explicite des tangentes des angles que font les axes de la conique avec l'axe des x, contient des radicaus et manque totalement d'élégance; en outre il ne coresporid, pour l'esprit, à aucune image géométrique simple. Si la conique est donée par son équation en coordonées normales raportée à un triangle de référence ABC, les calculs directs deviènent presque formidables et le résultat, inutilisable pratiquement; aussi ne les fait-on, pour ainsi dire, jamais.

Le but de la présente Note est de doner, précisément dans ce cas, une détermination imagée, simétrique, même *relativement* très simple dans sa généralité, si l'on considère que, dans le résultat, doivent figurer les six coéficients de l'équation de la conique. Les calculs, simétriques, dis-je, sont rapides, souvent imédiats.

LEMME. — *Si* M *est un point du cercle circonscrit au triangle* ABC, *les bissectrices des angles que la direction de la droite qui joint* M *à un somet fait avec la*

(¹) Nous laissons à M. E. Lemoine la responsabilité de l'orthographe qu'il a adoptée.

direction du coté oposé, sont paralèles deus à deus, quel que soit le somet.

Nous n'insisterons pas sur la facile démonstration de ce téorème conu sous plusieurs formes.

Il suit de là qu'à la direction de deus droites rectangulaires corespond un point M et un seul du cercle circonscrit. La détermination de ce point *corespondant à la direction des axes d'une conique,* va nous servir à résoudre le problème.

Je dirai simplement pour abréger : point M corespondant à tèles directions.

Nous indiquons ici une marche de calcul pour ariver à l'expression des coordonées du point M. Soit

$$(1) \qquad lx^2 + my^2 + nz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

l'équation en coordonées normales de la conique (ABC triangle de référence).

Je raporte la conique à CB axe des X, CA axe des Y; j'obtiens ainsi

$$(2) \qquad AY^2 + BXY + CX^2 = 0$$

en négligeant les termes inutiles pour la détermination de la direction des axes.

Si j'apèle α l'angle que fait l'un quelconque des axes de la conique avec la direction CB de l'axe des x, j'ai par la formule classique

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \sin C \frac{2C\cos C - B}{A - B\cos C + C\cos 2C}.$$

Le coéficient angulaire des droites qui font avec CB cet angle 2α sera $\frac{2C\cos C - B}{A - 2C\cos C}$; la droite passant par C et paralèle à cète direction aura donc pour équation en coordonées cartésiènes

$$\frac{Y}{X} = \frac{2C\cos C - B}{A - 2C\cos C},$$

et en coordonées normales

$$\frac{x}{y} = \frac{2C\cos C - B}{A - 2C\cos C};$$

on en conclut que la droite menée par A et paralèle à cète direction aura pour équation

$$(3) \qquad \frac{y}{z} = \frac{c(A - 2C\cos C)}{2C(b-a)\cos C + aB - bA}.$$

Cète droite coupe le cercle circonscrit au point M corespondant aus directions des axes de la conique, puisqu'èle fait avec BC l'angle 2α et que les bissectrices des angles que fait sa direction avec la direction BC, doneront alors les angles α que les directions des axes de la conique font avec BC.

En remplaçant dans (3) A, B, C par leurs valeurs en fonction de l, m, n, f, g, h que l'on trouve dans (2), on arive finalement aus valeurs des coordonées du point M corespondant aus axes de la conique (1)

$$(4) \qquad \frac{a}{l(b^2 - c^2) + a^2(m-n) + 2gac - 2hab}, \quad \ldots,$$

c'est le résultat cherché.

Remarques. — Le point M corespondant aus axes d'une conique circonscrite $fyz + gzx + hxy = 0$ est évidament le quatrième point où èle coupe le cercle circonscrit $\frac{1}{gc - hb}$, etc.

Deus coniques concentriques, l'une inscrite, l'autre circonscrite, ont même point M corespondant à la direction de leurs axes qui est comune.

Voici quelques exemples pris sur des coniques remarquables étudiées dans la Géométrie du triangle.

1. Les coniques

$$\mathrm{H}\sum a^2x^2 \pm \mathrm{K}\sum bcyz = 0, \qquad \sum \frac{b^2+c^2}{ax} = 0, \qquad \sum \frac{\cos \mathrm{A}}{a^2x} = 0,$$

l'iperbole circonscrite qui passe par les points de Brocard $\sum \frac{a^4 - b^2c^2}{ax} = 0$, les coniques inscrites et circonscrites de Steiner, l'élipse de Lemoine

$$\sum \sqrt{ax(2b^2 + 2c^2 - a^2)} = 0,$$

qui a pour foyers le baricentre G et le point K de Lemoine, touchant BC au pied sur BC de la simédiane partant de G dans le triangle BCG, etc., la conique

$$\sum a \cos \mathrm{A}(a^2x^2 - bcyz) = 0,$$

ont pour le point M corespondant à la direction de leurs axes le point de Steiner.

2. Les coniques

$$\mathrm{H}\sum x^2 \pm \mathrm{K}\sum yz \cos \mathrm{A} = 0, \qquad \sum \sqrt{x \cos \mathrm{A}} = 0$$

qui a pour centre le point de Lemoine et touche les cotés aus pieds des hauteurs, la conique

$$\sum a\mathrm{R} \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C}(b \cos \mathrm{B} + c \cos \mathrm{C})x^2$$
$$- 2\sum \cos \mathrm{A}(a\mathrm{S} \cos \mathrm{A} + bc\mathrm{R} \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C})yz = 0$$

qui passe par les six points où les paralèles aus cotés menées par le centre du cercle ABC coupent les cotés,

ont pour point M corespondant à leurs axes le point :
$\frac{a}{b^2 - c^2}$, etc.

Dans la plupart des cas qui se rencontrent en étudiant la Géométrie du triangle, on arive, pour ainsi dire imédiatement, sans transformations, à la détermination des coordonées de M sous une forme simple, en substituant dans les valeurs (4), ou plutôt dans l'une d'èles à cause de la simétrie, les coéficients de l'équation de la conique, mais quelquefois cependant la forme simple doit être dégagée. L'exemple le plus complexe que nous ayons rencontré, se trouve être la conique que nous venons de considérer et nous alons indiquer, pour lui, les transformations à opérer sur le résultat imédiat doné par les valeurs (4).

On trouve que le dénominateur est composé des quatre termes :

$$\begin{gathered} aR\cos B\cos C(b\cos B + c\cos C)(b^2 - c^2), \\ a^2[bR\cos C\cos A(c\cos C + a\cos A) \\ \qquad - cR\cos A\cos B(a\cos A + b\cos B)], \\ -2ac\cos B(bS\cos B + acR\cos C\cos A), \\ 2ab\cos C(cS\cos C + abR\cos A\cos B); \end{gathered}$$

le second peut s'écrire

$$a^2\cos A\,.\,R[bc(\cos^2 C - \cos^2 B) + a\cos A(b\cos C - c\cos B)];$$

ou, en remarquant que $\cos^2 C - \cos^2 B = \frac{b^2 - c^2}{4R^2}$ et que $b\cos C - c\cos B = \frac{b^2 - c^2}{a}$, il devient

$$a^2 R(b^2 - c^2)\cos A\left(\frac{bc}{4R^2} + \cos A\right).$$

Le troisième et le quatrième termes peuvent se grouper ainsi :

$$-2abc\,S(\cos^2 B - \cos^2 C) - 2a^2 R\cos A\cos B\cos C(c^2 - b^2),$$

de sorte que le dénominateur devient successivement

$$\begin{aligned}(b^2-c^2)\Big[&aR\cos B\cos C(b\cos B+c\cos C)\\ &+a^2R\cos A\left(\frac{bc}{4R^2}+\cos A\right)\\ &+\frac{2abcS}{4R^2}+2a^2R\cos A\cos B\cos C\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b^2-c^2)\Big[&aR\cos B\cos C\sum a\cos A\\ &+aR\cos A\left(\frac{abc}{4R^2}+a\cos A+a\cos B\cos C\right)+\frac{2S^2R}{R^2}\Big],\end{aligned}$$

et en remarquant que

$$\sum a\cos A=\frac{2S}{R},\qquad \cos A+\cos B\cos C=\sin B\sin C=\frac{bc}{4R^2}:$$

$$2(b^2-c^2)S\left(a\cos B\cos C+a\cos A+\frac{S}{R}\right)$$

ou

$$2(b^2-c^2)S\left(\frac{abc}{4R^2}+\frac{S}{R}\right)$$

ou

$$\frac{4(b^2-c^2)S^2}{R}.$$

Les valeurs (4) donent donc, finalement : $\frac{a}{b^2-c^2}$, etc.

Si K et G sont le point de Lemoine et le baricentre, AK, BK, CK; AG, BG, CG coupent les cotés du triangle en six points qui apartiènent à la conique $\sum x^2-\sum\frac{b^2+c^2}{bc}yz=0$ dont le centre O : $\frac{2a^2+b^2+c^2}{a}$, etc., est sur KG. On a

$$\frac{OG}{OK}=-\frac{1}{3}.$$

Les axes de cète conique ont aussi pour point M le point $\frac{a}{b^2-c^2}$, etc.

Les axes de $\sum \frac{\cos A}{x} = 0$, qui a pour centre le point de Lemoine et les élipses de Cesàro qui ont pour centres le point de Lemoine et sont tèles que la some des carrés des distances de chacun de leurs points aus cotés soit constante, ont encore le point $\frac{a}{b^2 - c^2}$, etc., pour point M corespondant à la direction de leurs axes.

3. *a*. Les coniques homofocales

$$\sum yz = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum \sqrt{\frac{ax}{p-a}} = 0,$$

qui ont pour centres le point $p-a$, $p-b$, $p-c$;

b. La conique

$$\sum (p-a)yz = 0,$$

qui a pour centre le centre du cercle inscrit o;

c. La conique

$$\sum ax^2 - \sum (b+c)yz = 0,$$

qui passe par les milieus des cotés et par les pieds des bissectrices intérieures et a pour centre le point : $\frac{2p+a}{a}$, etc.;

d. La conique

$$\sum a(p-a)x^2 - \sum [bc + (p-b)(p-c)]yz = 0,$$

qui passe par les points où les tangentes au cercle inscrit paralèles aus cotés coupent ces cotés;

e. La conique

$$\sum a(b+c)x^2 - 2\sum (ap+bc)yz = 0,$$

qui est circonscrite à l'exagone formé par les six points où les paralèles aus cotés menées par le centre du cercle inscrit, rencontrent les cotés, ont toutes, les directions de leurs axes qui corespondent au point $\frac{1}{b-c}$, etc.

Par transformation continue en A (voir *Nouvelles Annales*, p. 20-36; 1893), on voit que :

a'. Les coniques homofocales

$$-yz + zx + xy = 0, \qquad \sqrt{\frac{ax}{p}} + \sqrt{\frac{-by}{p-c}} + \sqrt{\frac{-cz}{p-b}} = 0$$

qui ont pour centre le point : p, $p-c$, $p-b$;

b'. La conique

$$pyz - (p-c)zx + (p-b)xy = 0,$$

qui a pour centre le centre du cercle exinscrit o_a;

c'. La conique

$$ax^2 - by^2 - cz^2 + (b+c)yz + (a-c)zx + (a-b)xy = 0,$$

qui passe par les milieus des cotés, par le pied de la bissectrice intérieure de A et par les pieds des bissectrices extérieures de B et de C et a pour centre le point : $\frac{b+c-2a}{a}$, $\frac{2b+c-a}{b}$, $\frac{b-2c-a}{c}$;

d'. La conique

$$\begin{aligned} &apx^2 - b(p-c)y^2 + c(p-b)z^2 \\ &\quad + [bc - (p-b)(p-c)]yz \\ &\quad + [ac - p(p-b)]zx + [ab + p(p-c)]xy = 0 \end{aligned}$$

qui passe par les points où les tangentes au cercle exinscrit o_a paralèles aus cotés, coupent ces cotés;

e'. La conique

$$\begin{aligned} &a(b+c)x^2 + b(a-c)y^2 + c(a-b)z^2 \\ &\quad - 2[a(p-a) - bc]yz \\ &\quad - 2[b(p-a) + ca]zx - 2[c(p-a) + ab]xy = 0 \end{aligned}$$

qui est circonscrite à l'exagone formé par les six points où les paralèles aus cotés menées par le centre du cercle exinscrit o_a rencontrent les cotés; ont toutes, les directions de leurs axes qui corespondent au point : $\frac{1}{b-c}$, $-\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$.

4. L'iperbole de Kiepert

$$\sum \frac{b^2-c^2}{ax} = 0;$$

L'iperbole équilatère

$$\sum a^2(b^2-c^2)x^2 = 0$$

qui passe par les centres des cercles tritangents, par le baricentre et a pour centre le point de Steiner; ont pour point M corespondant à la direction de leurs axes le point de Tarry.

5. *a*. M. G. de Longchamps a le premier étudié (Congrès de Nancy, A. F. A. S., 1886) une élipse remarquable qui a pour centre le centre du cercle inscrit et passe par les pieds des bissectrices intérieures; èle a pour équation

$$\sum (p-a)x^2 - \sum ayz = 0;$$

quand M. de Longchamps veut déterminer les directions de ses axes qui sont cèles de l'axe antiortique et de sa perpendiculaire, il y parvient d'une façon ingénieuse mais fort détournée et s'exprime ainsi : « *Cette proposition très simple ne se vérifie* DIRECTEMENT *que par des calculs très laborieux et que nous n'avons* *même pas poussés jusqu'au bout, par suite des complications qu'ils semblent présenter.* » Cependant l'équation de la conique est simple, et on peut juger de ce que serait alors la complication des calculs pour certains des cas traités plus haut ! En apliquant les valeurs (4), on trouve presque imédiatement que le point M corespondant à la direction des axes de la conique a pour coordonées : $\frac{a}{(b-c)(b+c-2a)}$, etc., c'est précisément le point M qui corespond aus directions de l'axe antiortique et de sa perpendiculaire.

Si l'on aplique la transformation continue en A, on arive imédiatement à la proposition suivante :

La conique

$$px^2-(p-c)y^2-(p-b)z^2+ayz+bzx+cxy=0$$

qui a pour centre le centre du cercle exinscrit o_a, passe par le pied de la bissectrice intérieure de A et par les pieds des bissectrices extérieures partant de B et de C, a pour point M corespondant à la direction de ses axes le point : $\frac{a}{(b-c)(b+c-2a)}$, $-\frac{b}{(c+a)(a+2b-c)}$, $\frac{c}{(a+b)(a-b+2c)}$, c'est-à-dire le point qui corespond à la direction de l'antibissectrice de A : $-x+y+z=0$ et à sa perpendiculaire.

Cète conique jouit naturèlement de toutes les propriétés énoncées par M. de Longchamps, mais modifiées suivant la loi de la transformation continue. Il y a aussi les coniques transformées en B et en C.

b. La conique inscrite

$$\sum\sqrt{x}=0,$$

tangente aus cotés aus pieds des bissectrices intérieures, a pour point M corespondant à la direction de ses axes le même point : $\frac{a}{(b-c)(b+c+2a)}$, etc.

Par transformation continue en A, on voit que la conique inscrite

$$x^2+y^2+z^2-2yz+2xz+2xy=0,$$

tangente aus cotés au pied de la bissectrice intérieure partant de A et aus pieds des bissectrices extérieures partant de B et de C, a pour point M corespondant à ces axes le point :

$$\frac{a}{(b-c)(-b-c+2a)},\quad \frac{b}{(a+c)(-c+a-2b)},$$
$$\frac{c}{(a+b)(a-b-2c)}.$$

c. Pour l'iperbole Γ_a :

$$(b^2-c^2)yz+abxz-abxy=0$$

du groupe Γ_a, Γ_b, Γ_c si souvent rencontré dans la Géométrie du triangle, le point M corespondant à la direction des axes, est le point $\cos B\cos C$, $-\cos B$, $-\cos C$ extrémité du diamètre du cercle circonscrit passant par A. Les axes font donc avec CB des angles de $45^\circ-\frac{B-C}{2}$, $135^\circ-\frac{B-C}{2}$.

d. L'élipse inscrite

$$\sum\sqrt{\frac{x}{a}}=0$$

qui a pour foyers les points de Brocard et touche les cotés aus pieds des simédianes, a pour point M corespondant à la direction de ses axes, le point :

$$\frac{a}{(a^4-b^2c^2)(b^2-c^2)},\text{ etc.}$$

e. La conique

$$L(bx+ay)(cx+az)+M(cy+bz)(ay+bx) \\ +N(az+cx)(bz+cy)=0$$

a pour point M corespondant à la direction de ses axes le point : $\frac{a}{Lbc(b^2-c^2)+a^3(Mc-Nb)}$, etc.

f. La conique

$$ayz(-La+Mb+Nc)+bzx(La-Mb+Nc) \\ +cxy(La+Mb-Nc)=0$$

a pour point M corespondant à la direction de ses axes le point : $\frac{a}{Mb-Nc}$, etc.

Si l'on employait les coordonées baricentriques, on verrait que, à la direction des axes de la conique

$$l\alpha^2+m\beta^2+n\gamma^2+2f\beta\gamma+2g\gamma\alpha+2h\alpha\beta=0,$$

corespond le point M dont les coordonées baricentriques sont :

$$\frac{1}{l(b^2-c^2)+mb^2-nc^2+2gc^2-2hb^2}, \text{ etc.},$$

ou

$$\frac{1}{b^2(l+m-2h)-c^2(l+n-2g)}, \text{ etc.}$$

6. On voit sans multiplier davantage ces exemples que la détermination de la direction des axes des coniques remarquables, revient à placer des points remarquables sur le cercle circonscrit, points qui ont, pour la plupart, été déjà étudiés dans la Géométrie du triangle et que cète détermination se présente, par la métode que nous venons d'exposer, dans des conditions de simplicité, de simétrie et d'élégance qu'èle n'avait pas jusqu'ici.

Nous profitons de l'ocasion de cète Note pour doner quelques propriétés que nous croyons nouvèles du point $\frac{1}{b-c}$, etc., et de ses transformés continus rencontrés ici come points M corespondant à la direction des axes de nombreuses coniques remarquables.

Nous apelons d, d_a, d_b, d_c les distances du centre du cercle circonscrit aux centres des cercles tritangents;

M étant un point du plan, nous convenons que AM, BM, CM auront le même signe que les coordonées normales du point M.

a. Si M est le point $\frac{1}{b-c}$, etc., on a :

$$\mathrm{MA} = \frac{\mathrm{R}}{d}(b-c).$$

b. Donc :

$$\mathrm{MA} + \mathrm{MB} + \mathrm{MC} = 0.$$

c. MA, MB, MC coupent respectivement BC, CA, AB en trois points situés sur la droite $\sum x(b+c) = 0$ paralèle à l'axe antiortique et à une distance de cet axe égale à $\frac{\mathrm{R}r}{d}$, tiers de la distance du centre du cercle inscrit à l'axe antiortique.

La transformation continue en A montre que :

a'. Si M_a est le point $\frac{1}{b-c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$, on a

$$\mathrm{M}_a\mathrm{A} = \frac{\mathrm{R}}{d_a}(b-c),$$

$$\mathrm{M}_a\mathrm{B} = \frac{\mathrm{R}}{d_a}(c+a),$$

$$\mathrm{M}_a\mathrm{C} = -\frac{\mathrm{R}}{d_a}(a+b).$$

b'. Donc :

$$\mathrm{M}_a\mathrm{A} + \mathrm{M}_a\mathrm{B} + \mathrm{M}_a\mathrm{C} = 0.$$

c'. M_aA, M_aB, M_aC coupent respectivement BC, CA, AB en trois points situés sur la droite

$$x(b+c)+y(a-c)+z(a-b)=0,$$

paralèle à l'antibissectrice $-x+y+z=0$ de A et à une distance $\frac{Rr_a}{d_a}$ de cète droite, tiers de la distance du centre du cercle exinscrit o_a à cète antibissectrice.

d. Lorsque le point M que l'on trouve par notre métode est un point déjà étudié de la Géométrie du triangle, il n'y a qu'à le construire par le moyen géométrografique, c'est-à-dire le plus simple que l'on conaisse, à le joindre à un somet du triangle et à mener les bissectrices des angles que cète droite fait avec le coté oposé au somet choisi : quand le point M n'est pas conu, on en fait l'étude et la construction par les moyens ordinaires de la Géométrie du triangle, mais nous croyons utile de faire remarquer qu'on trouve quelquefois une solution élégante par l'emploi du téorème très conu suivant :

Si une droite $Ax+By+Cz=0$ *coupe les cotés du triangle* ABC *en* A', B', C' *les courbes* B'C'A, C'A'B, A'B'C *se coupent en un point* P *du cercle circonscrit dont les coordonées sont :* $\frac{a}{A(Bc-Cb)}$, $\frac{b}{B(Ca-Ac)}$, $\frac{c}{C(Ab-Ba)}$.

On identifie les coordonées du point P avec cèles du point M et l'on profite de l'indétermination du problème (puisque M apartient au cercle circonscrit) pour choisir le mieus possible cèles des valeurs de A, B, C qui donent une droite conue ou facile à construire.

7. Les exemples précédents que nous avons pris pour ainsi dire au hasard de la rencontre de coniques remar-

quables dans nos Mémoires sur la Géométrie du triangle, montrent que les points de Steiner; de Tarry; les points $\frac{a}{b^2-c^2}$, etc.; $\frac{1}{b-c}$, etc., et ses transformés continus; le point $\frac{a}{(b-c)(b+c+2a)}$, etc., et ses transformés continus; le point $\frac{a}{(b^2-c^2)(a^4-b^2c^2)}$, etc., se rencontrent souvent parmi les points M corespondants à la direction des axes des coniques remarquables. Pour les points de Steiner et de Tarry qui ont été sufisament étudiés et pour le point $\frac{a}{(b-c)(b+c-2a)}$, etc., corespondant à la direction de l'axe antiortique et à la direction perpendiculaire laquèle (*voir* A. F. A. S., Congrès de Paris, 1900, *Suite de téorèmes et de résultats concernant la Géométrie du triangle,* A. 9) se détermine avec la plus extrême simplicité géométrografique, nous n'ajouterons rien, mais pour les points $\frac{a}{b^2-c^2}$, etc., $\frac{1}{b-c}$, etc., qui se trouvent cependant à chaque instant dans les études sur les points, droites, etc., remarquables du triangle nous croyons qu'on ne les a guère étudiés à part et nous devons indiquer quelques constructions.

a. On peut construire le point $\frac{a}{b^2-c^2}$, etc., en se servant du téorème que nous venons de doner 6. *d*., la droite à choisir est alors la droite de Lemoine $\sum \frac{x}{a} = 0$. On conduit ainsi la construction.

D'un rayon quelconque ρ je trace les trois cercles $A(\rho)$, $B(\rho)$, $C(\rho)$ $(3C_1+3C_3)$, puis les intersections de deus d'entre eus avec le troisième $(4R_1+2R_2)$ qui placent le centre O du cercle circonscrit à ABC; je trace ce cercle $(2C_1+C_3)$; je fais du coté de AB oposé à C et en me servant des trois cercles $A(\rho)$, $B(\rho)$, $C(\rho)$

les angles $BAC_1 = ABC_1 = C(4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 2C_2)$; AC_1 et BC_1 coupent BC et CA en A', B'; $A'B'$ que je ne trace pas, serait la droite de Lemoine. Je trace maintenant le cercle circonscrit au triangle $A'B'C$ $(4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3)$, il coupe le cercle ABC au point cherché.

Op. : $(12R_1 + 6R_2 + 14C_1 + 10C_3)$;

Simplicité : 42; Exactitude : 26; 6 droites, 10 cercles.

Je pourais économiser $(C_1 + C_3)$ si je me servais de deus compas.

Cette construction est assez simple, mais ce n'est pas la construction *géométrografique* qui dérive du téorème suivant que croyons nouveau :

Si N *est le point de Tarry et* G *le baricentre, la droite* NG *coupe le cercle circonscrit au point* $\dfrac{a}{b^2 - c^2}$, *etc.*

Je prends dans le compas, en métant la pointe en B, la longueur $BC = a$ du plus grand coté du triangle et je trace $B(a)$ $(2C_1 + C_3)$; je trace $C(a)$, $A(a)$ $(2C_1 + 2C_3)$; puis par deus des intersections d'un de ces cercles avec les deus autres $(4R_1 + 2R_2)$, je place le centre O du cercle circonscrit et je trace ce cercle $(2C_1 + C_3)$ qui coupe en B_1, C_1 le cercle ABC; je trace B_1C_1 $(2R_1 + R_2)$ qui coupe BC en A_2; je trace AA_2 $(2R_1 + R_2)$ qui coupe le cercle ABC au point R de Steiner; je trace RO $(2R_1 + R_2)$ qui place le point N de Tarry sur le cercle circonscrit. Je place G en traçant deus médianes $(4R_1 + 2R_2)$ puisque les milieus de deus cotés ont été marqués pour placer O; je trace GN $(2R_1 + R_2)$ qui coupe le cercle ABC au point cherché.

Op. : $(16R_1 + 8R_2 + 6C_1 + 4C_3)$;

Simplicité : 34; Exactitude : 22; 8 droites, 4 cercles.

Remarque. — La droite GN est paralèle à la droite de de Longchamps $\sum a^3 x = 0$ et a pour point à l'infini $\frac{b^2 - c^2}{a}$, etc.

b. Le point $\frac{1}{b-c}$, etc., se construit facilement soit avec le téorème que nous avons doné (*voir* plus haut 6. *a*.), soit avec l'autre téorème signalé (*voir* 6. *d*.) au moyen de la droite $\sum a^2 x = 0$, soit en remarquant que le raport de ses distances à BC et à AC est $\frac{b-a}{b-c}$, ce qui done un lieu de ce point, puis prenant l'intersection de ce lieu avec le cercle ABC; mais je crois que la véritable construction géométrografique est encore à trouver et je n'ai pas analisé ces constructions.

c. Le point $\frac{a}{(b^2 - c^2)(b^2 c^2 - a^4)}$, etc., corespondant à la direction des axes, conue *a priori*, de la conique $\sum \sqrt{\frac{x}{a}} = 0$ se construit également au moyen du téorème doné (6. *d*.) en employant la droite qui joint les points de Brocard.