NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-N. BARISIEN

Aire de la podaire oblique de la développée oblique de l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 401-412

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__401_1>

[$M^1 3 j\alpha$]

AIRE DE LA PODAIRE OBLIQUE DE LA DÉVELOPPÉE OBLIQUE DE L'ELLIPSE;

PAR M. E.-N. BARISIEN,

Commandant d'Infanterie,
en mission à Constantinople.

Le but de cette Note est de donner quelques résultats intéressants concernant l'ellipse et d'attirer l'attention sur ce que ce genre de questions doit pouvoir être généralisé, par exemple, pour les courbes à centre.

Il faut tout d'abord donner quelques définitions et notations.

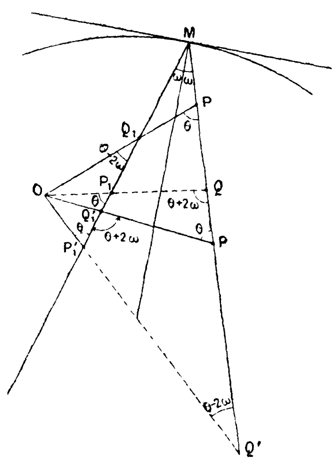
L'équation de l'ellipse est

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Nous appelons *normales obliques en un point* M les deux droites qui sont inclinées d'un angle ω sur la normale droite. Ces mêmes droites sont également des *tangentes obliques* sous l'angle $90^\circ - \omega$, et par conséquent coupent la courbe sous l'angle $90^\circ - \omega$.

Chacune de ces normales obliques a pour enveloppe une *développée oblique*.

Si, maintenant, l'on mène d'un point O des droites inclinées sur chaque normale oblique d'un angle constant θ, on aura sur l'une des normales des points P



et P', et sur l'autre des points P_1 et P'_1. Le lieu de chacun de ces points est une *podaire oblique* (*sous l'angle* θ) *des normales obliques* (*sous l'angle* ω), ou pour parler plus exactement, ces courbes sont des *podaires obliques (sous l'angle θ) des deux développées obliques (sous l'angle ω).*

Formons l'équation de l'une des normales obliques.

Si λ est le coefficient angulaire de la normale droite et μ celui d'une normale oblique, on a

$$\mu = \lambda \pm \omega.$$

Prenons la normale pour laquelle $\mu = \lambda + \omega$. L'équation de cette normale est

$$y - b\sin\varphi = \operatorname{tang}(\lambda + \omega)(x - a\cos\varphi),$$

φ étant l'anomalie excentrique du point M. Cette équation s'écrit

$$\begin{aligned} &x\sin(\lambda - \omega) - y\cos(\lambda + \omega) \\ &\quad = a\cos\varphi\sin(\lambda + \omega) - b\sin\varphi\cos(\lambda + \omega). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}\lambda &= \frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}, \\ \sin\lambda &= \frac{a\sin\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}, \\ \cos\lambda &= \frac{b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}. \end{aligned}$$

L'équation de l'une des normales obliques sous l'angle ω est donc

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &x(a\cos\omega\sin\varphi + b\sin\omega\cos\varphi) \\ &-y(b\cos\omega\cos\varphi - a\sin\omega\sin\varphi) \\ &\quad = c^2\cos\omega\sin\varphi\cos\varphi + ab\sin\omega. \end{aligned} \right.$$

L'équation de la seconde normale s'obtient en changeant ω en $-\omega$, ce qui donne

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &x(a\cos\omega\sin\varphi - b\sin\omega\cos\varphi) \\ &-y(b\cos\omega\cos\varphi + a\sin\omega\sin\varphi) \\ &\quad = c^2\cos\omega\sin\varphi\cos\varphi - ab\sin\omega. \end{aligned} \right.$$

Formons maintenant les équations des deux projetantes obliques sous l'angle θ, abaissées du point O sur la normale (1). Soient (α, β) les coordonnées du point O et ν le coefficient angulaire de l'une des projetantes. On a

$$\nu = \theta + \lambda + \omega - 180^\circ.$$

Par conséquent l'équation de l'une des projetantes sur la normale (1) est

$$y - \beta = \operatorname{tang}\nu(x - \alpha)$$

ou

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &x[b\sin(\theta+\omega)\cos\varphi + a\cos(\theta+\omega)\sin\varphi]\\ &\qquad - y[b\cos(\theta+\omega)\cos\varphi - a\sin(\theta+\omega)\sin\varphi]\\ &\quad = \alpha[b\sin(\theta+\omega)\cos\varphi + a\cos(\theta+\omega)\sin\varphi]\\ &\qquad - \beta[b\cos(\theta+\omega)\cos\varphi - a\sin(\theta+\omega)\sin\varphi]. \end{aligned}\right.$$

On a l'équation de la seconde projetante en changeant θ en $-\theta$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &x[b\sin(\omega-\theta)\cos\varphi + a\cos(\omega-\theta)\sin\varphi]\\ &\qquad - y[b\cos(\omega-\theta)\cos\varphi - a\sin(\omega-\theta)\sin\varphi]\\ &\quad = \alpha[b\sin(\omega-\theta)\cos\varphi + a\cos(\omega-\theta)\sin\varphi]\\ &\qquad - \beta[b\cos(\omega-\theta)\cos\varphi + a\sin(\omega-\theta)\sin\varphi]. \end{aligned}\right.$$

On trouve de même, pour les équations des projetantes de O sur la normale (2), en changeant ω en $-\omega$ dans les équations (3) et (4),

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &x[-b\sin(\omega-\theta)\cos\varphi + a\cos(\omega-\theta)\sin\varphi]\\ &\qquad - y[b\cos\varphi\cos(\omega-\theta) + a\sin(\omega-\theta)\sin\varphi]\\ &\quad = \alpha[-b\sin(\omega-\theta)\cos\varphi + a\cos(\omega-\theta)\sin\varphi]\\ &\qquad - \beta[b\cos\varphi\cos(\omega-\theta) + a\sin(\omega-\theta)\sin\varphi], \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &x[-b\sin(\omega+\theta)\cos\varphi + a\cos(\omega+\theta)\sin\varphi]\\ &\qquad - y[b\cos\varphi\cos(\omega+\theta) + a\sin(\omega+\theta)\sin\varphi]\\ &\quad = \alpha[-b\sin(\omega+\theta)\cos\varphi + a\cos(\omega+\theta)\sin\varphi]\\ &\qquad - \beta[b\cos\varphi\cos(\omega+\theta) + a\sin(\omega+\theta)\sin\varphi]. \end{aligned}\right.$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour calculer l'aire de *l'une des quatre podaires obliques sous l'angle* θ *des développées obliques sous l'angle* ω.

Ce calcul étant fort long, nous nous contenterons d'en indiquer l'esprit.

Cherchons, par exemple, l'aire de la podaire dont les équations (1) et (3) fourniraient l'équation de la courbe par l'élimination de φ.

On obtiendrait l'équation de cette courbe en posant, pour abréger l'écriture, $\theta + \omega = \varepsilon$, et l'on trouverait une courbe du sixième degré.

Les quatre podaires obliques des développées obliques sont donc des sextiques.

Mais pour le calcul de l'aire, il vaut mieux se servir de la formule

$$dU = \frac{1}{2}\left(y\frac{dx}{d\varphi} - x\frac{dy}{d\varphi}\right). \tag{7}$$

En résolvant les équations (1) et (3) par rapport à x et à y, on trouve que ces coordonnées sont des fonctions rationnelles de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, ce qui montre que les podaires sont des courbes unicursales. On trouve ainsi que le dénominateur commun de x et y est

$$(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)\sin\theta,$$

de sorte que x et y sont de la forme

$$x = \frac{F(\sin\varphi, \cos\varphi)}{\sin\theta(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)},$$

$$y = \frac{F_1(\sin\varphi, \cos\varphi)}{\sin\theta(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)}.$$

On forme alors $\frac{dx}{d\varphi}$ et $\frac{dy}{d\varphi}$. On trouve alors pour dU une expression très compliquée. Mais en intégrant de $\varphi = 0$ à $\varphi = 2\pi$, on voit qu'un grand nombre d'intégrales du genre de celle-ci

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2}$$

s'annulent. Et il reste

$$\begin{aligned} U = \frac{ab}{2\sin^2\theta}\Bigg[& c^4 \cos^2\omega \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2} \\ & + a^2 b^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\omega \frac{d\varphi}{(a^2 \sin^2 + b^2 \cos^2\varphi)^2} \\ & + b^2 \alpha^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2} \\ & + a^2 \beta^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi \, d\varphi}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2} \Bigg]. \end{aligned}$$

Or,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2} = \frac{\pi}{ab(a+b)^2},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2} = \frac{\pi(a^2+b^2)}{a^3 b^3},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2} = \frac{\pi}{ab^3}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi \, d\varphi}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2} = \frac{\pi}{a^3 b}.$$

U devient donc

$$U = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}\left[(a-b)^2 \cos^2\omega + (a^2+b^2)\sin^2\omega + \alpha^2 + \beta^2\right]$$

ou

$$(8) \qquad U = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2ab\cos^2\omega).$$

Comme cette formule ne change pas en changeant θ en $-\theta$ et ω en $-\omega$, il en résulte que l'aire des quatre podaires obliques des développées obliques est la même pour un même point (α, β).

On voit, d'autre part, que le lieu des points (α, β) tels que l'aire (8) soit constante, est un cercle concentrique à l'ellipse.

En d'autres termes, on a la propriété suivante :

Si, d'un point quelconque d'un cercle fixe concentrique à une ellipse, on construit les podaires (sous l'angle θ*) des développées obliques (sous l'angle* θ*), toutes ces podaires ont une aire constante égale à*

$$U = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}(a^2 + b^2 + R^2 - 2ab\cos^2\omega),$$

R *étant le rayon du cercle fixe.*

Cette propriété, qui est déjà connue lorsque la podaire est droite et la développée est droite (c'est-à-dire lorsque $\theta = 90^\circ$ et $\omega = 90^\circ$), est donc tout à fait généralisée.

La formule (8) donne donc l'aire commune aux courbes lieux des quatre points P, P', P_1, P'_1.

Mais les droites OP_1 et OP'_1 rencontrent la droite MPP' en Q et Q' : les droites OP et OP' rencontrent la droite $MP_1P'_1$ en Q_1 et Q'_1. Or la droite OQ rencontre PP' sous l'angle $(\theta + 2\omega)$. De même, la droite OQ'_1 rencontre $P_1P'_1$ sous le même angle $(\theta + 2\omega)$. De même, les droites OQ_1 et OQ' sont aussi *anti-parallèles* par rapport aux droites PP' et $P_1P'_1$, et coupent, l'une $P_1P'_1$, l'autre PP', sous l'angle $(\theta - 2\omega)$.

Il en résulte donc immédiatement que les courbes lieux des points Q et Q'_1, en substituant dans la formule (8) $\theta + 2\omega$ à θ, ont pour aire commune

$$(9)\qquad V = \frac{\pi}{2\sin^2(\theta + 2\omega)}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2ab\cos^2\omega).$$

De même les courbes lieux des points Q' et Q_1 ont pour aire

$$(10)\qquad W = \frac{\pi}{2\sin^2(\theta - 2\omega)}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2ab\cos^2\omega).$$

On a aussi la relation

$$(11)\qquad U\sin^2\theta = V\sin^2(\theta + 2\omega) = W\sin^2(\theta - 2\omega).$$

En résumé, sur les huit courbes lieux des points P, P', P_1, P'_1, Q, Q', Q_1, Q'_1, quatre ont pour aire (8), deux ont pour aire (9) et les deux autres ont pour aire (10).

Lorsque la podaire est droite et la développée est droite, ces huit points se confondent en un seul.

Il y a donc intérêt à envisager divers cas particuliers.

I. *Podaire oblique par rapport au point* (α, β) *de la développée oblique.* — Formules générales (8), (9), (10).

Si (α, β) est au centre de l'ellipse,

$$(12)\qquad U = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}(a^2 + b^2 - 2ab\cos^2\omega),$$

$$(13)\qquad V = \frac{\pi}{2\sin^2(\theta + 2\omega)}(a^2 + b^2 - 2ab\cos^2\omega),$$

$$(14)\qquad W = \frac{\pi}{2\sin^2(\theta - 2\omega)}(a^2 + b^2 - 2ab\cos^2\omega).$$

II. *Podaire droite par rapport au point* (α, β) *de la développée oblique :* $\theta = 90^\circ$.

$$(15)\qquad U = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2ab\cos^2\omega),$$

$$(16)\qquad V = W = \frac{\pi}{2\cos^2 2\omega}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2ab\cos^2\omega).$$

Si $\alpha = 0$, $\beta = 0$,

$$(17)\qquad U = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 - 2ab\cos^2\omega),$$

$$(18)\qquad V = W = \frac{\pi}{2\cos^2 2\omega}(a^2 + b^2 - 2ab\cos^2\omega).$$

III. *Podaire oblique par rapport au point* (α, β) *de la développée droite :* $\omega = 0$.

$$(19) \qquad U = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}[(a-b)^2 + \alpha^2 + \beta^2] = V = W.$$

Si $\alpha = 0$, $\beta = 0$,

$$(20) \qquad U = V = W = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}(a-b)^2.$$

IV. *Podaire droite par rapport au point* (α, β) *de la développée droite :* $\omega = 0$.

$$(21) \qquad U = V = W = \frac{\pi}{2}[(a-b)^2 + \alpha^2 + \beta^2].$$

Si $\alpha = 0$, $\beta = 0$,

$$(22) \qquad U = V = W = \frac{\pi}{2}(a-b)^2.$$

V. Lorsque $\omega = 90°$, la développée oblique devient l'ellipse.

Par conséquent, la *podaire oblique de l'ellipse par rapport au point* (α, β) a pour aire

$$(23) \qquad U = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2),$$

et sa podaire droite

$$(24) \qquad U = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2).$$

Lorsque le point (α, β) est le centre de l'ellipse, on trouve pour la *podaire oblique* du centre de l'ellipse

$$(25) \qquad U = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}(a^2 + b^2),$$

et pour sa podaire droite

$$(26) \qquad U = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2).$$

Voici encore quelques propriétés relatives à ces aires :

1° Si l'on considère l'aire (8) de la podaire oblique de la développée oblique sous l'angle ω et l'aire suivante de la podaire oblique de la développée oblique sous l'angle perpendiculaire au premier, $90° + \omega$,

$$(27) \qquad U_1 = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2ab\sin^2\omega),$$

on en déduit

$$(28) \qquad U_1 - U = \frac{\pi ab\cos 2\omega}{\sin^2\theta}.$$

Donc, *quel que soit le point* (α, β), *la différence des aires* $U_1 - U$ *est constante.*

Lorsque la podaire et la développée sont droites,

$$(29) \qquad U_1 - U = \pi ab,$$

et, quel que soit (α, β), la différence $U_1 - U$ est égale à l'aire de l'ellipse.

2° La formule générale (8) de l'aire peut encore s'écrire de la manière suivante :

$$\sin^2\theta \times U = \left[\frac{\pi}{2}(a - b)^2 + \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right]\cos^2\omega + \left[\frac{\pi}{2}(a^2 + b^2) + \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right]\sin^2\omega.$$

Or, si nous désignons par P_E la podaire du centre de l'ellipse, par P_D la podaire du centre de sa développée et par Σ la demi-aire du cercle ayant pour rayon la distance de O au centre de l'ellipse, cette expression devient

$$(30) \qquad U = \frac{1}{\sin^2\theta}(P_E\sin^2\omega + P_D\cos^2\omega + \Sigma),$$

car

$$P_E = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2), \qquad P_D = \frac{\pi}{2}(a - b)^2, \qquad \Sigma = \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2).$$

3° On trouve pour l'équation de la podaire droite de la développée oblique, par rapport au centre de l'ellipse,

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2)^2\,[\quad (b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega)x^2 \\ &\qquad\qquad + (b^2\sin^2\omega + a^2\cos^2\omega)y^2 \\ &\qquad\qquad\qquad - 2c^2xy\sin\omega\cos\omega\,] \\ &\quad = [(a^2x^2+b^2y^2)\sin\omega - c^2xy\cos\omega]^2. \end{aligned}\right.$$

Cette courbe est en général une sextique et a pour aire l'expression (17).

Lorsque $\omega = 0$, on retrouve l'équation connue de la podaire du centre de la développée

$$(32)\qquad (b^2x^2+a^2y^2)(x^2+y^2)^2 = c^4x^2y^2.$$

Pour $\omega = 90^\circ$, on a la podaire du centre de l'ellipse, c'est-à-dire la quartique

$$(33)\qquad (x^2+y^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2.$$

4° *Aire d'une développée oblique de l'ellipse.* — Considérons la développée oblique qui est l'enveloppe de la droite (1). Si l'on prend la dérivée de l'équation (1) par rapport à φ et si l'on résout ces deux équations par rapport à x et y, on trouve pour les coordonnées d'un point de la développée oblique

$$\begin{aligned} x &= \sin\omega(b\cos\omega\sin\varphi + a\sin\omega\cos\varphi) \\ &\quad + \frac{c^2}{ab}\cos\omega(b\cos\omega\cos^3\varphi + a\sin\omega\sin^3\varphi), \\ y &= \sin\omega(b\sin\omega\sin\varphi - a\cos\omega\cos\varphi) \\ &\quad + \frac{c^2}{ab}\cos\omega(b\sin\omega\cos^3\varphi - a\cos\omega\sin^3\varphi). \end{aligned}$$

Ce point qui est le *centre de courbure oblique* s'obtient d'ailleurs par une propriété connue, en projetant le centre de courbure en M relatif à la normale droite, sur la normale oblique. De sorte que si R' est le rayon de courbure oblique et R le rayon de courbure droit, on a

$$R' = R \cos \omega.$$

L'aire A s'obtient au moyen de la formule

$$dA = \frac{1}{2}\left(y\frac{dx}{d\varphi} - x\frac{dy}{d\varphi}\right).$$

On trouve, par un calcul facile, en intégrant de $\varphi = 0$ à $\varphi = 2\pi$:

$$(34)\qquad A = \pi ab \sin^2 \omega - \frac{3\pi c^4}{8ab} \cos^2 \omega.$$

Telle est l'aire de la développée oblique. On voit que la développée oblique, enveloppe de la normale (2), a même aire (34). Si l'on pose

$$E = \pi ab, \qquad D = \frac{3\pi c^4}{8ab},$$

E et D étant les aires de l'ellipse et de sa développée, l'aire de la développée oblique sous l'angle ω prend la forme remarquable suivante :

$$(35)\qquad A = E \sin^2 \omega - D \cos^2 \omega.$$

Cette formule est à rapprocher de celle qui donne l'aire de la podaire droite du centre de la développée oblique

$$(36)\qquad U = P_E \sin^2 \omega + P_D \cos^2 \omega.$$