Nouvelles annales de mathématiques

E. Iaggi

Sur les substitutions à une variable et les fonctions qu'elles laissent invariables

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 450-465

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__450_1>

[D5d]

SUR LES SUBSTITUTIONS A UNE VARIABLE ET LES FONCTIONS QU'ELLES LAISSENT INVARIABLES;

Par M. E. IAGGI.

1. Nous avons vu, dans une Note précédente [1], que toutes les fonctions complètes [2] uniformes, c'est-à-dire les fonctions uniformes qui n'ont pas de points critiques, ont des substitutions qui les laissent invariables et que certaines fonctions multiformes ont également des substitutions de ce genre. Pour abréger le langage, nous avons désigné par *substitution* la fonction $s(x)$ elle-même que l'on substitue à x, et par *période* [3], toute quantité, variable ou constante, déterminée par l'égalité

$$p(x) = s(x) - x$$

et qui est telle que, ajoutée à x, la fonction demeure invariable; cette fonction est alors appelée une fonction *périodique* [4].

[1] *Sur les notions de fonction complète et de fonction périodique* (*Nouvelles Annales*, avril 1901, p. 146).

[2], [3], [4] *Voir* la Note indiquée, au sujet de ces expressions.

Nous nous proposons, dans cette Note, d'étudier les principales propriétés communes à tous les groupes de substitutions des fonctions *périodiques*. Les groupes que nous étudions sont composés des fonctions $s_i(x)$, qui satisfont par hypothèse à une équation de la forme

$$F(s) = F(x), \tag{1}$$

où $F(x)$ est la fonction périodique. Cette équation sera donc le point de départ de notre théorie. $F(x)$ étant une fonction complète quelconque, nous devons d'abord discuter la possibilité de déterminer des fonctions $s(x)$ par cette équation ; il est nécessaire, pour cet objet, de distinguer deux cas : le cas des fonctions *complètes uniformes* et le cas des fonctions *complètes multiformes*. Toutefois, on peut dès maintenant faire cette remarque générale que l'équation (1) ne change pas lorsqu'on y permute s et x et, par conséquent, que si un groupe contient une substitution $s_i(x)$, ce groupe contient aussi les substitutions obtenues par inversion de $s_i(x)$; si $s_i(x)$ est l'inverse d'une fonction uniforme complète, par exemple est une substitution linéaire, il n'y a qu'une substitution inverse; si $s_i(x)$ n'est pas dans ce cas, la fonction complète $\sigma(x)$, inverse de $s_i(x)$, a plusieurs valeurs ou, si l'on veut, se décompose en plusieurs fonctions partielles [1]

$$\sigma_{i,1}(x), \quad \sigma_{i,2}(x), \quad \sigma_{i,3}(x), \quad \ldots,$$

qui, toutes, font partie du groupe, puisque la fonction complète $\sigma(x)$ est une solution de (1) : mais l'une de ces fonctions, $\sigma_{i,j}(x)$, est telle que

$$\sigma_{i,j}[s_i(x)] = x,$$

---

[1] *Voir* la Note indiquée, au sujet de cette expression

on ne peut désigner d'une manière particulière, même dans un exemple, celle des fonctions partielles $\sigma_{i,j}$ qui satisfait à l'égalité précédente : ainsi en supposant que

$$s_i(x) = e^x,$$

la fonction complète inverse, $\mathrm{L}x$, a une infinité de valeurs, c'est-à-dire se décompose en une infinité de fonctions partielles (en dehors du point multiple zéro) qui diffèrent entre elles d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, en sorte que

$$\mathrm{L}e^x = x + 2m\pi\sqrt{-1} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

et si l'on désigne par

$$\sigma_{1,i}, \quad \sigma_{i,2}, \quad \ldots,$$

ces différentes fonctions partielles dont l'ensemble est la fonction complète multiforme

$$\sigma_i(x) = \mathrm{L}x,$$

il est impossible de connaître à l'avance celle de ces fonctions qui est telle que

$$\sigma_{i,j}[s_i(x)] = x.$$

Mais, dans tous les cas, il y en *existe une* qui satisfait à cette égalité : nous l'appellerons la *substitution inverse* de $s_i(x)$.

2. Supposons d'abord que la fonction $F(x)$ soit une fonction complète uniforme. Si cette fonction est une fonction linéaire, il est évident que l'équation (1) n'a pas d'autre solution que $s = x$. Nous avons vu (1) que, dans tous les autres cas où $F(x)$ est une fonction complète uniforme, il existait des fonctions $s_i(x)$, distinctes en

(1) *Loc. cit.*

dehors de certains points appelés *points multiples* qui laissaient $F(x)$ invariable; nous allons démontrer cette proposition au moyen de l'équation, et préciser la nature des points multiples du groupe.

Toute racine multiple s de l'équation (1) satisfait à l'équation obtenue en dérivant (1) par rapport à s

$$\frac{dF(s)}{ds} = 0. \tag{2}$$

On aurait donc la condition nécessaire et suffisante pour que (1) ait une racine double en éliminant s entre (1) et (2); la condition obtenue serait une équation déterminant certaines valeurs de $F(x)$ et par conséquent de x; il s'ensuit que, *en dehors de certains points particuliers x, les racines $s(x)$ de l'équation* (1) *sont des racines simples :* si $F(x)$ est une fonction rationnelle de degré n, l'équation (1) a *n racines simples s*, sauf en certains points x, où quelques-unes de ces racines deviennent égales; en dehors de ces points x, *une seule racine* s est égale à x, et par conséquent *toute fonction rationnelle de degré n, a $n-1$ substitutions, et par suite $n-1$ périodes, sauf en certains points* x, où quelques-unes au moins de ces substitutions deviennent égales entre elles, ou identiques à x.

De même toute fonction complète uniforme transcendante *a une infinité de substitutions qui la laissent invariable,* et par suite une infinité de périodes; toutes ces substitutions sont distinctes, sauf en certains points particuliers x, où quelques-unes au moins deviennent égales entre elles, ou identiques à x.

Désignant par α l'un de ces points x particuliers, c'est-à-dire l'un des *points multiples du groupe,* nous avons

$$\frac{dF[s_i(\alpha)]}{ds_i(\alpha)} = 0,$$

où s_i est l'une des substitutions qui s'égalent en ce point α. Ce qui précède montre que, x étant racine de l'équation (1), il y a deux cas à considérer :

1° $s_i(\alpha) = \alpha$; alors

$$\frac{d\mathrm{F}(\alpha)}{d\alpha} = 0,$$

et l'équation (1) a une racine au moins double qui est $x = \alpha = s_i(\alpha)$;

2° $s_i(\alpha) = \beta \neq \alpha$; alors

$$\frac{d\mathrm{F}(\beta)}{d\beta} = 0.$$

et l'équation (1) a une racine au moins double qui est $\beta = s_i(\alpha) = s_j(\alpha)$.

Or, si $\sigma_i(x)$ est la substitution inverse de $s_i(x)$, on a

$$\alpha = \sigma_i(\beta).$$

Donc, *tout point multiple α est un certain zéro de la dérivée de la fonction périodique, ou un transformé de ce zéro par des substitutions qui y deviennent égales* (car les σ_i s'égalent en même temps que les s_i). Tous les zéros de la dérivée ne sont pas des points multiples; on peut le voir de deux manières :

Supposons construite la courbe $y = \mathrm{F}(x)$ en coordonnées rectangulaires x et y, dans l'hypothèse où aux valeurs réelles de x correspond une suite *proprement continue* de valeurs réelles de y, et coupons cette courbe par une parallèle à l'axe des abscisses : si x est l'abscisse de l'un quelconque des points d'intersection, les abscisses des autres points sont données par les substitutions du groupe

$$s_1(x),\quad s_2(x),\quad \ldots,\quad s_i(x),\quad \ldots.$$

Si la parallèle varie, x varie ainsi que les substitutions; lorsque la parallèle devient tangente en un point ordinaire de la courbe, deux des points d'intersection viennent se confondre, et si (x, y) est l'un de ces deux points, l'autre est $[s_i(x), y]$, en sorte qu'au point de contact d'abscisse α, qui est un maximum ou un minimum de y ou, si l'on veut, un *sommet* de la courbe, on a

$$\alpha = s_i(\alpha)$$

et

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{d\,\mathrm{F}(\alpha)}{d\alpha} = 0,$$

l'abscisse d'un sommet de la courbe est donc un point multiple du groupe.

En tous les points où la dérivée de $\mathrm{F}(x)$ est nulle, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, mais tous ces points ne sont pas des sommets où deux points (x, y), $[s_i(x), y]$ viennent se confondre : les points d'inflexion à tangente horizontale font exception, et ces points, où cependant $\mathrm{F}'(x)$ est nulle, ne fournissent pas de point multiple du groupe.

Supposons maintenant que les deux points d'intersection qui viennent se confondre en un sommet aient pour abscisses

$$s_i(x), \quad s_j(x);$$

on aura, au sommet considéré, d'abscisse β,

$$s_i(\alpha) = s_j(\alpha) = \beta, \qquad \frac{d\,\mathrm{F}(\beta)}{d\beta} = 0.$$

Quant au point d'abscisse α, c'est un point de la courbe, sur la parallèle, où la tangente peut être quelconque, et, par conséquent, en général,

$$\frac{d\,\mathrm{F}(\alpha)}{d\alpha} \neq 0.$$

En résumé, *tous les points d'intersection avec la courbe, d'une tangente en un sommet de la courbe,* *fournissent des points multiples du groupe : le sommet considéré fournit un point multiple où l'équation* (1) *a pour racines au moins deux substitutions identiques à la variable; les autres points sont les transformés de celui-là par les substitutions du groupe.*

Pour plus de simplicité, nous n'avons considéré dans ce qui précède que des valeurs réelles de x et de y; mais il est évident que le raisonnement et les conclusions restent les mêmes dans le cas des variables imaginaires en employant les mêmes expressions de *sommets,* de *maxima* ou de *minima* dans le sens habituel pour le cas des imaginaires.

Par l'analyse, on voit également quelle est la nature des points multiples : l'équation (1) donne

$$\frac{d\,\mathrm{F}(s_i)}{ds_i}\,ds = \frac{d\,\mathrm{F}(x)}{dx}\,dx$$

et par conséquent, pour un point multiple x,

$$\frac{d\,\mathrm{F}(x)}{dx}\,\frac{dx}{ds_i} = 0, \tag{3}$$

d'où l'on conclut deux sortes de points multiples :

1° Les points α tels que

$$\frac{d\,\mathrm{F}(\alpha)}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{ds_i}{d\alpha} \neq 0,$$

c'est-à-dire les zéros de la dérivée de F, qui sont tels qu'il existe au moins une substitution $s_i(x)$ du groupe dont la dérivée ne soit pas nulle en ces points, et alors ces substitutions $s_i(x)$ deviennent identiques à x en ces points; l'étude précédente fait voir que les zéros de la dérivée, qui ne sont pas des points multiples, sont des inflexions : on voit qu'en ces points *toutes les substitutions du groupe ont leurs dérivées premières nulles,* car, si l'une d'elles $s_i(x)$ n'avait pas sa dérivée nulle, le point serait un sommet et l'on aurait en ce point $s_i(x) = x$;

2° Les points α tels que l'on ait, pour quelques substitutions s_i du groupe,

$$\frac{d s_i(\alpha)}{d\alpha} = \infty, \qquad \frac{1}{\frac{d\,F(\alpha)}{d\alpha}} \neq 0.$$

Ces points sont, d'après l'étude précédente, les transformés de ceux de la première catégorie par des substitutions du groupe.

Exceptionnellement, il pourra exister des points multiples où l'un des deux facteurs de l'équation (3) étant nul, l'autre sera infini pour quelques substitutions du groupe, et où cependant le produit aura une limite nulle; mais ces points seront des *points multiples singuliers*. Nous n'insisterons pas davantage sur cette discussion des points multiples, mais on peut remarquer combien cette étude des substitutions et de leurs points multiples serait susceptible d'éclairer les propriétés des fonctions.

3. L'étude précédente montre que l'équation (1), où $F(x)$ est une fonction complète uniforme, est toujours possible, c'est-à-dire que *toute fonction complète uniforme, autre qu'une fonction linéaire, admet des substitutions qui la laissent invariable* [1].

[1] L'étude des substitutions des fonctions rationnelles, en particulier des polynomes, peut fournir aux élèves des Lycées d'excellents exercices, tels que : discussion de la réalité des substitutions, des points multiples, étude de la courbe $y = F(x)$ au moyen des substitutions, expression des substitutions dans les cas où $F(x)$ est de degré 2, 3, 4 ou 5. L'équation

$$\frac{F(s) - F(x)}{s - x} = 0$$

est de degré 4 lorsque $F(x)$ est de degré 5.

Considérons maintenant une fonction complète multiforme $F(x)$; cette fonction *complète* a plusieurs valeurs que nous avons appelées les *fonctions partielles* ([1]) *uniformes* dont l'ensemble forme la fonction complète $F(x)$; ces fonctions partielles, que nous désignerons par

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad f_3(x), \quad \ldots, \quad f_i(x), \quad \ldots,$$

se permutent entre elles lorsque x décrit un contour fermé autour d'un de leurs points critiques, de sorte que leur *ensemble*, qui est la fonction complète $F(x)$, reprend la même détermination ([2]); d'ailleurs, lorsque x est en un de ces points critiques, plusieurs des fonctions partielles f s'égalent ([3]).

Supposons qu'il existe une substitution $s(x)$ telle que l'ensemble des valeurs de $F(x)$ demeure invariable pour cette substitution. Deux cas sont à considérer : ou bien

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} f_1(s)=f_1(x), \\ f_2(s)=f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_i(s)=f_i(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

ou bien

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} f_1(s)=f_{p1}(x), \\ f_2(s)=f_{p2}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_i(s)=f_{pi}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où les fonctions $f_{pi}(x)$ ne sont autres que les fonc-

([1]) *Loc. cit.*

([2]), ([3]) Pour cette raison, nous avons appelé *points multiples* de la fonction complète $F(x)$, les points critiques des fonctions partielles $f_i(x)$ (*loc. cit.*).

tions $f_i(x)$ placées dans un autre ordre que précédemment.

Dans le premier cas, les fonctions partielles demeurent elles-mêmes invariables pour la substitution donnée; elles admettent toutes la substitution $s(x)$; elles sont elles-mêmes *périodiques* et ont au moins une substitution commune.

Dans le second cas, les fonctions partielles ne demeurent pas toutes invariables : quelques-unes au moins *sont permutées* par la substitution $s(x)$.

Dans les deux cas, on peut résumer les égalités précédentes dans l'égalité

$$F(s) = F(x),$$

qui sera le symbole de l'ensemble des égalités relatives à l'un ou l'autre cas, comme $F(x)$ est le symbole de l'ensemble des fonctions partielles $f(x)$.

Dans les deux cas, *la fonction complète* $F(x)$, *qui reste invariable pour la substitution considérée, sera dite* fonction périodique *de* x.

Contrairement au cas des fonctions complètes uniformes, une fonction complète multiforme quelconque n'est pas généralement périodique; il est évident, en effet, que les équations (4) ou les équations (5) ne peuvent être satisfaites simultanément par la même substitution $s(x)$ sans que les fonctions $f(x)$ satisfassent à certaines conditions spéciales. Mais certaines fonctions complètes multiformes sont périodiques; nous avons vu, d'ailleurs ([1]), qu'on pouvait facilement en former au moyen d'une fonction complète uniforme $\varphi(x)$ et d'une fonction complète multiforme $\Phi(x)$: La fonction com-

---

([1]) *Loc. cit.*

plète multiforme

$$F(x) = \Phi[\varphi(x)]$$

admet toutes les substitutions de $\varphi(x)$ et satisfait à des équations de la forme (4).

Considérons donc une fonction complète multiforme périodique $F(x)$, c'est-à-dire telle qu'il existe des substitutions $s_i(x)$ satisfaisant à l'équation

$$F(s) = F(x), \tag{6}$$

symbole de l'ensemble (4) ou de l'ensemble (5). Les raisonnements que nous avons faits à propos des racines s de cette équation, lorsque $F(x)$ est uniforme, peuvent être intégralement répétés à propos des équations (4) ou (5); nous pouvons donc dire :

Toutes les racines s de l'équation (6) *sont des racines simples, sauf en des points x particuliers qui sont les points multiples du groupe.* Certains de ces points rendent plusieurs racines s identiques à x. Les zéros des fonctions

$$\frac{df_1}{dx}, \quad \frac{df_2}{dx}, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire les zéros de la fonction complète

$$\frac{d\,F(x)}{dx},$$

sont généralement tous des points multiples de cette catégorie.

Mais, ici, on y doit ajouter les *points critiques des fonctions partielles,* lorsque les substitutions *permutent* les fonctions partielles qui deviennent égales, points qui sont aussi des points multiples où plusieurs racines s deviennent identiques à x.

Les autres points multiples sont les transformés de ces deux sortes de points; les points de cette seconde catégorie sont tels qu'au moins deux substitutions y sont égales, mais non identiques à x [1].

4. Considérons un point multiple α d'un groupe qui soit tel que l'une des substitutions $s_i(x)$ du groupe devienne, en ce point, identique à α :

$$s_i(\alpha) = \alpha.$$

La période qui correspond à $s_i(x)$ est

$$p_i(x) = s_i(x) - x,$$

et l'on a, au point α,

$$p_i(\alpha) = s_i(\alpha) - \alpha = 0.$$

Ceci montre que tous les points multiples de la première catégorie sont les zéros des périodes.

Donnons à x une valeur infiniment voisine de α. Dans l'hypothèse où $s_i(x)$ est une fonction continue, $p_i(x)$, qui est alors aussi continue, sera infiniment petite et, par conséquent, $s_i(x)$ sera infiniment voisin de α et, par suite, de x : ainsi, dans le domaine d'un point multiple α où viennent se confondre des substitutions $s_i(x)$, $s_j(x)$, ..., les points transformés $s_i(x)$, $s_j(x)$, ... sont infiniment voisins du point x voisin de α. Si l'on considère un point multiple où des substitutions deviennent égales sans être identiques à x, on voit de même que ces substitutions sont infiniment voisines, pour une valeur de x infiniment voisine du point multiple considéré.

---

(1) Dans le cas des fonctions complètes uniformes comme dans le cas des fonctions périodiques multiformes, les points multiples de la deuxième catégorie peuvent ne pas exister : c'est lorsque tous les transformés des points de la première catégorie sont eux-mêmes de la première catégorie. Les fonctions $\sin x$, $\operatorname{sn} x$, fournissent des exemples de ce cas. Les polynomes fournissent un exemple du cas général.

Dans tout groupe il existe au moins des points multiples à distance finie de la première catégorie, sauf dans le groupe de la fonction exponentielle, qui n'a que des périodes constantes et, par conséquent, n'a pas de point multiple à distance finie; donc, tout groupe, sauf ce cas d'exception, *a des périodes infinitésimales dans le domaine de points α à distance finie*. C'est ce qui nous a permis, dans une Note précédente ([1]), où nous avions déjà sans calcul démontré ce fait, de ne pas établir de distinction entre les différents groupes *discontinus* qui contiennent, ou non, des périodes infinitésimales dans le domaine de certains points; mais nous avons vu que certaines fonctions périodiques ont des groupes qui sont *continus*, c'est-à-dire contiennent, *quel que soit x, des périodes infinitésimales*. L'analyse permet de préciser alors la nature des fonctions qui précèdent de tels groupes.

Considérons d'abord une fonction complète uniforme $F(x)$, et soit $p(x)$ une de ses périodes. $p(x)$ ne peut, quel que soit x, être infinitésimale, car on a

$$(7) \qquad F[x+p(x)] = p(x)\frac{d\,F[x-\theta p(x)]}{dx} \qquad (|\theta|<1).$$

$F[x+p(x)]$ et, par suite, $F(x)$ seraient alors infinitésimales quel que soit x, sauf peut-être dans le voisinage des pôles de la dérivée, et ceci est impossible. *Donc le groupe de toute fonction complète uniforme est un groupe discontinu*, c'est-à-dire que, sauf dans le domaine des points multiples, aucune période n'est infinitésimale.

Considérons maintenant une fonction complète multiforme $F(x)$ qui se décompose, en dehors de ses multiplicités, en fonctions partielles $f_1(x)$, $f_2(x)$, ...,

([1]) *Loc. cit.*

et supposons que cette fonction soit périodique, c'est-à-dire, soit qu'il existe des substitutions qui laissent invariables les fonctions partielles f elles-mêmes, soit qu'il existe des substitutions qui permutent entre elles ces fonctions partielles ou qui, laissant invariables quelques-unes des fonctions partielles, permutent les autres. Dans le premier cas, les substitutions ne peuvent donner lieu à des périodes infinitésimales, quel que soit x, car ce que nous avons dit sur l'équation (7) peut être répété sur une équation de la forme

$$f_i[x+p(x)] = p(x)\frac{d f_i[x+\theta p(x)]}{dx},$$

et alors le groupe est nécessairement discontinu. Dans le second cas, il est nécessaire de faire différentes hypothèses sur la fonction multiforme $F(x)$:

1° *La fonction* $F(x)$ *est une fonction ponctale* (¹), c'est-à-dire que, parmi les fonctions partielles $f(x)$ qui composent la fonction complète $F(x)$, il n'en est pas deux qui diffèrent infiniment peu quel que soit x. Alors les équations (5) de la forme

$$f_i[x+p(x)] = f_{pi}(x) \qquad (p_i \neq i)$$

ne peuvent être satisfaites par une période $p(x)$ qui serait infinitésimale quel que soit x, car si cela était, au moins deux fonctions partielles f_i, f_{pi} différeraient infiniment, peu quel que soit x.

En remarquant qu'une fonction complète uniforme est aussi une fonction ponctale, nous pouvons donc dire :

Toute fonction périodique ponctale a pour groupe de substitutions un groupe discontinu.

(¹) Pour plus amples détails sur ces expressions, *voir* la Note citée.

2° *La fonction* $F(x)$ *est une fonction improprement linéale ou improprement aréale* (¹), c'est-à-dire que les points qui représentent les fonctions partielles f sont des points infiniment voisins les uns des autres, sur une ligne ou dans une aire. On peut alors associer deux à deux les fonctions f de manière que $f_i(x)$ et $f_{pi}(x)$ soient infiniment peu différentes, et l'équation précédente ne présente plus aucune impossibilité pour l'existence de périodes qui soient infinitésimales quel que soit x.

En remarquant que, selon que la fonction est improprement linéale ou improprement aréale, le groupe peut être simplement continu ou doublement continu, nous pouvons dire :

Tout groupe continu ne peut appartenir qu'à une fonction improprement linéale si la continuité du groupe est simple, ou à une fonction improprement aréale si la continuité du groupe est double.

Ce qui précède permet de démontrer encore que :

1° *Toute fonction périodique ponctale* $F(x)$ *a pour inverse une fonction périodique ponctale,* à moins que $F(x)$ ne soit une fonction complète uniforme, auquel cas l'inverse n'est pas périodique.

2° *Toute fonction périodique improprement linéale a pour inverse une fonction périodique improprement linéale.*

3° *Toute fonction périodique improprement aréale a pour inverse une fonction périodique improprement aréale.*

Mais nous n'insistons pas davantage, et nous rappelons seulement, en terminant, que la fonction impro-

---

(¹) *Voir* la Note citée.

prement linéale

$$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^m,$$

où m est incommensurable, est, comme son inverse, une fonction périodique dont le groupe est simplement continu, et que, le groupe de substitutions d'une fonction abélienne étant continu, cette fonction est, comme son inverse, une fonction improprement linéale ou aréale.