ISSALY

Sur le degré de généralité des équations (dynamiques) de Lagrange et leur interprétation géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 548-559

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__548_1>

[R6bα]

SUR LE DEGRÉ DE GÉNÉRALITÉ DES ÉQUATIONS (DYNAMIQUES) DE LAGRANGE ET LEUR INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE;

Par M. l'abbé ISSALY.

Indiquer clairement pourquoi certaines dérivées partielles de la fonction classique T entrent comme éléments constitutifs dans les équations de Lagrange tant que des surfaces (en nombre déterminé) s'y trouvent implicitement en jeu et, au contraire, ne sont plus susceptibles d'y figurer dès que, au lieu d'elles, interviennent des pseudo-surfaces; rattacher, en second lieu, à notre travail la fonction récemment introduite dans cette même matière par M. Appell : tel est, en peu de mots, l'objet de la présente Note.

Disons tout de suite que nous limiterons nos formules au cas de quatre variables et qu'au lieu d'envisager la vitesse et l'accélération de tout un système de points, nous nous en tiendrons à celles de l'un quelconque d'entre eux, (x, y, z), ses coordonnées étant prises par rapport à un trièdre trirectangle fixe T_0. Le lecteur n'aura point de peine à étendre lui-même nos résultats au cas de n variables.

I. — Vitesses.

1. Soit, en conséquence, le système d'équations

$$(1)\qquad \begin{cases} dx = P_1\,du_1 + P_2\,du_2 + \ldots + P_4\,du_4, \\ dy = P'_1\,du_1 + P'_2\,du_2 + \ldots + P'_4\,du_4, \\ dz = P''_1\,du_1 + P''_2\,du_2 + \ldots + P''_4\,du_4, \end{cases}$$

auquel satisfont les coordonnées du point choisi. Les coefficients $P_1, P_2, \ldots, P''_4$ désignent ici des fonctions arbitraires de $u_1, u_2, \ldots, u_4$, variables que nous supposerons être, à leur tour, des fonctions quelconques du temps. D'après cela, si l'on divise par dt les deux membres de chaque équation, et que, avec $\frac{du_i}{dt} = u'_i$, on fasse

$$(2)\qquad \frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dz}{dt} = z',$$

on obtiendra le nouveau système

$$(3)\qquad \begin{cases} x' = P_1\,u'_1 + P_2\,u'_2 + \ldots + P_4\,u'_4, \\ y' = P'_1\,u'_1 + P'_2\,u'_2 + \ldots + P'_4\,u'_4, \\ z' = P''_1\,u'_1 + P''_2\,u'_2 + \ldots + P''_4\,u'_4. \end{cases}$$

On en déduit, en désignant par V la vitesse du point (x, y, z),

$$(4)\quad \begin{cases} V^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ \quad = A_1^2 u_1'^2 + A_2^2 u_2'^2 + \ldots + A_4^2 u_4'^2 \\ \qquad + 2B_{12} u_1' u_2' + 2B_{13} u_1' u_3' + \ldots + 2B_{34} u_3' u_4'; \end{cases}$$

à condition de poser

$$(5)\quad \begin{cases} P_1^2 + P_1'^2 + P_1''^2 = \Sigma P_1^2 = A_1^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_4^2 + P_4'^2 + P_4''^2 = \Sigma P_4^2 = A_4^2, \\ P_1 P_2 + P_1' P_2' + P_1'' P_2'' = \Sigma P_1 P_2 = B_{12}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_3 P_4 + P_3' P_4' + P_3'' P_4'' = \Sigma P_3 P_4 = B_{34}. \end{cases}$$

• **2.** Avant de poursuivre, donnons à ces premières relations une autre forme. Si, en remarquant que $ds_i = A_i\, du_i$, nous formons les *cosinus*

$$(6)\quad a_1 = \frac{P_1}{A_1}, \qquad b_1 = \frac{P_1'}{A_1}, \qquad c_1 = \frac{P_1''}{A_1}, \qquad a_2 = \frac{P_2}{A_2}, \qquad \ldots,$$

et cela, à l'exemple de ce que nous avons fait déjà dans notre Étude sur les pseudo-surfaces (*Nouvelles Annales*, 1901, p. 60), le système (1) pourra s'écrire

$$(1')\quad \begin{cases} dx = a_1\, ds_1 + a_2\, ds_2 + \ldots + a_4\, ds_4, \\ dy = b_1\, ds_1 + b_2\, ds_2 + \ldots + b_4\, ds_4, \\ dz = c_1\, ds_1 + c_2\, ds_2 + \ldots + c_4\, ds_4. \end{cases}$$

De son côté, le système (3) devenant, par analogie,

$$(3')\quad \begin{cases} x' = a_1 s_1' + a_2 s_2' + \ldots + a_4 s_4', \\ y' = b_1 s_1' + b_2 s_2' + \ldots + b_4 s_4', \\ z' = c_1 s_1' + c_2 s_2' + \ldots + c_4 s_4', \end{cases}$$

il en résulte que, présentement,

$$(4')\quad \begin{cases} V^2 = \dfrac{dS^2}{dt^2} = s_1'^2 + s_2'^2 + \ldots + s_4'^2 + 2 s_1' s_2' \cos(s_1, s_2) + \ldots \\ \qquad + 2 s_3' s_4' \cos(s_3, s_4). \end{cases}$$

Or sous cette forme géométrique, on voit que le vecteur V peut être envisagé (rigoureusement) comme la résultante d'une *ligne polygonale* dont les quatre côtés $s'_1, s'_2, \ldots, s'_4$ seraient respectivement portés sur les arêtes d'un *angle polyèdre* $M\mathcal{L}_1 \ldots \mathcal{L}_4$ ou $\mathcal{A}_4$, ayant ses faces invariables et son sommet M en coïncidence avec le sommet O du trièdre fixe. C'est dire que, dans tous ses mouvements, $\mathcal{A}_4$ ne pourra que pivoter autour de cette origine.

3. Sans nous arrêter aux *identités* auxquelles se réduit, en vertu des relations (6), le système (5), projetons *orthogonalement* la vitesse V successivement sur les arêtes de l'angle solide $\mathcal{A}_4$. En désignant par V_1, $V_2, \ldots, V_4$ ces projections, nous aurons d'abord cette expression générale

$$V_i = a_i x' + b_i y' + c_i z',$$

et, par suite, d'après (3) et (5),

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 V_1 = P_1 x' + P'_1 y' + P''_1 z' = A_1^2\, u'_1 + B_{12} u'_2 + B_{13} u'_3 + B_{14} u'_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_4 V_4 = P_4 x' + P'_4 y' + P''_4 z' = B_{14} u'_1 + B_{24} u'_2 + B_{34} u'_3 + A_4^2 u'_4; \end{array} \right.$$

le déterminant du système n'étant autre que

$$D_u = \begin{vmatrix} A_1^2 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{12} & A_2^2 & B_{23} & B_{24} \\ B_{13} & B_{23} & A_3^2 & B_{34} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & A_4^2 \end{vmatrix}.$$

En prenant les arcs $s_1, s_2, \ldots, s_4$ pour variables, on trouvera de même

$$(7')\quad \left\{ \begin{array}{l} V_1 = s'_1 + s'_2 \cos(s_1, s_2) + \ldots + s'_4 \cos(s_1, s_4), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V_4 = s'_1 \cos(s_1, s_4) + s'_2 \cos(s_2, s_4) + \ldots + s'_4, \end{array} \right.$$

avec un déterminant D_s dont la formation est, elle aussi, immédiate.

Ces formules établies, écrivons, conformément à l'usage,

$$(8) \qquad V^2 = \frac{dS^2}{dt^2} = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2T.$$

En différentiant successivement cette fonction T par rapport à u'_1, u'_2, ..., u'_4, considérés comme variables indépendantes, il viendra (4)

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial T}{\partial u'_1} = A_1^2\, u'_1 + B_{12} u'_2 + B_{13} u'_3 + B_{14} u'_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial T}{\partial u'_4} = B_{14} u'_1 + B_{24} u'_2 + B_{34} u'_3 + A_4^2\, u'_4, \end{array} \right.$$

ou bien (4'),

$$(9') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial T}{\partial s'_1} = s'_1 + s'_2 \cos(s_1, s_2) + \ldots + s'_4 \cos(s_1, s_4), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial T}{\partial s'_4} = s'_1 \cos(s_1, s_4) + s'_2 \cos(s_2, s_4) + \ldots + s'_4. \end{array} \right.$$

Que si nous comparons maintenant ce double résultat avec les Tableaux (7) et (7'), nous en déduirons aussitôt, pour exprimer les projections orthogonales qui nous occupent :

$$(10) \qquad A_1 V_1 = \frac{\partial T}{\partial u'_1}, \qquad A_2 V_2 = \frac{\partial T}{\partial u'_2}, \qquad \ldots, \qquad A_4 V_4 = \frac{\partial T}{\partial u'_4},$$

ou, équivalemment,

$$(10') \qquad V_1 = \frac{\partial T}{\partial s'_1}, \qquad V_2 = \frac{\partial T}{\partial s'_2}, \qquad \ldots, \qquad V_4 = \frac{\partial T}{\partial s'_4}.$$

Concluons de ces premières formules que, tant pour les surfaces que pour les pseudo-surfaces, les projections V_1, V_2, ..., V_4 de la vitesse V du point (x, y, z)

s'expriment *de la même manière* au moyen des dérivées partielles de la fonction T.

4. On nous demandera peut-être, à titre d'éclaircissement, en quoi la question présente implique des surfaces ou des pseudo-surfaces?... Le voici :

Remontons au système (1). Si l'on y suppose, par exemple, u_3 et u_4 *constants,* il se réduira à

$$(11)\qquad \begin{cases} dx = P_1\,du_1 + P_2\,du_2, \\ dy = P'_1\,du_1 + P'_2\,du_2, \\ dz = P''_1\,du_1 + P''_2\,du_2. \end{cases}$$

Or un tel système, on le sait (Étude citée), représente généralement une pseudo-surface $\mathcal{F}_{12}$, tangente en M au plan des arêtes $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ (lequel remplace ici le plan mobile des XY) et, très exceptionnellement, une surface F_{12} jouissant de la même propriété. Comme, d'autre part, avec nos quatre indices, pris deux à deux, on peut former six combinaisons, nous aurons d'abord quatre pseudo-surfaces ou surfaces *principales* correspondant aux combinaisons (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1) et respectivement tangentes en M aux faces de l'angle $\mathcal{A}_4$, puis, deux autres pseudo-surfaces ou surfaces qu'on peut appeler *secondaires,* comme tangentes aux plans *diagonaux* (1, 3) et (2, 4). Telle est notre réponse.

II. — Accélérations.

5. Soient W l'accélération du point donné et x'', y'', z'' ses composantes, par rapport aux axes fixes. Si l'on désigne par $W_1, W_2, \ldots, W_4$ les projections orthogonales de W sur les arêtes de l'angle polyèdre $\mathcal{A}_4$, on aura généralement

$$W_i = a_i x'' + b_i y'' + c_i z'',$$

et, par suite, eu égard à (6) :

$$
(12) \quad \left\{
\begin{aligned}
A_1 W_1 &= P_1 x'' + P'_1 y'' + P''_1 z'',\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
A_4 W_4 &= P_4 x'' + P'_4 y'' + P''_4 z'',
\end{aligned}
\right.
$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$
(12') \quad \left\{
\begin{aligned}
A_1 W_1 &= \frac{d}{dt}(P_1 x' + P'_1 y' + P''_1 z') - \left(x' \frac{dP_1}{dt} + y' \frac{dP'_1}{dt} + z' \frac{dP''_1}{dt}\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
A_4 W_4 &= \frac{d}{dt}(P_4 x' + P'_4 y' + P''_4 z') - \left(x' \frac{dP_4}{dt} + y' \frac{dP'_4}{dt} + z' \frac{dP''_4}{dt}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Or il résulte de notre premier paragraphe que

$$
P_i x' + P'_i y' + P''_i z' = A_i V_i = \frac{\partial T}{\partial u'_i}.
$$

Le système précédent revient donc à

$$
(12'') \quad \left\{
\begin{aligned}
A_1 W_1 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u'_1}\right) - R_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
A_4 W_4 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u'_4}\right) - R_4,
\end{aligned}
\right.
$$

en désignant, pour abréger, par R_i la deuxième parenthèse.

Nous reproduisons de la sorte, sans distinction aucune de surfaces ou de pseudo-surfaces, les premiers termes des équations dynamiques de Lagrange (pour une masse $m = 1$). On va voir qu'il n'en saurait être ainsi des seconds termes, et cela même précisera le degré de généralité qu'on peut accorder aux formules prises en entier.

Considérons à cet effet la fonction R_1, entre autres. De ce que les dérivées qu'elle contient sont des dérivées totales, il s'ensuit qu'en les développant on a

$$(13)\quad \begin{cases} R_1 = x'\left(\dfrac{\partial P_1}{\partial u_1}u'_1 + \ldots + \dfrac{\partial P_1}{\partial u_4}u'_4\right) + y'\left(\dfrac{\partial P'_1}{\partial u_1}u'_1 + \ldots + \dfrac{\partial P'_1}{\partial u_4}u'_4\right) \\ \qquad\qquad + z'\left(\dfrac{\partial P''_1}{\partial u_1}u'_1 + \ldots + \dfrac{\partial P''_1}{\partial u_4}u'_4\right). \end{cases}$$

D'autre part, de la formule (8) on tire

$$\frac{\partial T}{\partial u_1} = x'\frac{\partial x'}{\partial u_1} + y'\frac{\partial y'}{\partial u_1} + z'\frac{\partial z'}{\partial u_1},$$

et, conséquemment, d'après (3),

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial u_1} = x'\left(\dfrac{\partial P_1}{\partial u_1}u'_1 + \ldots + \dfrac{\partial P_4}{\partial u_1}u'_4\right) + y'\left(\dfrac{\partial P'_1}{\partial u_1}u'_1 + \ldots + \dfrac{\partial P'_4}{\partial u_1}u'_4\right) \\ \qquad\qquad + z'\left(\dfrac{\partial P''_1}{\partial u_1}u'_1 + \ldots + \dfrac{\partial P''_4}{\partial u_1}u'_4\right). \end{cases}$$

En comparant les expressions (13) et (14), on reconnaît que leur *identification* n'est possible que si l'on a

$$\frac{\partial P_1}{\partial u_2} = \frac{\partial P_2}{\partial u_1}, \qquad \frac{\partial P_1}{\partial u_3} = \frac{\partial P_3}{\partial u_1}, \qquad \frac{\partial P_1}{\partial u_4} = \frac{\partial P_4}{\partial u_1};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

En comparant de même R_2 avec $\dfrac{\partial T}{\partial u_2}$, on obtient les deux nouveaux groupes ternaires de conditions :

$$\frac{\partial P_2}{\partial u_3} = \frac{\partial P_3}{\partial u_2}, \qquad \frac{\partial P_2}{\partial u_4} = \frac{\partial P_4}{\partial u_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

R_3 comparé à $\dfrac{\partial T}{\partial u_3}$ fournira, à son tour, le suivant

$$\frac{\partial P_2}{\partial u_4} = \frac{\partial P_4}{\partial u_3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Quant au dernier couple, R_4, $\dfrac{\partial T}{\partial u_4}$, il ne donne rien de nouveau.

En résumé, l'identification, deux à deux, des systèmes (13), (14) et de leurs similaires n'est possible que si les 6×3 ou 18 conditions d'intégrabilité qu'exigent les équations (1) sont satisfaites, c'est-à-dire si les trois coordonnées du point (x, y, z) sont des fonctions *finies* des variables $u_1, u_2, \ldots, u_4$.

Géométriquement, cela signifie que les six pseudo-surfaces, principales ou secondaires, que nous avons vues être tangentes en M respectivement aux faces de l'angle polyèdre $\mathcal{A}_4$ et à ses deux plans diagonaux, doivent se transformer en *surfaces*. Libre alors de faire usage des formules ordinaires de Lagrange, que nous reproduisons ici :

$$(15)\quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 W_1 = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial u'_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial u_1} = A_1 Q_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_4 W_4 = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial u'_4}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial u_4} = A_4 Q_4. \end{array} \right.$$

On arriverait aux mêmes conclusions en adoptant pour variables les arcs $s_1, s_2, \ldots, s_4$, vu que, dans les diverses conditions obtenues tout à l'heure,

$$P_1, \quad P'_1, \quad P''_1, \quad P_2, \quad \ldots$$

se trouveraient remplacés simplement par les cosinus qui leur correspondent, à savoir : $a_1, b_1, c_1, a_2, \ldots$.

6. C'est pour obvier à l'insuffisance que manifeste, dans le cas général, la fonction T, que M. Appell a proposé (*Comptes rendus*, 1899) de la remplacer par une autre, d'un emploi, non pas plus simple, sans doute, mais plus sûr.

Occupons-nous brièvement de cette fonction nouvelle et, pour cela, reprenons d'abord notre système (3).

Si l'on forme les dérivées totales de ses équations, on aura

$$(16)\quad \begin{cases} x'' = (P_1 u_1'' + \ldots + P_4 u_4'') + \left(\dfrac{dP_1}{dt} u_1' + \ldots + \dfrac{dP_4}{dt} u_4'\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

ou, en développant,

$$(16')\quad \begin{cases} x'' = (P_1 u_1'' + \ldots + P_4 u_4'') \\ \qquad + \left[\dfrac{\partial P_1}{\partial u_1} u_1'^2 + \left(\dfrac{\partial P_1}{\partial u_2} + \dfrac{\partial P_2}{\partial u_1}\right) u_1' u_2' + \dfrac{\partial P_2}{\partial u_2} u_2'\right] + \ldots. \end{cases}$$

Or, que l'on ait

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P_1}{\partial u_2} = \dfrac{\partial P_2}{\partial u_1}, \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial u_3} = \dfrac{\partial P_3}{\partial u_1}, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases} \qquad \text{ou bien} \qquad \begin{matrix} \dfrac{\partial P_1}{\partial u_2} \neq \dfrac{\partial P_2}{\partial u_1}, \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial u_3} \neq \dfrac{\partial P_3}{\partial u_1}, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{matrix}$$

autrement dit : que les équations (1) soient intégrables ou non; qu'il s'agisse de surfaces ou de pseudo-surfaces, on n'en a pas moins

$$(18)\quad \frac{\partial x''}{\partial u_1''} = P_1, \quad \frac{\partial y''}{\partial u_1''} = P_1', \quad \frac{\partial z''}{\partial u_1''} = P_1'', \quad \frac{\partial x''}{\partial u_2''} = P_2, \quad \ldots.$$

Cela étant, à l'instar des relations (8), faisons

$$(19)\qquad W^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 = 2J.$$

On en tire

$$\frac{\partial J}{\partial u_1''} = x'' \frac{\partial u''}{\partial u_1''} + y'' \frac{\partial y''}{\partial u_1''} + z'' \frac{\partial z''}{\partial u_1''},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Substituant à ces dérivées partielles leurs valeurs (18), il vient, d'après (12) et (15) :

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial u_1''} = P_1 x'' + P_1' y'' + P_1'' z'' = A_1 W_1 = A_1 Q_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial J}{\partial u_4''} = P_4 x'' + P_4' y'' + P_4'' z'' = A_4 W_4 = A_4 Q_4; \end{cases}$$

d'où l'on voit qu'il y aura effectivement un avantage réel à remplacer la fonction T par son analogue, la fonction J, lorsqu'on voudra établir, dans toute leur généralité, les équations du mouvement d'un système quelconque.

7. Allons plus loin : Puisque, en vertu de ce qui précède, nous nous trouvons conduit à limiter (conventionnellement) les expressions (16) des composantes x'', y'', z'' à leurs premières parenthèses, les seules qui aient été utilisées dans (20), nous pouvons par là même (conventionnellement aussi, dans ce qui suit) les prendre sous la forme correspondante (6)

$$x'' \equiv A_1 a_1 u_1'' + A_2 a_2 u_2'' + \ldots + A_4 a_4 u_4'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

laquelle entraîne

$$(21)\quad x''^2 + y''^2 + z''^2 \equiv A_1^2 u_1''^2 + A_2^2 u_2''^2 + \ldots + 2B_{34} u_3'' u_4''.$$

Mais, d'autre part, on a toujours

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} &A_i u_i'' = A_i \frac{du_i'}{dt} = \frac{ds_i'}{dt} = s_i'',\\ &B_{ij} \;= A_i A_j \cos(s_i, s_j).\end{aligned}\right.$$

Il vient donc (19)

$$(21')\quad \left\{\begin{aligned} W^2 = 2J \equiv s_1''^2 + s_2''^2 + \ldots + s_4''^2 + 2s_1'' s_2'' \cos(s_1, s_2) + \ldots\\ + 2s_3'' s_4'' \cos(s_3, s_4).\end{aligned}\right.$$

Ainsi l'introduction de la fonction J et le procédé (artificiel, au fond) qui en règle l'emploi conduisent, par analogie, à assimiler (mais ici, sans précision aucune, quant aux mesures des segments) l'accélération W à la résultante d'une nouvelle ligne polygonale dont les côtés seraient respectivement portés, à l'exemple de

s'_1, s'_2, ..., s'_4 pour la vitesse V, sur les arêtes du même angle solide $\mathcal{A}_4$.

8. Ajoutons, en dernier lieu, cette remarque : La Thermodynamique utilise, de nos jours, fréquemment, les équations de Lagrange : demain, peut-être, celle de M. Appell. Quoi qu'il en soit, la divergence que cette science nouvelle est contrainte d'avouer, entre ses conclusions théoriques et les faits, ne tiendrait-elle pas, en principe, à ce *dédoublement de termes* que les déplacements, réels ou virtuels, opérés sur des pseudo-surfaces occasionnent nécessairement, et que leurs analogues, sur les surfaces, excluent?....