NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

X. ANTOMARI,

Docteur ès Sciences, ancien élève de l'École Normale,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Carnot.

E. DUPORCQ,

Ancien élève de l'École Polytechnique,
Ingénieur des Télégraphes.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR GERONO, PROUHET, BOURGET, BRISSE ET M. ROUCHÉ.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME II.

(LXI[e] VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

[R6]

UNE PREMIÈRE LEÇON DE DYNAMIQUE [1];

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. Étudions d'abord le mouvement d'une portion de matière assez petite pour qu'on puisse la regarder, sans erreur sensible, comme réduite à un point; c'est ce que nous appellerons un *point matériel*. Cette étude ne peut être entreprise sans faire certaines hypothèses et sans admettre certains *principes*, qu'il est impossible de vérifier directement et dont seulement des conséquences plus ou moins lointaines sont réellement susceptibles d'être contrôlées par l'expérience. Sans entrer ici dans aucun détail historique, qu'il me suffise de citer Galilée, Descartes, Huyghens et Newton, comme les créateurs, à des titres divers, de la science du mouvement.

Principe de l'inertie. — Il comprend deux parties :

1° Quand un point matériel est en repos dans l'es-

[1] Cette leçon est la première leçon de Dynamique que je fais depuis 1894 à l'École Centrale dans mon cours de Mécanique générale.

pace, il reste en repos si aucune action extérieure ne s'exerce sur lui.

2° Quand un point matériel est en mouvement dans l'espace, son mouvement est rectiligne et uniforme si aucune action extérieure ne s'exerce sur lui.

Il résulte de là que, si le mouvement d'un point matériel n'est pas rectiligne et uniforme, certaines actions extérieures s'exercent sur lui, *et ceci est en quelque sorte une définition*. On donne le nom de *forces* à ces actions que l'on regarde comme produisant ou modifiant le mouvement d'un point matériel.

2. Avant de passer à un second principe, nous allons poser d'abord la notion de *champ de forces constantes*. Une portion déterminée de l'espace sera dite *un champ de forces*, si un point matériel abandonné à lui-même en un point arbitraire de ce champ ne reste pas en repos. Le champ de forces sera dit *constant*, si un point matériel abandonné en un point quelconque sans vitesse initiale et à un instant quelconque décrit toujours la même trajectoire (transportée seulement parallèlement à elle-même) et de la même manière. La pesanteur offre, dans le vide et pour un espace *assez petit*, un exemple de champ constant.

Cette notion acquise, nous posons maintenant le second principe, dans l'énoncé duquel *il ne s'agit que de champ de forces constantes*.

Si un point matériel se trouve à la fois dans plusieurs champs de forces constantes, le mouvement que prend le point à partir d'un certain instant s'obtient *en composant cinématiquement le mouvement rectiligne et uniforme dû à la vitesse initiale et les mouvements que produirait chacun des champs s'il agissait seul sur le point matériel partant du repos*.

Ainsi, supposons qu'un point matériel occupe à un moment t la position A avec une vitesse V_0 et qu'il se trouve à la fois dans deux champs de forces constantes. Soit B la position qu'occuperait au bout du temps $t + \theta$ le point matériel soumis seulement au premier champ et abandonné en A sans vitesse; soit de même B' la position correspondant au second champ dans les mêmes conditions, soit enfin B'' l'extrémité du segment obtenu en portant une longueur $V_0 \theta$ sur la direction de la vitesse V_0. On obtiendra la position véritable du mobile au temps $t + \theta$ en faisant la somme géométrique des trois vecteurs AB, AB' et AB''.

On voit que chaque champ agit, en quelque sorte, comme s'il était seul et si le point n'avait pas eu une vitesse initiale V_0; aussi le principe précédent peut-il être appelé le *principe de l'indépendance de l'effet des forces et du mouvement antérieurement acquis*. Mais dans l'application du principe, sous la forme que nous venons de lui donner, il est essentiel de se rappeler qu'il s'agit seulement de champ de *forces constantes*.

3. Supposons en particulier qu'il n'y ait qu'un seul champ. On devra composer le déplacement $V_0 \theta$ dû à la vitesse acquise avec le déplacement résultant de l'action du champ sur le point placé en A et partant du repos. Soit Γ la trajectoire du point matériel placé en A au temps t sans vitesse initiale, trajectoire qui sera parcourue suivant une certaine loi. On peut se représenter le mouvement de la manière suivante :

Imaginons que la courbe Γ se déplace d'un mouvement de translation uniforme avec la vitesse V_0, pendant que notre mobile se déplace sur la courbe suivant la loi convenable; on aura ainsi la trajectoire véritable.

Pour le cas simple qui précède, on peut imaginer facilement des vérifications expérimentales du principe. Dans un wagon animé d'un mouvement de translation uniforme, un point pesant abandonné sans vitesse relative rencontre le plancher du wagon toujours au même point, quelle que soit la vitesse du mouvement de translation. Il doit bien en être ainsi, d'après le second principe, puisque la trajectoire relative du point tombant par rapport au wagon est la trajectoire du point quand le wagon reste au repos.

4. Le second principe nous permet de trouver la nature du mouvement d'un point matériel dans un champ de forces constantes. On a vu en Cinématique que, si un point a un mouvement relatif par rapport à un système animé d'un mouvement de *translation,* l'accélération absolue du point est la somme géométrique de l'accélération relative et de l'accélération d'entraînement. Appliquons ce résultat à notre problème actuel, où le mouvement de translation de la courbe Γ est uniforme; l'accélération absolue du mobile à l'instant $t+\theta$ sera égale à son accélération relative sur la courbe Γ. Faisons, en particulier, $\theta = 0$; l'accélération absolue du point au temps t sera égale à l'accélération qu'a au départ le point matériel partant du repos et soumis au champ considéré. Elle a donc une valeur constante, et nous arrivons ainsi à ce résultat, très important, que *le mouvement d'un point matériel dans un champ de forces constantes est un mouvement dont l'accélération est constante.* On aura donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \beta, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \gamma.$$

Si le point part du repos et est placé à l'origine, on déduit de là immédiatement

$$x = \frac{\alpha t^2}{2}, \qquad y = \frac{\beta t^2}{2}, \qquad z = \frac{\gamma t^2}{2}.$$

La trajectoire sera rectiligne; en la prenant comme axe des z, on aura $\alpha = \beta = 0$; et nous avons finalement

$$z = \frac{\gamma t^2}{2}.$$

Le mouvement est uniformément accéléré et d'accélération γ. La direction de la droite, trajectoire du point, sera dite la *direction* du champ de forces.

5. Le point matériel A *restant toujours le même*, les différents champs de forces se distingueront les uns des autres par leur direction et l'accélération du mouvement. Nous prendrons, comme mesure des forces agissant sur le point *déterminé* A dans chacun de ces champs, des quantités proportionnelles aux accélérations,

$$\gamma, \quad \gamma', \quad \ldots$$

et, si l'on appelle f, f', ... ces forces, on aura *par définition*

$$\frac{f}{\gamma} = \frac{f'}{\gamma'} = \ldots$$

et elles auront, par définition, pour directions les directions de ces accélérations.

Nous pouvons facilement trouver le champ résultant de la superposition de deux champs de forces constantes. Supposons qu'un point, partant du repos, soit placé simultanément dans deux champs de forces constantes. Quel mouvement prendra-t-il? Supposons que Ox représente la direction du premier champ, et Oy la direction du second champ. Si le premier champ agissait seul, on aurait par rapport aux deux axes Ox et Oy la trajectoire

$$x = \frac{\gamma t^2}{2}, \qquad y = 0,$$

et si le second champ était seul actif

$$x = 0, \qquad y = \frac{\gamma' t^2}{2}.$$

Donc, quand les deux champs agissent simultanément, on a, d'après le second principe

$$x = \frac{\gamma t^2}{2}, \qquad y = \frac{\gamma' t^2}{2}.$$

Le mouvement est donc encore uniformément accéléré, et l'accélération est la somme géométrique des deux accélérations γ et γ', d'où se déduit de suite la règle du parallélogramme des forces.

6. La définition *dynamique* de la force dans un champ constant, que nous venons de donner en ayant égard au mouvement produit, n'est pas celle qui s'est présentée la première au point de vue historique. L'idée de force provient de la notion de l'effort que nous faisons quand nous supportons un fardeau, ou tirons sur une corde fixée par exemple à un clou. Si nous pouvions évaluer avec précision l'effort fait pour supporter différents poids, nous pourrions nous servir de cet effort pour mesurer les forces. Mais un effort est aussi une cause de déformation; appliqué à un corps solide, il en change la figure. Soit considéré un ressort parfaitement élastique, et montrons comment il va pouvoir servir à mesurer les forces au point de vue statique. Plaçons-nous dans le champ de la pesanteur à Paris, et prenons

une matière déterminée bien homogène, du platine par exemple. En suspendant au ressort, dont on a orienté l'axe moyen dans le sens de la verticale, des quantités croissantes de platine, nous avons des déformations variables; or, prenons comme unité de force l'*action statique* sur le ressort d'un volume déterminé de platine. Nous admettons tout naturellement que, pour un volume double, l'action statique sur le ressort est double et ainsi de suite. Nous avons ainsi un instrument (dynamomètre) qui se trouve gradué et avec lequel nous pouvons évaluer les actions statiques. Or reprenons notre point matériel A de tout à l'heure, et considérons un champ de forces constantes; avec le ressort, dont on place l'axe moyen dans le sens du champ, et en fixant à son extrémité le point A, nous pouvons évaluer l'action statique du champ sur le point A. Nous avons donc, pour *différents* champs, *différentes* actions statiques; d'où *une seconde définition, qui est statique, de la force agissant sur le point* A *dans chacun des champs.* Nous regardons *comme un résultat expérimental* que les nombres représentant les forces envisagées au point de vue dynamique et au point de vue statique sont proportionnels.

C'est là un résultat capital.

7. *Nous n'avons jusqu'ici considéré qu'un seul point matériel* A. Pour tout autre point matériel, on peut refaire les mêmes expériences; il s'agit de comparer les points matériels les uns aux autres. Il n'y aurait aucune difficulté si la *matière* se présentait à nous sous une forme unique; on pourrait parler, comme le faisait Newton dans la définition de la masse, de la *quantité* de matière. Mais on sait que la matière se présente à nous sous un certain nombre de formes irréductibles

les unes aux autres, au moins dans l'état actuel de la science. *Or l'expérience apprend,* ce qui va être pour nous absolument fondamental, que *dans un même champ l'accélération du mouvement produit, quel que soit le point matériel, est la même.* C'est ce qu'on exprime, pour le champ de la pesanteur, en disant que tous les corps tombent avec la même vitesse dans le vide, ce qui veut dire qu'un morceau de fer et un morceau de cuivre, par exemple, prennent dans le vide un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération est *la même.*

Ceci posé, plaçons-nous dans un champ déterminé d'ailleurs quelconque, et suspendons différents points matériels à l'extrémité de notre ressort gradué. Nous dirons que *ces points ont des masses égales,* s'ils donnent au ressort la même flexion. Il est aisé de voir que, si deux points matériels amènent la même flexion dans un certain champ, ils amèneront une même flexion, quoique différente de la première, dans tout autre champ; en effet, les flexions indiquent des forces que nous avons vues être proportionnelles aux accélérations, et, puisque les accélérations sont les mêmes dans un même champ pour tous les points matériels, si la flexion est la même pour deux points dans un certain champ, elle sera la même dans tout autre champ. De la définition de deux masses égales résulte la définition d'une masse double, triple, ... d'une autre. Une masse sera double, par exemple, d'une autre, si elle donne dans tout champ une déformation correspondant à une action statique double. Nous sommes donc ainsi conduit à attribuer aux différents points matériels M, M', ... des coefficients m, m', ... que nous appellerons les *masses* de ces points; c'est, pour le moment, un système de nombres proportionnels.

8. Il résulte de tout ce qui précède que, dans un même champ, les forces agissant sur deux masses inégales sont proportionnelles à ces masses. D'autre part, les forces agissant dans différents champs sur un même point matériel sont proportionnelles aux accélérations des mouvements produits. On en conclut que, dans deux champs d'accélérations γ et γ' et pour deux points de masses m et m', les forces F et F' sont proportionnelles aux produits $m\gamma$ et $m'\gamma'$. Nous avons donc

$$\frac{F}{F'} = \frac{m\gamma}{m'\gamma'}.$$

On peut, pour un point déterminé M', prendre

$$F' = m'\gamma';$$

on aura alors, pour tout autre point,

$$F = m\gamma,$$

c'est-à-dire que le nombre mesurant la force est égal au produit du nombre m mesurant la masse par le nombre mesurant l'accélération.

Si l'on prend en particulier le champ de la pesanteur, dans un lieu déterminé, à Paris par exemple, la force du champ sur un point de masse m peut être prise égale au poids de cette masse; on écrira donc

$$P = mg,$$

g désignant l'accélération de la pesanteur à Paris ($g = 9^{m},81$ évalué en mètres).

9. Pour avoir des évaluations numériques de forces ou de masses, il faut avoir fait choix d'un système d'unités. Un tel système peut être pris arbitrairement, pourvu que le nombre mesurant la force soit égal au

produit du nombre mesurant la masse par le nombre mesurant l'accélération. On prend généralement comme unité de temps la seconde de temps moyen. En Mécanique appliquée, le mètre est le plus souvent pris pour unité de longueur et l'unité de force est le *kilogramme-force,* c'est-à-dire le poids à Paris d'une masse étalon de platine déposée aux Archives. Dans ces conditions, il est facile de trouver ce que sera la masse *unité;* puisque

$$m = \frac{P}{g},$$

ce sera la masse d'un point matériel qui pèse à Paris $9^{kg},81$.

En Physique générale, on a préféré un autre système. L'inconvénient du système précédent est que l'unité de force (kilogramme-force) est une quantité dont la définition exige l'indication d'un lieu déterminé. La masse d'un corps, qualité physique inhérente à ce corps, se trouve alors représentée par des nombres différents suivant que le kilogramme-force se trouve rapporté à un lieu ou à un autre de la Terre.

Le système usité en Physique est le système dit C.G.S. L'unité de longueur est la longueur du centimètre. L'unité de masse est la masse du gramme, c'est-à-dire la masse de la millième partie de l'étalon de platine qui représente le kilogramme. D'après la formule

$$F = m\gamma,$$

on voit que l'on aura $F = 1$, si $m = 1$ et $\gamma = 1$. L'unité de force, c'est-à-dire la force représentée par *un,* est la force agissant sur la masse d'un gramme dans un champ dont l'accélération est égale à *un* centimètre. Cette unité de force s'appelle une *dyne.* Il est facile de trouver le rapport entre la dyne et le poids du gramme à Paris.

On a, d'après la formule fondamentale,

Poids du gramme à Paris = 981 dynes (puisque $m = 1$).

Donc la dyne vaut à peu près 1^mg à Paris.

10. Nous n'avons considéré jusqu'ici que des champs de forces constantes. Quand un point n'est pas animé d'un mouvement à accélération constante, que pouvons-nous regarder comme étant la force agissant sur lui? Soient M la position du mobile de masse m au temps t sur sa trajectoire et v sa vitesse à cet instant; soit de plus M′ sa position au temps $t + \Delta t$. Nous allons chercher quelle force constante devrait agir sur le point m placé en M au temps t avec la vitesse v pour qu'il se trouve en M′ au temps $t + \Delta t$. Rappelons-nous une des définitions de l'accélération : si l'on porte sur la tangente en M dans le sens du mouvement une longueur MM″ égale à $v\,\Delta t$, le vecteur $\dfrac{2\overline{M''M'}}{\overline{\Delta t}^2}$ a pour limite l'accélération. Or, si nous considérons une force constante agissant sur le point M partant du repos, le point décrira pendant le temps Δt un segment de droite MN dans la direction de la force, et en appelant γ l'accélération correspondant au champ constant, on aura

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\gamma.\overline{\Delta t}^2 \qquad \text{ou} \qquad \gamma = \frac{2\overline{MN}}{\overline{\Delta t}^2};$$

la force f sera égale à $m\gamma$ et la direction du champ sera celle de MN. D'autre part, d'après le second principe, on obtiendra la position du point au temps $t + \Delta t$, en transportant le segment MN parallèlement à lui-même de manière que M vienne en M″; on en conclut de suite que MN est égal et parallèle à M″M′. Si nous considérons maintenant le mouvement réel du point comme la limite d'une succession de mouvements *discontinus* analogues à celui que nous venons d'envisager pendant le temps très petit Δt, nous serons tout naturellement conduit à regarder comme représentant la force au temps t la limite de la force f. En désignant donc par (Γ) l'accélération de M au temps t, et en désignant par (F) la force, *on aura l'égalité géométrique fondamentale*

$$(F) = (m\Gamma).$$

Le vecteur qui représente la force ne diffère donc du vecteur qui représente l'accélération que par le facteur positif m. En désignant par X, Y, Z les composantes de la force, on aura, d'après l'égalité précédente

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

11. Il peut sembler au premier abord que les égalités précédentes *définissent* tout simplement X, Y, Z, et l'on peut se demander quel intérêt elles présentent. Elles ne seront, en effet, utiles pour renseigner sur le mouvement du point m et permettre de prédire ce mouvement, que si l'on connaît *autrement que par ces égalités mêmes*, X, Y, Z. Indiquons immédiatement quelques exemples simples pour fixer les idées sur ce point capital.

Voici d'abord un premier cas où l'identité, par nous admise, entre les points de vue statique et dynamique, montre l'importance des formules précédentes. Supposons que nous ayons affaire à un champ de force où la force puisse être mesurée statiquement à un instant quelconque et se trouve être seulement une fonction des coordonnées (x, y, z) du point m. Nous pourrons alors dans (1) regarder X, Y, Z comme des fonctions *connues* de x, y, z, et l'intégration du système (1), pour une position initiale donnée et une vitesse initiale donnée, nous donnera le mouvement du point correspondant à ces données initiales. Ainsi, pour prendre un exemple très simple, soit un point placé à l'extrémité d'un ressort. Le point se trouve à l'origine sur l'axe Ox, quand le ressort est à l'état naturel. On tend le ressort; l'expérience montre que la force à appliquer au point pour le maintenir en équilibre est proportionnelle au déplacement, c'est-à-dire que la force exercée par le ressort sur le point est représentée par $-\mu x$ ($\mu > 0$). On a donc l'équation différentielle

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$$

dont l'intégration fait connaître le mouvement du point.

En posant $\frac{\mu}{m} = k^2$, on aura l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$x = \mathrm{A}\cos kt + \mathrm{B}\sin kt,$$

A et B étant des constantes arbitraires. Supposons que le point soit abandonné au temps $t = 0$ sans vitesse initiale à la distance a de l'origine. On devra avoir

$$x = a, \qquad \frac{dx}{dt} = 0 \qquad \text{pour} \qquad t = 0,$$

ce qui détermine immédiatement les constantes A et B

$$\mathrm{A} = a, \qquad \mathrm{B} = 0,$$

et l'équation du mouvement est

$$x = a\cos kt.$$

12. Il peut arriver que X, Y, Z puissent être déterminées dans d'autres conditions en fonction de x, y et z. Supposons que l'on ait un champ dans lequel on ait observé des mouvements particuliers, et que les valeurs de X, Y, Z déduites des équations (1) puissent, pour ces mouvements particuliers, être mises sous la forme de fonctions déterminées de x, y, z. On pourra admettre qu'il en est ainsi pour tous les mouvements se produisant dans le champ, et alors l'intégration des équations (1) donnera le mouvement dans tous les cas possibles. Nous verrons bientôt que, en partant du mouvement des planètes satisfaisant aux lois de Képler, c'est-à-dire de certains mouvements particuliers, Newton a été conduit à la loi de la gravitation universelle; c'est là un exemple de la circonstance qui vient d'être indiquée d'une manière générale.

13. D'autres circonstances peuvent encore se présenter. On est conduit quelquefois à regarder dans les équations (1) les composantes X, Y, Z de la force comme fonctions non seulement de x, y, z, mais aussi de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Il est clair que, dans ce cas, ce ne seront pas des expériences *statiques* préliminaires qui pourront nous faire connaître X, Y, Z. Ce ne pourront être, comme au paragraphe précédent, que des observations *dynamiques*. Un exemple en est fourni par l'étude du mouvement d'un projectile dans l'air. Il y a une résistance de l'air sur laquelle nous ne savons rien *a priori*. Je suppose qu'un grand nombre d'expériences aient été faites; la photographie instantanée permet de savoir dans quelles conditions le point parcourt sa trajectoire. On peut donc regarder comme connues la vitesse et l'accélération à chaque instant; de là se déduisent, par

les équations (1) elles-mêmes, les valeurs de **X**, **Y**, **Z** en dehors de la pesanteur et par conséquent la résistance de l'air. On constate alors que, dans certaines conditions de grandeurs de la vitesse, cette résistance est une certaine fonction de la vitesse. Le résultat acquis dans ces expériences déterminées est regardé (entre les mêmes limites de grandeurs des vitesses) comme général, et le mouvement de tout point m peut être obtenu par l'intégration du système (1), dans lequel on a remplacé X, Y, Z par des expressions fonctions connues de la vitesse.

14. Des cas de nature différente de ceux que nous venons d'examiner se rencontrent encore dans la dynamique du point matériel. Le point peut être assujetti à certaines liaisons, à rester, par exemple, sur une surface. Par le fait de cette liaison, une certaine force se trouve agir sur le point; ce sera encore à l'expérience à faire connaître certaines propriétés de cette force de liaison, de façon que le système des trois équations (1) achève de la déterminer en même temps qu'elles permettent de déterminer le mouvement du point sur la surface.

Ces divers exemples suffisent pour donner une première idée de la véritable signification des équations (1). On la comprendra mieux encore par l'étude des divers problèmes que nous allons bientôt traiter.

15. Nous terminerons en donnant quelques définitions relatives au *travail d'une force*. L'ascension d'un poids exige un certain travail; celui-ci, économiquement, est proportionnel au produit du poids P à soulever par la hauteur H; nous prendrons donc pour expression du travail le produit PH. On prend en Mécanique appliquée, comme unité de travail, le *kilogram-*

mètre; c'est le travail correspondant à l'élévation d'un kilogramme à Paris à la hauteur d'un mètre. Si P est évalué en kilogrammes et H en mètres, le produit PH représentera des kilogrammètres. Quelles que soient les machines employées, quel que soit le genre de travail qu'elles accomplissent, ce travail peut toujours être assimilé à celui d'un poids soulevé à une certaine hauteur et peut par conséquent être évalué en kilogrammètres.

Dans le système C.G.S., l'unité de travail s'appelle l'*erg*. L'erg est le travail accompli par une dyne, le chemin parcouru étant 1^{cm}. On obtient l'expression d'un travail en ergs, en multipliant la force exprimée en dynes par le chemin parcouru exprimé en centimètres. Exprimons en ergs le kilogrammètre. Le gramme-force vaut 981 dynes; donc le kilogramme-force vaut 981 000 dynes. Par suite

$$\text{le kilogrammètre} = 981\,000 \times 100 \text{ ergs} = 98\,100\,000 \text{ ergs},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$= 9,81 \times 10^7 \text{ ergs}.$$

On voit donc que l'erg est une très petite fraction du kilogrammètre; aussi n'emploie-t-on pas en Physique, comme unité pratique de travail, l'erg qui est trop petit, mais l'erg multiplié par 10^7; cette unité pratique s'appelle *un joule*. D'après l'égalité précédente, 1 joule est égal à 1 kilogrammètre divisé par 9,81; c'est donc environ $\frac{1}{10}$ du kilogrammètre.

La notion de travail ne suffit pas, à elle seule, pour faire connaître d'une manière complète les propriétés d'une machine, car la question de *temps* n'y joue aucun rôle. On appelle *puissance mécanique* la quantité de travail pendant une seconde. L'industrie a adopté pour unité de puissance le *cheval-vapeur*. Le cheval-vapeur correspond à un travail de 75 kilogrammètres par seconde. En Physique et dans les industries électriques, l'unité pratique de puissance mécanique correspond au travail de *un* joule par seconde; on l'appelle *un watt*. Le kilowatt, qui vaut 1000 watts, est très usité. Exprimons un cheval-vapeur en kilowatts; un cheval-vapeur correspondant à 75 kilogrammètres correspond à

$$75 \times 9,81 \text{ joules};$$

il est donc égal à

$$75 \times 9,81 \text{ watts},$$

c'est-à-dire à

$$0,075 \times 9,81 \text{ kilowatts}.$$

On peut dire que le cheval-vapeur vaut à peu près $\frac{3}{4}$ de kilowatt.

[K13a]

SUR LE DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE SOLIDE;

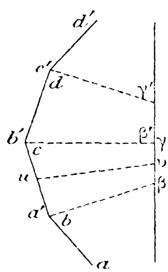
PAR M. CH. MÉRAY,
Professeur à l'Université de Dijon.

1. La propriété de tout déplacement d'une figure solide de pouvoir être réalisé par une translation et une rotation successives, dont la direction et l'axe sont parallèles quand leurs amplitudes ne sont nulles ni l'une ni l'autre, est un fait aussi simple qu'il est capital en Cinématique. En y revenant par hasard, j'ai donc été étonné de n'en trouver partout que des démonstrations émiettées sur des cas particuliers artificiellement séparés, constituant pour le plus général une progression de raisonnements détournés, laissant des vues peu

nettes, et je proposerai la méthode suivante qui me semble directe et plus intuitive.

2. Ayant d'abord rappelé l'axiome consistant en ce que *deux figures solides égales entre elles sont superposées dans toutes leurs parties dès que trois points non en ligne droite dans l'une ont été amenés à coïncider respectivement avec leurs homologues dans l'autre,* je nommerai a (*fig.* 1) la position initiale d'un

Fig. 1.



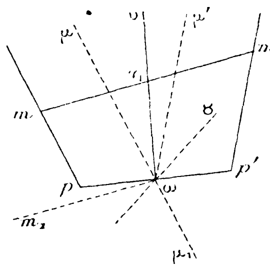
point quelconque de la figure qui s'est déplacée, a' sa position finale, b le point de la première position de la figure avec lequel se confond le point a' de sa seconde, puis, de même, b' la position finale de b, c le point de la première position avec lequel b' se confond, c' la position finale de c, enfin d et d' les positions initiale et finale du point de la figure coïncidant primitivement avec c'. Comme le déplacement de toute la figure amène sa partie $abcd$ sur $a'b'c'd'$, la ligne brisée $abcdd'$ (ou bien encore $aa'b'c'd'$) est *régulière,* en ce sens que ses côtés aa', bb', cc', dd' sont tous égaux entre eux, ainsi que leurs angles plans de sommets b (ou a'), c (ou b'), d (ou c') et aussi que les angles dièdres $\overline{abcd}$, $\overline{a'b'c'd'}$.

Il y a maintenant à distinguer les cas suivants.

3. *Les quatre points a, b, c, d ne sont pas dans un même plan*, cas auquel il en est de même pour a', b', c', d' puisque ces deux figures sont égales, excluant celui où trois consécutifs de ces cinq points seraient en ligne droite et cet autre, à plus forte raison, où deux consécutifs coïncideraient.

I. *Deux demi-droites pm, $p'm'$ (fig. 2), ayant pour*

Fig. 2.



plus courte distance le segment pp' compris entre leurs origines, forment une figure qui admet pour axe de symétrie la bissectrice $\omega\upsilon$ de l'angle $\mu\omega\mu'$ compris entre les parallèles $\omega\mu$, $\omega\mu'$ menées à pm, $p'm'$ par le milieu ω de pp'. Si, en outre, les points m, m' pris sur ces demi-droites sont tels que les angles pmm', $p'm'm$ soient égaux, ils sont symétriques par rapport à l'axe dont il s'agit; en particulier, cet axe coïncide avec $\omega\eta$, droite joignant les milieux de pp' et de mm'.

1° Le plan $\mu\omega\mu'$, parallèle aux deux droites pm, $p'm'$ à la fois, est perpendiculaire à leur plus courte distance pp'; la bissectrice $\omega\upsilon$ qui appartient à ce plan jouit donc de la même propriété, et, comme elle est axe de symétrie pour les demi-droites $\omega\mu$, $\omega\mu'$, la figure $pmp'm'$ se réapplique sur elle-même en $p'm'pm$, après une rotation d'un demi-tour exécutée autour de l'axe $\omega\upsilon$;

car p vient en p' et p' en p, parce que $\omega p = \omega p'$ et que la droite $p\omega p'$ est une perpendiculaire à l'axe, et les demi-droites pm, $p'm'$ viennent en $p'm'$, pm à cause de ceci et de ce que les parallèles $\omega\mu$, $\omega\mu'$ aux premières viennent en $\omega\mu'$, $\omega\mu$ parallèles aux dernières.

2° L'égalité des angles pmm', $p'm'm$ entraîne évidemment celles de $\mu_1\omega m_1$, $\mu'\omega m_1$, angles formés respectivement avec $\omega\mu_1$, demi-droite opposée à $\omega\mu$, et $\omega\mu'$, par ωm_1, parallèle menée par ω à l'une ou à l'autre des directions de mm'. Cette droite ωm_1 est donc située dans le plan mené perpendiculairement à celui de l'angle $\mu_1\omega\mu'$ par la bissectrice $\omega 8$ de cet angle, c'est-à-dire dans le plan mené par ω perpendiculairement à l'axe $\omega\upsilon$, puisque la bissectrice extérieure $\omega 8$ de l'angle $\mu\omega\mu'$ est perpendiculaire sur l'autre $\omega\upsilon$. La droite mm' est donc située dans quelque plan perpendiculaire aussi à l'axe $\omega\upsilon$, et les points m, m' sont symétriques puisqu'ils sont ainsi les intersections des droites symétriques pm, $p'm'$ par un plan symétrique à lui-même.

II. Maintenant (*fig.* 1), nous mènerons les bissectrices des angles abb', bcc', cdd', en remarquant que deux consécutives ne peuvent être dans un même plan à cause de l'hypothèse caractérisant le cas que nous traitons, et que les demi-angles découpés par elles dans les angles b, c, d sont tous égaux entre eux ainsi que ces derniers le sont les uns aux autres. Nous construirons ensuite les perpendiculaires communes $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ aux deux premières bissectrices et aux deux dernières, perpendiculaires dont la complète détermination de chacune assure l'égalité des quadrilatères gauches $bc\beta\gamma$, $b'c'\beta'\gamma'$, puis nous joindrons les milieux u, υ des segments bc, $\beta\gamma$.

La symétrie par rapport à uv, du quadrilatère gauche $bc\beta\gamma$, aux angles droits β, γ, aux angles égaux b, c (I) donne $c\gamma = b\beta$, puis $= b'\beta'$ à cause de l'égalité des quadrilatères $bc\beta\gamma$, $b'c'\beta'\gamma'$, et les points β', γ coïncident forcément, puisque b' et c ne sont que deux notations d'un même point. La même égalité de ces deux quadrilatères, combinée avec cette circonstance que le premier peut être réappliqué sur lui-même en $cb\gamma\beta$ à cause de sa symétrie absolue par rapport à l'axe uv (*loc. cit.*), entraîne celle des figures $b'c'\beta'\gamma'$, $cb\gamma\beta$ et par suite leur superposition complète après une demi-révolution de la première autour de $b'\beta'$ pris pour axe; car alors les trois points b', β', c', non en ligne droite dans la première, tombent en c, γ, b (les deux premiers restant en réalité immobiles) parce que l'on a $b'c' = cb$ et que la bissectrice $b'\beta'$ (notée encore $c\gamma$) est un axe de symétrie pour l'angle bcc' (2). En particulier, $\beta'\gamma'$ se superpose à $\gamma\beta$, d'où la conséquence que le segment $\beta'\gamma'$ égal à $\beta\gamma$ est aussi son simple prolongement.

Dans le déplacement de la figure considérée, la droite $\beta\gamma\beta'\gamma'$ ne fait donc que se réappliquer sur elle-même, puisque deux de ses points distincts β, γ viennent tomber en β', γ' que nous venons de voir appartenir à la même droite, et *le déplacement en question peut évidemment être réalisé par une translation de direction parallèle à cette droite et d'amplitude* $\beta\beta'$, *suivie ou précédée d'une rotation autour de cette même droite, capable d'amener le plan* $b\beta\gamma$ *en* $b'\beta'\gamma'$.

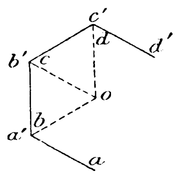
On remarquera que *tous les points de la figure se déplacent,* car le plan perpendiculaire à l'axe mené par l'un quelconque d'entre eux se transporte de la longueur $\beta\beta' \neq 0$ dans la direction de cet axe.

Si, par les moyens indiqués pour la tracer, on prolonge dans les deux sens et indéfiniment la ligne brisée gauche régulière $abcdd'$, on constatera immédiatement qu'elle est inscrite dans une hélice ayant l'axe pour âme, et que le déplacement étudié correspond à la réapplication de cette ligne hélicoïdale ... $abcd$ ... sur elle-même en ... $a'b'c'd'$.... De cette observation on conclurait facilement que les hélices sont les seules lignes gauches qui soient susceptibles de glisser indéfiniment sur elles-mêmes.

4. *Les quatre points a, b, c, d sont dans un même plan, mais non en ligne droite,* cas auquel a', b', c', d' sont sur le même plan, excluant celui où deux consécutifs de ces cinq points coïncideraient.

Nos trois bissectrices (*fig.* 3) tombent dans le même

Fig. 3.



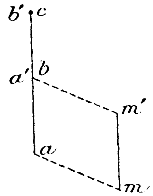
plan, et les choses restent les mêmes que ci-dessus (3, II), à cela près que β, γ, γ' se confondent en un seul point o, pied sur le même plan d'une perpendiculaire identique à la perpendiculaire commune à ces trois droites. *L'amplitude de la translation est nulle, et le déplacement peut être réalisé par une simple rotation ayant toujours pour axe cette perpendiculaire commune, avec une amplitude capable d'amener ob en ob'.*

Il est évident que, *sauf ceux de l'axe, naturellement immobiles, tous les autres points de la figure se déplacent.*

5. *Les trois points a, b, c sont en ligne droite, mais a, b ne coïncident pas, ni par suite b, c.*

Un point quelconque de la figure se déplace nécessairement alors, car la droite ab (*fig.* 4) se réapplique

Fig. 4.



sur elle-même en $a'b'$ et tout plan perpendiculaire subit évidemment une translation d'amplitude $aa' \neq 0$ dans le sens de cette même direction aa'. Soient ensuite m un point étranger à la droite ab, et m' sa position finale.

Si aa', mm' ne sont pas dans un même plan, la construction, à partir de m, d'une ligne brisée $mnpqq'$ analogue à la ligne $abcdd'$ du n° 2 montrera que cette ligne est gauche et que l'on se retrouve dans le cas discuté au n° 3, II; seulement l'axe de rotation et de glissement est noté ici par abc.

Si, au contraire, aa', mm' tombent dans un même plan, les segments am, $a'm'$ ne peuvent manquer de s'y trouver aussi, et comme le déplacement amène les trois points a, b, m non en ligne droite, en a', b', m', les segments am, am' sont égaux ainsi que les angles bam, $b'a'm'$. Il s'ensuit que le segment mm' est parallèle et égal à aa', puis que *le déplacement considéré peut être réalisé par une simple translation de mêmes direction et amplitude que ce segment aa'.*

6. *Les points a, b (ou a') coïncident.* — Nous con-

sidérerons alors un autre point m de la figure, sa position finale m', et nous ferons les distinctions suivantes :

I. *Le point m' ne coïncide pas avec m.* — En construisant la ligne brisée $mnpqq'$ comme il a été expliqué, ci-dessus (5), on verra immédiatement qu'elle est plane, car autrement (3, II) tous les points de la figure se déplaceraient, et a' ne se confondrait pas avec a (il ne serait pas difficile d'établir ce point directement); en outre, ses côtés ne peuvent se prolonger les uns les autres, car les points m, n, p, q, q', tous distincts, en ligne droite et en nombre > 2, seraient équidistants d'un même point a, ce qui est impossible. On retombe ainsi sur le cas d'une simple rotation (4); l'axe passe nécessairement par le point a (ou a'), puisque ce point se déplacerait s'il n'était pas sur l'axe (*ibid.*).

II. *Le point m' coïncide avec m.* — 1° Si un troisième point k non situé sur la droite am se déplace, on est ramené immédiatement au cas précédent (I), et cette même droite est l'axe de rotation puisque deux de ses points a, m sont immobiles.

2° *Si k ne se déplace pas non plus,* il en est de même pour la totalité de la figure considérée, puisque ses trois points a, m, k non en ligne droite demeurent immobiles (2).

7. Les considérations précédentes fourniraient tout aussi bien une solution du problème :

Trois points non en ligne droite, a, e, h, étant donnés ainsi que trois autres a', e', h' formant une figure égale, trouver la rotation et la translation dont l'exécution successive amène le triangle aeh en coïncidence avec $a'e'h'$.

Car la construction facile des droites $a'a''$, $e'e''$, $h'h''$, placées relativement au triangle $a'e'h'$ comme aa', ee', hh' le sont respectivement par rapport au triangle abc, donne les trois angles rectilignes $aa'a''$, $ee'e''$, $hh'h''$ dont la discussion conduit rapidement au but. Par exemple, si deux de ces angles sont *propres,* il y a une rotation dont l'axe est immédiatement fourni par la perpendiculaire commune à leurs bissectrices; etc. Mais je me bornerai à cette indication en laissant de côté d'autres artifices plus expéditifs dans certains cas particuliers.

UN HOMMAGE AU COLONEL MANNHEIM.

Un émouvant hommage, sans précédent à l'École Polytechnique, y a été rendu le 14 décembre dernier à M. le colonel Mannheim, récemment admis à la retraite comme professeur du Cours de Géométrie. Il s'agissait de la remise au regretté professeur d'un souvenir offert par l'École Polytechnique : la cérémonie qui a eu lieu à cette occasion, dans le grand amphithéâtre de physique, sous la présidence du Ministre de la Guerre, a été véritablement imposante et touchante; elle a été en l'honneur du très éminent géomètre une vraie manifestation à laquelle se sont associés un grand nombre de généraux, de membres de l'Institut et d'anciens élèves de l'École. Le général Debatisse, commandant l'École, a pris le premier la parole pour retracer en excellents termes la carrière militaire de M. Mannheim et rappeler les services qu'il a rendus à l'Armée par ses ingénieuses découvertes commencées alors qu'il était encore sous-lieutenant élève d'Artillerie à Metz. M. Mercadier, directeur des Études, a dit ensuite ce qu'avait été la carrière du professeur, poursuivie sans interruption pendant 42 ans. M. Rouché a apprécié les Travaux scientifiques du savant et l'a glorifié de la création de la Géométrie cinématique, merveilleux instrument dont M. Mannheim a su tirer de si élégantes méthodes. Enfin, le major des élèves a adressé au maître les adieux de ses derniers élèves.

Le Ministre s'est levé à son tour. Sa vibrante allocution a été accueillie par des applaudissements répétés, quand il a dit : « On a parlé du grand mérite de celui que je m'honore d'avoir compté au nombre de mes maîtres, il ne faut pas oublier non plus jusqu'à quel point il a été homme de cœur. » Les bravos ont couvert la voix du général André.

Le colonel Mannheim, très ému, a enfin remercié les souscripteurs du témoignage bienveillant qui lui était apporté. Il a terminé par quelques conseils d'une haute élévation : « C'est la dernière fois, a-t-il dit mélancoliquement, que je parle dans cette enceinte : j'en profite pour adjurer les élèves de continuer à travailler pour le bon renom de notre grande École, pour cette institution dont la prospérité contribue directement à la gloire de la Patrie. »

L'amphithéâtre n'a jamais dû retentir d'applaudissements plus enthousiastes. Tous les anciens élèves de l'École s'y associeront de grand cœur, car le colonel Mannheim, si sympathique à tous, est de ceux qu'on n'a pu approcher sans les aimer; son dévouement à tout ce qui touche à l'École Polytechnique ne pouvait recevoir de récompense qui lui allât plus droit au cœur. Elle est le couronnement d'une carrière vouée avec le plus complet désintéressement à la Science, que M. Mannheim aime vraiment comme un artiste aime son art.

Nul, mieux que lui, n'a jamais cultivé la Géométrie pour sa beauté propre, qu'il met si harmonieusement en évidence par l'élégance de sa méthode et par la concise précision de sa forme. La lecture des *Principes et développements de Géométrie cinématique* procure de réelles sensations esthétiques.

La Rédaction de ce journal s'associe très vivement aux hommages qui viennent d'être rendus au colonel Mannheim; elle ne peut oublier que l'éminent géomètre n'a pas cessé depuis bien longtemps d'être un des plus fidèles amis des *Nouvelles Annales*, et elle espère, d'ailleurs, qu'il leur continuera longtemps encore l'honneur de sa précieuse collaboration.

Nouvellement admis à la rédaction de ce journal, je suis personnellement heureux de pouvoir inaugurer mon entrée en service par un très respectueux salut à celui de mes anciens maîtres dont la bienveillance a toujours été le plus ferme appui de mes modestes travaux.

Pour la Rédaction des *Nouvelles Annales*,
Ernest Duporcq.

[F2h]

INTERPRÉTATION PAR L'AIRE D'UN SECTEUR GAUCHE DE L'ARGUMENT DES FONCTIONS $\frac{\sigma_i u}{\sigma u}$;

Par M. G. FONTENÉ.

Nous emploierons les notations du Traité d'Halphen, qui sont celles adoptées dans le Tableau publié par les *Nouvelles Annales*, sauf que l'on a conservé ω et ω' au lieu de ω_1 et ω_3; dans l'excellent Opuscule de M. Ch. Henry, les rôles des indices 1 et 3 sont intervertis, et l'on peut le regretter au point de vue de la tradition. Je rappelle que l'on a

$$\sigma_i u = \frac{e^{\eta_i u}\sigma(\omega_i - u)}{\sigma\omega_i} = \frac{e^{-\eta_i u}\sigma(\omega_i + u)}{\sigma\omega_i}.$$

Relativement aux fonctions dn, cn, sn, on a, avec

$$e_1 - e_3 = 1,$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u}, \qquad \operatorname{cn} u = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u}, \qquad \operatorname{sn} u = \frac{\sigma u}{\sigma_3 u},$$

et les périodes de ces fonctions qui ne donnent pas lieu à des semi-périodes (quand on les regarde comme des fonctions doublement périodiques de seconde espèce) sont respectivement

$$2\omega_1, \quad 2\omega_2, \quad 2\omega_3,$$

les fonctions étant prises dans l'ordre dn, cn, sn. On a encore, avec $e_1 - e_3 = 1$ naturellement,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\sigma_1 u}{\sigma u} &= i \operatorname{dn} v \\ \frac{\sigma_2 u}{\sigma u} &= ki \operatorname{cn} v \\ \frac{\sigma_3 u}{\sigma u} &= k \operatorname{sn} v \end{aligned}\right. \qquad (u - \omega_3 = v).$$

On a d'ailleurs

$$e_1 - e_3 = 1, \qquad e_2 - e_3 = k^2, \qquad e_1 - e_2 = k'^2,$$

$$e_1 = \frac{1 + k'^2}{3}, \qquad e_2 = \frac{k^2 - k'^2}{3}, \qquad e_3 = -\frac{1 + k^2}{3}.$$

Les formules relatives à l'homogénéité permettraient de ne pas faire l'hypothèse $e_1 - e_3 = 1$ pour les fonctions σ auxquelles on rattache dn, cn, sn (c'est le point de vue adopté par Halphen). On poserait alors

$$e_1 - e_3 = M^2, \qquad e_2 - e_3 = M^2 k^2, \qquad \ldots;$$

la quantité M est appelée *multiplicateur*. J'ai supposé $M = 1$, mais il peut y avoir avantage à ne pas faire cette hypothèse.

1. Une biquadratique gauche qui est l'intersection de deux quadriques ayant leurs axes suivant Ox, Oy, Oz est représentée par les équations

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + e_1 = \frac{y^2}{\beta^2} + e_2 = \frac{z^2}{\gamma^2} + e_3,$$

où nous supposerons, comme on peut le faire,

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0;$$

si l'on représente par (b^2, c'^2), (c^2, a'^2), (a^2, b'^2) les carrés des demi-axes des trois coniques qui sont les projections de la courbe sur les plans yOz, zOx, xOy, on a :

$$\begin{cases} b^2 = -\beta^2(e_2 - e_3), \\ c'^2 = \gamma^2(e_2 - e_3), \end{cases} \qquad \begin{cases} c^2 = -\gamma^2(e_3 - e_1), \\ a'^2 = \alpha^2(e_3 - e_1), \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = -\alpha^2(e_1 - e_2), \\ b'^2 = \beta^2(e_1 - e_2). \end{cases}$$

La représentation paramétrique de la courbe peut s'effectuer par les formules

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + e_1 = \frac{y^2}{\beta^2} + e_2 = \frac{z^2}{\gamma^2} + e_3 = \wp u,$$

la fonction $\wp u$ étant celle qui répond à l'équation différentielle

$$\wp'^2 = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3);$$

x, y, z sont des fonctions uniformes de u, et l'on a

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\sigma_1 u}{\sigma u}, \qquad \frac{y}{\beta} = \frac{\sigma_2 u}{\sigma u}, \qquad \frac{z}{\gamma} = \frac{\sigma_3 u}{\sigma u}, \qquad \wp' u = -2\frac{x}{\alpha}\frac{y}{\beta}\frac{z}{\gamma},$$

$$\frac{dx}{\alpha} = -\frac{y}{\beta}\frac{z}{\gamma}du, \qquad \frac{dy}{\beta} = -\frac{z}{\gamma}\frac{x}{\alpha}du, \qquad \frac{dz}{\gamma} = -\frac{x}{\alpha}\frac{y}{\beta}du.$$

Si A est un point fixe de la courbe, M un point courant, on a pour la différentielle dS de l'aire conique AOM

$$
\begin{aligned}
4(dS)^2 &= (y\,dz - z\,dy)^2 + \ldots \\
&= \beta^2\gamma^2\left(\frac{y}{\beta}\frac{dz}{\gamma} - \frac{z}{\gamma}\frac{dy}{\beta}\right)^2 + \ldots \\
&= \left[\beta^2\gamma^2\left(\frac{z^2}{\gamma^2}\frac{x}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta^2}\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \ldots\right](du)^2 \\
&= [\beta^2\gamma^2(e_2 - e_3)^2(\wp u - e_1) + \ldots](du)^2 \\
&= [b^2 c'^2(\wp u - e_1) + \ldots](du)^2.
\end{aligned}
$$

Donc, *sous la condition*

$$
(1) \qquad b^2 c'^2 + c^2 a'^2 + a^2 b'^2 = 0,
$$

on aura

$$
(2) \qquad u - u_0 = \frac{2S}{\sqrt{-(e_1 b^2 c'^2 + e_2 c^2 a'^2 + e_3 a^2 b'^2}} = 2\bar{S},
$$

en désignant par $\bar{S}$ le rapport de l'aire S à celle que représente le radical.

1° *Avec $u_0 = 0$, l'aire est comptée depuis une direction asymptotique.* Comme on a

$$
\alpha^4 = \frac{a^2 a'^2}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} = a^2 a'^2 e^{-2\eta_1\omega_1}\sigma^4(\omega_1),
$$

on peut écrire

$$
\alpha = \sqrt{aa'}\, e^{-\frac{\eta_1\omega_1}{2}}\sigma\omega_1, \qquad \ldots,
$$

et les formules

$$
\frac{x}{\alpha} = \frac{\sigma_1 u}{\sigma u} = \frac{e^{\eta_1 u}\sigma(\omega_1 - u)}{\sigma\omega_1\,\sigma u}, \qquad \ldots
$$

deviennent

$$
(3) \qquad \frac{x}{\sqrt{aa'}} = \frac{e^{\eta_1\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)}\sigma(\omega_1 - u)}{\sigma u}, \qquad \ldots \qquad (u = 2\bar{S}).
$$

2° *Avec* $u_0 = \omega_3$, *l'origine des aires est dans le plan* $z = 0$. Si l'on fait alors

$$e_1 - e_3 = 1,$$

on a d'abord

$$\begin{cases} b = \beta k i, \\ c' = \gamma k, \end{cases} \qquad \begin{cases} c = \gamma, \\ a' = \alpha i, \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \alpha k' i, \\ b' = \beta k'; \end{cases}$$

en gardant seulement a', b, c', la condition (1) peut s'écrire (en vue du cas de dégénérescence $e_2 = e_3$ ou $k = 0$)

$$(1') \qquad b^2 c'^2 + \frac{a'^2(c'^2 - k'^2 b^2)}{k^2} = 0,$$

et l'on a, en posant $u - \omega_3 = v$,

$$\frac{x}{\alpha} = i \operatorname{dn} v, \qquad \frac{y}{\beta} = k i \operatorname{cn} v, \qquad \frac{z}{\gamma} = k \operatorname{sn} v,$$

ou encore

$$(3') \qquad \frac{x}{a'} = \operatorname{dn} 2\overline{S}' \qquad \frac{y}{b} = \operatorname{cn} 2\overline{S}', \qquad \frac{z}{c'} = \operatorname{sn} 2\overline{S}',$$

l'origine des aires étant, comme on l'a dit, dans le plan $z = 0$.

2. Si la biquadratique dégénère en un système de deux coniques, on a par exemple $e_2 = e_3$, et l'on est dans un cas de dégénérescence pour pu, σu. *En outre,* ω_3 devenant infini et l'aire $\overline{S}'$ comptée depuis le plan $z = 0$ restant finie, *l'argument* $u = \omega_3 + 2\overline{S}'$ *prend ici des valeurs infiniment grandes lorsqu'on approche du cas limite,* et le début du calcul précédent devient illusoire; il faut imaginer que l'on a écrit

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + e_1 = \ldots = pu = p(\omega_3 + v) = e_3 + k^2 \operatorname{sn}^2 v,$$

puis, que l'on a transposé e_3 et divisé par k^2 qui tend vers zéro; cela revient à dire que l'on doit partir des formules (3') avec $u - \omega_3$ ou v au lieu de $2\,\overline{S}'$. Il y a là un fait général qui mériterait d'être signalé. D'après la condition (1'), on aura

$$v = 2\overline{S}'$$

si l'on a

$$a' = 0 \qquad \text{ou} \qquad b^2 = c'^2$$

(β et γ sont infinis); dans le premier cas on a une conique double dans le plan $x = 0$, avec

$$\frac{x}{0} = 1, \qquad \frac{y}{b} = \cos 2\overline{S}', \qquad \frac{z}{c'} = \sin 2\overline{S}';$$

dans le second cas on a deux cercles dans les plans $x = \pm a'$.

Il est superflu de remarquer que, pour $e_1 = e_2$ par exemple, les formules exactes

$$\frac{x}{a'} = \cos 2\overline{S}', \qquad \frac{y}{b} = \cos 2\overline{S}', \qquad \frac{z}{c'} = \sin 2\overline{S}'$$

ne rentrent pas dans les formules (3'); ces dernières formules sont pour ce cas

$$\frac{x}{a'} = \frac{1}{\operatorname{Ch} u}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{1}{\operatorname{Ch} u}, \qquad \frac{z}{c'} = \operatorname{Th} u,$$

et l'on a d'ailleurs

$$2\,d\overline{S}' = \frac{-du}{\operatorname{Ch} u}, \qquad u = \text{log nép. tang}\left(\frac{\pi}{4} + \overline{S}'\right);$$

on peut encore écrire, d'après une formule due à M. Laisant,

$$\operatorname{Th}\frac{u}{2} = \operatorname{tang}\overline{S}'.$$

3. Si la biquadratique est sphérique, on a, en appelant R le rayon de la sphère,

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0, \qquad R^2=-(e_1\alpha^2+e_2\beta^2+e_3\gamma^2);$$

or on a en général

$$4(dS)^2=(A\,pu+B)(du)^2,$$

$$A=\sum\alpha^2\sum e_1^2\alpha^2-\left(\sum e_1\alpha^2\right)^2,$$

$$B=e_1e_2e_3\left(\sum\alpha^2\right)^2-\sum e_1\alpha^2\sum e_2e_3\alpha^2.$$

et, dans le cas actuel,

$$4(dS)^2=\left(-R^4pu+R^2\sum e_2e_3\alpha^2\right)(du)^2.$$

La condition (1) est donc ici $R=0$, ce qui donne naturellement $dS=0$: *Le cas d'une biquadratique sphérique doit donc être écarté.*

Il y a toutefois exception pour le cas déjà rencontré d'une biquadratique formée de deux cercles; cette exception ne peut s'offrir qu'en remplacant pu par $e_3+k^2\operatorname{sn}^2 v$, avec $v=u-\omega_3$; la condition (1) est alors $R^4k^2=0$, et l'on peut faire $k=0$.

Note. — On aurait pu remplacer la fonction pu par une fonction φu satisfaisant à l'équation différentielle

$$\varphi'^2u=4M^2(\varphi u-e'_1)(\varphi u-e'_2)(\varphi u-e'_3),$$

en remplaçant dès le début e par e' *sans supposer*

$$e'_1+e'_2+e'_3=0.$$

Cette fonction a un pôle double w, et les deux séries de valeurs de u qui correspondent à une même valeur de la fonction sont deux séries identiques lorsque la fonction doit avoir l'une des quatre valeurs

$$(\alpha) \qquad \infty, \quad e'_1, \quad e'_2, \quad e'_3\,;$$

u est alors congru à l'une des valeurs doubles

$$(\beta) \qquad w', \quad w + \omega_1, \quad w + \omega_2, \quad w + \omega_3.$$

Il y a dégénérescence de φu lorsque deux des quatre quantités (α) sont égales, et, quand on doit supposer que l'un des e' devient infini, ou que le polynome du troisième degré en φu se réduit au second degré, on ne peut pas prendre pour φu une fonction pu; on peut prendre alors $\varphi u = \sin^2 u$. Cette remarque se lie à celle du n° 2.

[M6c]

THÉORÈMES SUR DES COURBES PLANES DE GENRE *un* OU *zéro*;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Théorème I. — *Soient* P *et* Q *les deux points doubles d'une quartique binodale, ou deux points quelconques d'une cubique, ou deux points pris dans le plan d'une conique : appelons* conique associée *à la courbe que l'on considère toute conique passant en* P *et* Q. *Si l'on prend sur la courbe les points*

$$(1) \qquad \left\{\begin{matrix} A_1, & A_2, & A_3, & A_4, \\ B_1, & B_2, & B_3, & B_4, \\ C_1, & C_2, & C_3, & C_4, \\ D_1, & D_2, & D_3, & D_4, \end{matrix}\right.$$

tels que, d'une part, les quatre points A *sont à une conique associée* α, *les quatre points* B *sont à une conique* *associée* β, *les quatre points* C *sont à une conique associée* γ, *et, d'autre part, les quatre points d'indice i sont à une* conique associée *i pour* $i = 1, 2, 3, 4$, *il arrive que les quatre points* D *sont à une conique associée* δ.

Pour une quartique bicirculaire, P et Q sont les points cycliques; pour une cubique circulaire ou une conique, P et Q peuvent être les points cycliques; une conique associée est alors un cercle.

On peut se donner arbitrairement les neuf points A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, ce qui conduit à énoncer le théorème en disant : Les coniques associées α, β, γ, qui passent respectivement par les trois points A, par les trois points B, par les trois points C, coupent encore la courbe en A_4, B_4, C_4 ; les coniques associées 1, 2, 3 qui passent respectivement par les trois points d'indice 1, par les trois points d'indice 2, par les trois points d'indice 3, coupent encore la courbe en D_1, D_2, D_3 ; alors la conique associée 4 qui passe en A_4, B_4, C_4, et la conique associée δ qui passe en D_1, D_2, D_3, rencontrent encore la courbe en un même point D_4.

Le théorème se démontre immédiatement pour une quartique binodale ou une cubique en considérant les arguments elliptiques des points de la courbe, qui est de genre *un*; pour une conique, en supposant que P et Q sont les points cycliques, on prendrait les arguments circulaires (angle excentrique employé par Joachimsthal).

Citons ce cas particulier, qui généralise un théorème de Joachimsthal :

Les cercles 1, 2, 3, 4, *osculateurs à une quartique bicirculaire, ou à une cubique circulaire, ou à une conique, aux quatre points où elle est coupée par un* *cercle* ($\alpha = \beta = \gamma$), *coupent encore la courbe en quatre points qui sont à un cercle* δ.

Il y aurait lieu de considérer les seize autres points d'intersection des coniques α, β, γ, δ avec les coniques 1, 2, 3, 4.

2. Théorème II. — *Soient* P, Q, R *trois points triples d'une sextique, ou deux points doubles et un point triple d'une quintique, ou deux points doubles et un point quelconque d'une quartique, ou trois points d'une cubique, ou deux points pris dans le plan d'une conique et un point de la conique : appelons* conique associée *à la courbe toute conique passant en* P, Q, R. *Si l'on prend sur la courbe les points*

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} A_1, & A_2, & A_3, \\ B_1, & B_2, & B_3, \\ C_1, & C_2, & C_3, \end{array}\right.$$

tels que, d'une part, les trois points A *sont à une conique associée* α, *les trois points* B *sont à une conique associée* β, *et, d'autre part, les trois points d'indice* i *sont à une conique associée* i *pour* $i = 1, 2, 3$, *il arrive que les trois points* C *sont à une conique associée* γ.

On peut se donner arbitrairement les quatre points A_1, A_2, B_1, B_2.

La courbe est de genre *un,* ou de genre *zéro* si c'est une conique, et le théorème se démontre comme le précédent.

3. *Rattachement du théorème II à un cas particulier du théorème I.* — Pour une quartique, ou une courbe de degré moindre, le théorème II est un cas particulier du théorème I.

Si, en effet, dans le théorème I on suppose

$$D_1 = A_4 = R, \qquad D_2 = B_4 = R',$$

on a

$$D_3 = C_4 = R'',$$

la conique associée $RR'R''$ coupe encore la courbe donnée en D_4; plus particulièrement, les trois points R, R', R'' peuvent se confondre, conformément au Tableau

$$\begin{array}{cccc} A_1, & A_2, & A_3, & R, \\ B_1, & B_2, & B_3, & R, \\ C_1, & C_2, & C_3, & R, \\ R, & R, & R, & D_4, \end{array}$$

et l'on a le théorème II pour une quartique ou une courbe de degré moindre.

Pour une cubique, les coniques considérées passent par trois points P, Q, R de la courbe. On peut en particulier supposer ces trois points en ligne droite, et les coniques sont formées de la droite PQR et d'une droite quelconque; on obtient alors, les points P, Q, R s'éliminant, un théorème bien connu relatif à deux systèmes de trois sécantes dans une cubique, conformément au Tableau (2); en appliquant la transformation du second ordre à ce dernier théorème, on obtient intégralement le théorème II.

Voici un exemple du théorème II pour lequel nous laisserons de côté la sextique et la quintique :

Les points d'osculation A_1, A_2, A_3 *des trois cercles osculateurs* 1, 2, 3 *que l'on peut mener à une quartique bicirculaire, ou à une cubique circulaire, ou à une conique, par un point* R *de la courbe, déterminent un cercle* $(\alpha = \beta = \gamma)$ *qui passe en* R.

Ce théorème, qui généralise un théorème de Joachimsthal, rentre d'ailleurs dans celui qui a été donné à la fin du n° 1; le cercle δ est ici le cercle osculateur en R. Dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. IV, p. 391), Abel Transon a rattaché par la projection gauche, qui est une transformation du second ordre, le théorème de Joachimsthal pour une conique, ou plutôt le transformé homographique de ce théorème, au fait que les trois points d'inflexion d'une cubique nodale sont en ligne droite: il part de la conique et prend comme points principaux les points P, Q, R, de sorte que la conique, passant en R, donne une cubique nodale (plus une droite), tandis que les coniques qui passent en P, Q, R donnent des droites; on a vu plus haut le développement de cette idée.

4. *Démonstration géométrique du théorème I pour le cas d'une conique.* — Le théorème général du n° 1 est facile à établir géométriquement pour une ellipse, en supposant que P et Q sont les points cycliques; il suffit de considérer l'ellipse comme projection d'un cercle. A quatre points A, B, C, D de l'ellipse situés sur un cercle correspondent quatre points a, b, c, d du cercle projection, tels que les trois couples de côtés du quadrangle obtenu ont leurs bissectrices parallèles à deux directions déterminées, ou, simplement, tels que les droites ad et bc, par exemple, font avec une direction xy des angles égaux en sens contraires : nous dirons que les quatre points a, b, c, d sont *associés* sur le cercle pour la direction xy. Si l'on considère d'abord trois cordes $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, et si l'on détermine les points d_1 et d_2 respectivement associés aux points a_1, b_1, c_1 et aux points a_2, b_2, c_2, il est aisé de voir que la direction de la corde $d_1 d_2$ dépend seulement des directions des cordes primitives, et non de leur position; à l'égard de

la corde $a_1 a_2$, par exemple, on détermine d_1 et d_2 en menant $b_1 c_1$, $b_2 c_2$, puis $a_1 d_1$, $a_2 d_2$: en considérant le quadrilatère inscriptible $a_2 a_1 d_1 d_2$, on voit que, si $a_1 a_2$ se meut parallèlement à elle-même, l'angle en a_1 reste constant, par suite l'angle opposé d_2 reste constant, et la droite $d_1 d_2$ se meut parallèlement à elle-même. Si l'on considère maintenant trois autres cordes $a_3 a_4$, $b_3 b_4$, $c_3 c_4$ faisant avec xy les mêmes angles que $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, en sens contraires, et si l'on détermine les points d_3 et d_4 respectivement associés aux points a_3, b_3, c_3, et aux points a_4, b_4, c_4, il résulte de ce qui précède que la corde $d_3 d_4$ fait avec xy le même angle que $d_1 d_2$ en sens inverse; il suffit de replier la figure autour de xy. Le théorème à démontrer résulte de là immédiatement.

Des considérations géométriques analogues permettent d'établir, à propos du second théorème de Joachimsthal, ce fait connu que le triangle $A_1 A_2 A_3$ est un triangle semi-régulier inscrit à la conique (de sorte que les normales en A_1, A_2, A_3 sont concourantes). L'ellipse étant projetée suivant un cercle, ri étant la corde du cercle parallèle à l'axe focal de l'ellipse, on cherche un point a_1 tel que la corde ra_1 et la tangente $a_1 t_1$ soient également inclinées sur ri, d'où l'on conclut aisément que la corde ra_1 réalise à partir de ri la trisection de l'angle $irt + k\pi$, rt étant la tangente en r : les points a_1, a_2, a_3 sont donc les sommets d'un triangle équilatéral; en outre, la corde $a_2 a_3$, parallèle à la tangente $a_1 t_1$, fait avec ri le même angle que ra_1, mais en sens inverse, de sorte que les quatre points r, a_1, a_2, a_3 sont associés pour la direction ri; donc....

BIBLIOGRAPHIE.

La fonction Gamma : Théorie, Histoire, Bibliographie; par *Maurice Godefroy*. — VII-94 pages, in-8°. (Paris, Gauthier-Villars, 1901.)

La transcendante ainsi désignée est de ces fonctions dont l'étude n'a cessé de solliciter vivement l'attention et la curiosité des mathématiciens depuis sa découverte par Euler, qui la rencontra dans l'examen d'un problème d'interpolation qui avait déjà occupé Wallis, Goldbach et Daniel Bernoulli.

Aujourd'hui, le domaine de cette fonction est marqué d'empreintes dues à la plupart des mathématiciens qui ont perfectionné l'Analyse. La liste serait longue de tous ceux qui ont laissé des résultats plus ou moins intéressants dans l'étude de la fonction gamma; on en jugera d'après la bibliographie dressée par M. Brunel, mais dans les quinze années qui ont suivi la publication de ce Travail, il semble que l'intérêt des chercheurs n'ait pas faibli, grâce aux puissantes ressources que les récents progrès de la Théorie des fonctions venaient mettre entre leurs mains, en leur donnant le moyen de jeter de nouvelles clartés dans toutes les questions que soulève cette investigation.

Les Traités classiques de Calcul intégral ne donnent de la fonction gamma qu'une idée très incomplète, qui ne fait pas pressentir son rôle étendu dans l'Analyse mathématique. La présente monographie comblera aisément cette lacune, en épargnant au lecteur la recherche de résultats disséminés dans une foule de recueils mathématiques pour la plupart inaccessibles.

Le Mémoire est divisé en sept Sections, dont la première est consacrée à un Aperçu historique où sont exposées seulement les découvertes fondamentales et les orientations successives de la théorie de la fonction gamma.

Avec la Section II commence l'étude spéciale de ses propriétés. Disons tout de suite que l'auteur s'est appliqué à en donner les démonstrations les plus simples, et qu'à cet effet il n'a déterminé son choix qu'après discussion comparative des méthodes successivement proposées par différents analystes.

L'étude de la fonction Γ est ici exposée en prenant pour base les propriétés de la fonction

$$\Pi(x) = n^x \frac{1.2.3\ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

et de son inverse, dont Weierstrass a démontré l'importance. On est ainsi conduit à étudier également l'inverse de la fonction Γ, ou ce que Weierstrass a appelé la factorielle de x, $Fc(x)$, puis à établir la relation fonctionnelle

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

et à évaluer les résidus de $\Gamma(x)$.

Incidemment se présentent quelques applications, entre autres la détermination du module de $\Gamma(\alpha+\beta i)$, l'étude d'une certaine série de Stirling, et la convergence de la série hypergéométrique.

Plusieurs de ces résultats constituaient les propriétés fondamentales connues dès les premiers temps. Dans la suite, de Gasparis et Prym ont découvert et pénétré une décomposition nouvelle de la fonction Γ en deux autres fonctions P et Q, qui satisfont aux équations fonctionnelles

$$P(x+1) = xP(x) - \frac{1}{e}, \qquad Q(x+1) = xQ(x) + \frac{1}{e},$$

et aussi à la relation

$$\Gamma(x) = P(x) + Q(x),$$

qui met la fonction gamma sous forme de somme de deux fonctions dont l'étude plus approfondie a montré que $P(1+x)$ est développable suivant une série entière de rayon de convergence égal à l'unité, tandis que $Q(x)$ est une fonction transcendante entière.

Cependant il s'en faut que cette investigation ait porté tous ses fruits, nonobstant les résultats obtenus déjà par Bourguet. Tout ce que l'on peut dire, c'est que l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une racine dans chacun des intervalles $(-\frac{11}{2}, -5)$, $(-6, -\frac{11}{2})$, $(-\frac{15}{2}, -7)$ $(-8, -\frac{15}{2})$, etc., tandis qu'elle n'en a point dans les autres intervalles; que cette équation $P(x) = 0$ ne paraît pas pouvoir admettre plus de quatre racines imaginaires, et qu'on ne peut encore affirmer si l'équation $Q(x) = 0$ possède des racines, à part une remarque de Lindhagen.

Les propriétés de la fonction gamma étudiées ou exposées dans la Section III sont, en résumé, la relation des compléments, indiquée par Euler

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

la formule de Legendre

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2x}}\Gamma(2x),$$

la formule de Gauss

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right)$$
$$= (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{-mx+\frac{1}{2}}\Gamma(mx),$$

la formule de Mellin

$$\frac{\Gamma^m(z)}{\Gamma(z-\alpha_1 x)\Gamma(z-\alpha_2 x)\ldots\Gamma(z-\alpha_m x)} = \prod_{n=0}^{n=\infty}\left[1-\left(\frac{x}{n+z}\right)^m\right],$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ étant les m racines de l'équation binome

$$\alpha^m - 1 = 0.$$

Enfin, la théorie de la fonction gamma peut se déduire de celle de la série hypergéométrique de Gauss et inversement, comme l'a montré Thomae, la théorie de la série hypergéométrique peut être exposée en prenant pour point de départ les premières propriétés de $\Gamma(x)$.

La fonction de Binet fait l'objet de la Section IV, en raison de l'importance de cette transcendante et des nombreux travaux qu'elle a provoqués.

A signaler, chemin faisant, diverses formules dues à Binet, à Gudermann et à Stirling, avec applications à certaines questions.

La Section V traite des fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ définies par les notations

$$\Phi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx}, \qquad \Psi(x) = \frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2}.$$

Ces fonctions peuvent servir à retrouver toutes les propriétés de $\Gamma(x)$ et inversement.

Notons, en passant, que $\Phi(x)$ et $\Gamma(x)$ ne peuvent être solutions d'aucune équation différentielle.

Dans la Section VI, l'auteur expose les développements en séries entières des fonctions $\log \Gamma(1+x)$, $\Gamma(1+x)$, $\frac{1}{\Gamma(1+x)}$, $P(1+x)$, $Q(1+x)$, $\Phi(1+x)$ et $\Psi(1+x)$.

Les applications qui forment la VII[e] et dernière Section se rapportent à des sujets indiqués par M. Appell et qui rentrent sous les désignations suivantes :

Limites de produits infinis convergents et sommation des séries dont le terme général est une fonction rationnelle de l'indice.

Résolution de certaines équations fonctionnelles

$$F(x+1) = R(x) \quad F(x),$$
$$F(x+1) = F(x) + R_1(x),$$

$R(x)$, $R_1(x)$ désignant des fonctions rationnelles données.

Incidemment, on est amené à traiter l'équation fonctionnelle

$$F(x+1) = x\,F(x) + R(x),$$

$R(x)$ désignant alors un polynome entier en x.

Cette équation, étudiée par Lindhagen, a été résolue complètement par Jensen.

Enfin, la même théorie conduit à la solution générale des équations suivantes dites *équations de Crelle :*

$$\begin{aligned} F(x, y, z+a) &= \quad F(x, y, z)\,F(x+zy, y, a), \\ F(ax, ay, z) &= a^2\,F(x, y, z), \\ F(x, y, 1) &= x. \end{aligned}$$

Ce problème n'a d'ailleurs été résolu d'une façon décisive que par Weierstrass.

En résumé, la monographie que nous devons à M. Godefroy nous semble avoir pleinement réalisé le terme auquel a été amenée de nos jours l'étude de la fonction gamma. L'auteur se sera acquis des droits à la reconnaissance des mathématiciens en leur donnant de grandes facilités pour une étude si attrayante et qui laisse encore le champ libre à de nouvelles découvertes. H. B.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1814.

(1899, p. 100.)

On considère trois coniques (S), (S_1), (S_2) *bitangentes entre elles aux deux points* A, B; *de deux points* a, a_1 *pris sur* (S), (S_1), *et tels que la droite* aa_1 *passe par le pôle commun à ces trois coniques, on mène des tangentes à* (S_2). *Les quatre sommets du quadrilatère ainsi formé décrivent deux coniques.* (G. Leinekugel.)

SOLUTION

Par M. J. Lez.

Il suffit de faire une transformation homographique de manière que les points A et B deviennent les points circulaires à l'infini et la proposition est immédiate.

1858.

(1900, p. 383.)

Prouver géométriquement que la caustique des rayons divergents du foyer (¹) *et réfléchis à l'arc d'une cardioïde est la courbe*

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^{\frac{2}{3}},$$

où a *est le rayon du cercle fixe de la cardioïde.*

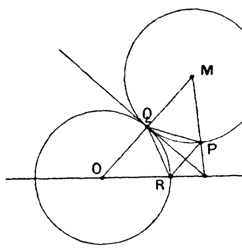
(Archibald.)

(¹) L'énoncé doit être rectifié en substituant le *rebroussement* au *foyer* de la cardioïde.

SOLUTION

Par M. V. RETALI.

Soient O le centre du cercle base, R le point de rebrousse-



ment de la cardioïde, M le centre et Q le point de contact du cercle générateur, P le point correspondant de la cardioïde : évidemment $|RP|$ est parallèle à $|OM|$, $QR = PQ$ et l'angle $QPR = MQP = MPQ$; mais PQ est la normale à la cardioïde au point P, donc le rayon réfléchi du rayon issu de R est le diamètre du cercle générateur mené par P. Ce diamètre $|MP|$ et la droite $|OR|$ sont symétriques par rapport à la tangente en Q au cercle fixe, donc son enveloppe (1) est l'hypocycloïde bicuspidale (*néphroïde*) ayant en O son centre et en R l'un de ses deux rebroussements réels. Comme l'équation polaire de la néphroïde est (2), en posant $OR = A$,

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

le théorème est démontré.

(1) Voir *Nouvelles Annales de Math.*, 2e série, t. II, p. 279, question 667, et t. III, p. 261-264. *Voir* aussi *Periodico di Mat.*, t. XV, p. 164.

(2) *Voir*, par exemple, G.-J. CHILDE, *Related caustics* (*Quarterly Journal of pure and applied Math.*, Vol. VII, p. 142).

1860.

(1900, p. 383.)

$a_1 a_2 \ldots a_n$ étant les chiffres d'un nombre, soit

$$a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} (a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n})$$

un quelconque des nombres, que l'on peut obtenir du précédent en changeant l'ordre des chiffres par un nombre pair (impair) de transpositions. Montrer que l'on a

$$\Sigma a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} = \Sigma a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n} \qquad \text{pour} \qquad n \geqq 3.$$

(H. PICCIOLI.)

SOLUTION

Par Mlle AMÉLIE POLLAK.

$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ sont les chiffres d'un nombre; quand l'ordre de ces chiffres est changé, $(n-1)! = 1.2.3\ldots(n-1)$ nombres se forment avec a_1 à la première place, dont la moitié $\frac{(n-1)!}{2}$ est obtenue par un nombre pair de transpositions, et l'autre moitié $\frac{(n-1)!}{2}$ par un nombre impair de transpositions; car on change les chiffres autant de fois par un nombre pair que par un nombre impair de transpositions. Mais ce n'est possible que quand $(n-1)!$ est un nombre pair, c'est-à-dire quand $n > 2$.

Commençant de même par a_2, on a $(n-1)!$ nombres, dont la moitié $\frac{(n-1)!}{2}$ se forment par un nombre pair de transpositions et l'autre moitié $\frac{(n-1)!}{2}$ nombres par un nombre impair de transpositions, etc.

Chaque chiffre se trouve donc à chaque place $(n-1)!$ fois, savoir $\frac{(n-1)!}{2}$ fois dans des nombres résultant d'un nombre pair de transpositions, et $\frac{(n-1)!}{2}$ dans des nombres résultant d'un nombre impair de transpositions, c'est-à-dire autant de fois dans les premiers que dans les autres.

Ainsi

$$
\begin{aligned}
& \Sigma\, a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} \\
= {} & \Sigma\, a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n} \\
= {} & \frac{(n-1)!}{2} g^{n-1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\
& + \frac{(n-1)!}{2} g^{n-2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \ldots \\
& + \frac{(n-1)!}{2} g(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\
& + \frac{(n-1)!}{2} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\
= {} & \frac{(n-1)!}{2} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1 + g + g^2 + \ldots + g^{n-1}) \\
= {} & \frac{(n-1)!}{2} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(g^{n-1} + g^{n-2} + \ldots + g + 1) \\
= {} & \frac{(n-1)!}{2} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\overbrace{11111\ldots 1}^{n \text{ fois}}.
\end{aligned}
$$

1861.

(1900, p. 384.)

La tangente en un point M *d'une hypocycloïde triangulaire rencontre son cercle tritangent en deux points* P *et* Q.

Montrer que, si P *est le point plus rapproché de* M, *on a* PM = PQ. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Le théorème, énoncé aussi par Steiner au début de son Mémoire *Ueber eine besondere Curve dritter Klasse* (*Journal de Crelle,* t. 53, p. 232) a été démontré maintes fois. La démonstration suivante, très simple, basée sur la génération de la courbe comme hypocycloïde, est peut-être nouvelle. Soient A et P les points de contact du cercle générateur avec le cercle base et le cercle tritangent [1], M la position du point géné-

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

rateur : la normale à l'hypocycloïde au point M, d'après un théorème fondamental de Descartes-De la Hire, est |MA| et par suite la tangente |MP| à l'hypocycloïde en M coupe le cercle tritangent en P et au point Q symétrique de P par rapport à M.

Steiner appelle les points P et Q respectivement *centre* et *sommet* de la tangente |PQ| et donne le théorème précédent comme corollaire de l'autre : « chaque tangente est coupée par un *couple* (de tangentes orthogonales) en deux points équidistants de son centre ». On pourrait aussi démontrer aisément ce théorème et d'autres indiqués par Steiner en partant de la génération hypocycloïdique, ce que l'on n'a pas fait, je crois, jusqu'ici, et ne serait pas dépourvu d'intérêt au point de vue d'une théorie élémentaire de l'hypocycloïde à trois rebroussements.

QUESTIONS.

1919. Le produit du rayon de courbure en un point d'une conique par le cube de la distance du centre à la tangente correspondante est constant pour tous les points de la conique.

Corollaire. — Les centres de courbure répondant aux points de déviation maxima d'une ellipse [1] sont les projections du centre sur les normales en ces points.

(M. D'OCAGNE.)

1920. Le produit du rayon de courbure en un point d'une hyperbole par la distance du centre à la tangente correspondante est égal, en valeur absolue, au carré du segment de la tangente compris entre l'axe transverse et l'une des tangentes aux sommets de l'hyperbole complémentaire.

(M. D'OCAGNE.)

[1] Voir : *Nouvelles Annales*, 3e série, t. V, p. 377; 1886.

Les deux énoncés ci-dessus, traduits en hollandais, ont été insérés en 1890 dans les *Wiskundige Opgaven*.

[X3a]

SUR LA RÉSOLUTION NOMOGRAPHIQUE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

C'est à l'occasion de cette résolution que nous avons énoncé pour la première fois ([1]) en 1884 le principe de la *méthode des points alignés,* qui se trouve exposée très en détail dans les Chapitres III et V de notre *Traité de Nomographie* ([2]). Or, cette application particulière peut être dégagée de la théorie générale à laquelle elle se rattache pour être présentée sous la forme suivante immédiatement accessible à tout élève de Mathématiques spéciales.

I. — SYSTÈMES DE POINTS A UNE ET A DEUX COTES.

1. Si les coordonnées d'un point sont données en fonctions d'un paramètre z par des formules telles que

$$x = f(z), \qquad y = \varphi(z),$$

on peut figurer un certain nombre de ces points correspondant à des valeurs de z comprises entre certaines limites *en inscrivant à côté de chacun d'eux la valeur de z qui a servi à l'obtenir*. On a ainsi un système de *points à une cote.* Ces points sont distribués sur la ligne, dite leur *support,* dont l'équation s'obtiendrait

([1]) *Annales des Ponts et Chaussées,* 2e semestre, p. 531. Cette Note a été reproduite dans notre brochure : *Coordonnées parallèles et axiales,* p. 73 (Paris, Gauthier-Villars; 1885).

([2]) Paris, Gauthier-Villars; 1899.

par l'élimination de z entre les expressions de x et y. Si les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ dépendent linéairement l'une de l'autre, ce support est une ligne droite.

2. Considérons de même un point dont les coordonnées dépendent de deux paramètres z et t par les formules

$$x = f(z, t), \qquad y = \varphi(z, t).$$

Si l'on donne à t une certaine valeur fixe, on obtient un système de points distribués sur une ligne (t) dont l'équation résulterait de l'élimination de z entre les expressions de x et y. De même, en laissant z fixe et faisant varier t, on obtient une ligne (z). Ayant construit un certain nombre de lignes (z) et (t), en ayant soin d'inscrire sa cote à côté de chacune d'elles, on a un réseau dans lequel chaque point est défini par les cotes des lignes (z) et (t) qui s'y croisent. Ces points sont dits des *points à deux cotes*.

Indépendamment des points effectivement marqués dans un système, soit à une, soit à deux cotes, on peut, par interpolation à vue, se figurer ceux qui correspondent à des cotes intermédiaires.

II. — Résolution des équations de la forme $z^m + u z^p + v = 0$.

3. Une telle équation peut s'écrire [1]

$$\begin{vmatrix} -1 & u & 1 \\ 1 & v & 1 \\ 1 - z^p & -z^m & 1 + z^p \end{vmatrix} = 0.$$

[1] Comme on peut s'en assurer en se reportant aux endroits cités, c'est l'usage des coordonnées tangentielles spéciales que nous avons appelées *parallèles* qui conduit le plus naturellement à cette transformation.

Elle exprime l'alignement des trois points

$$
\begin{array}{lll}
(u) & x = -1, & y = u, \\
(v) & x = 1, & y = v, \\
(z) & x = \dfrac{1 - z^p}{1 + z^p}, & y = \dfrac{-z^m}{1 + z^p}.
\end{array}
$$

Ces trois couples de formules définissent trois systèmes à une cote, savoir : les points (u) et (v) distribués sur deux parallèles équidistantes de Oy, les points (z) distribués sur une courbe algébrique C définie par les expressions correspondantes de x et y.

Il est d'ailleurs facile, par l'élimination de z, de former l'équation de cette courbe d'ordre m, qui est

$$(-2y)^p (1 + x)^{m-p} = (1 - x)^m.$$

L'ensemble des trois systèmes à une cote (u), (v) et (z) constitue un *nomogramme* [1] *à points alignés* de l'équation donnée. Pour résoudre l'équation au moyen de ce nomogramme, on voit qu'il suffit de *joindre les points cotés u et v par une droite qui coupe la courbe* C *en des points dont les cotes z sont les racines de l'équation.*

Remarquons qu'il suffit de construire les points de la courbe C pour des valeurs positives de z, les valeurs absolues des racines négatives de l'équation s'obtenant immédiatement comme racines positives de la transformée en $-z$.

4. Prenons en particulier l'équation générale du second degré

$$z^2 + uz + v = 0,$$

---

[1] Terme étymologiquement plus général que celui d'*abaque*, auquel il a été substitué par M. Schilling.

qui rentre dans le type précédent lorsqu'on y fait $m = 2$, $p = 1$.

Si nous appelons AA′ et BB′ les droites $x = -1$ et $x = 1$ qui servent, dans tous les cas, de supports aux systèmes (u) et (v), droites qui rencontrent l'axe Ox aux points A et B, on voit que la courbe C, dont l'équation, donnée ci-dessus, devient ici

$$-2y(1+x) = (1-x)^2,$$

est une hyperbole tangente en B à Ox, ayant AA′ pour asymptote et coupant l'axe Oy au point d'ordonnée $y = -\frac{1}{2}$, ce qui la définit complètement. D'ailleurs, les expressions de x et de y, qui sont ici

$$x = \frac{1-z}{1+z}, \qquad y = \frac{-z^2}{1+z},$$

montrent : 1° que la portion de l'hyperbole C correspondant aux valeurs positives de z est tout entière au-dessous de Ox, entre AA′ et BB′; 2° que le pied M de l'ordonnée du point P coté z divise AB dans le rapport $\frac{\text{MB}}{\text{AM}} = z$; 3° que la droite BP coupe AA′ en un point dont l'ordonnée est $y = -z$.

Ces deux dernières propriétés donnent une construction facile des points (z). C'est ainsi qu'a été obtenu le nomogramme représenté par la figure 1.

III. — Résolution des équations de la forme $z^m + tz^n + uz^p + v = 0$.

5. Une telle équation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} -1 & u & 1 \\ 1 & v & 1 \\ 1-z^p & z^m+tz^n & 1+z^p \end{vmatrix} = 0.$$

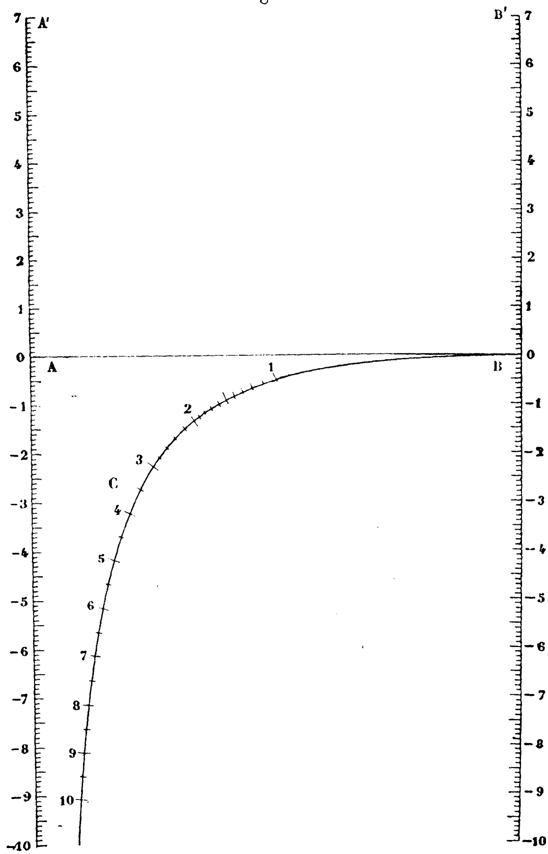
Elle exprime l'alignement des trois points

$$(u) \qquad x = -1, \qquad y = u,$$

$$(v) \qquad x = 1, \qquad y = v,$$

$$(z, t) \qquad x = \frac{1 - z^p}{1 + z^p}, \qquad y = \frac{-(z^m + t z^n)}{1 + z^p}.$$

Fig. 1.



Les points à une cote (u) et (v) sont les mêmes que dans le cas précédent. Ils sont distribués sur les parallèles $AA'(x = -1)$ et $BB'(x = 1)$ à Oy.

Les points (z, t) sont à deux cotes. Mais on peut observer que, l'expression de leur x ne renfermant pas t, les lignes (z) du réseau (z, t) sont tout simplement des parallèles à Oy. En outre, les courbes C_t, d'ordre m, correspondant aux diverses valeurs de t, se déduisent très facilement de celle d'entre elles, C_0, qui correspond à $t = 0$, et qui n'est autre que la courbe C du n° 3.

En effet, les points des diverses courbes C_t situés sur une même parallèle (z) à Oy sont donnés par

$$y = \frac{-z^m}{1+z^p} - t\,\frac{z^n}{1+z^p},$$

ou, en appelant y_0 l'ordonnée du point de C_0 situé sur cette ligne (z) et remarquant que $\frac{-z^n}{1+z^p}$ est une constante η par rapport à cette ligne z,

$$y = y_0 + t\eta.$$

Ayant donc calculé les η correspondant aux diverses valeurs de z, on voit que, une fois tracée la courbe C_0, la construction des autres courbes C_t est immédiate.

L'ensemble des points à une cote (u) et (v) et des points à deux cotes (z, t) définis par le réseau des parallèles (z) à Oy et des courbes C_t, constitue le *nomogramme* de l'équation proposée.

Quand ce nomogramme est construit, on résout l'équation en *joignant par une droite les points cotés u et v et prenant les cotes z des parallèles à Oy passant par les points où cette droite coupe la courbe C_t.*

Comme dans le cas précédent, on remarquera que l'on peut se borner à construire le nomogramme pour les valeurs positives de z.

6. Prenons en particulier l'équation complète du

troisième degré [1]

$$z^3 + tz^2 + uz + v = 0,$$

qui rentre dans le type précédent quand on y fait $m = 3$, $n = 2$, $p = 1$.

Les points (u) et (v) sont les mêmes que précédemment, distribués sur les droites AA′ et BB′; quant aux courbes C_t, elles sont définies par les équations

$$x = \frac{1 - z}{1 + z}, \qquad y = -\frac{z^3 + tz^2}{1 + z}.$$

La première de ces équations définit d'ailleurs les lignes (z), qui ne sont autres que les parallèles à Oy menées par les points (z) du nomogramme du n° 4 (*fig.* 1).

Pour obtenir sur chacune de ces lignes (z) les points des diverses courbes C_t, il suffit, après avoir posé

$$y_0 = \frac{-z^3}{1 + z}, \qquad \eta = \frac{-z^2}{1 + z},$$

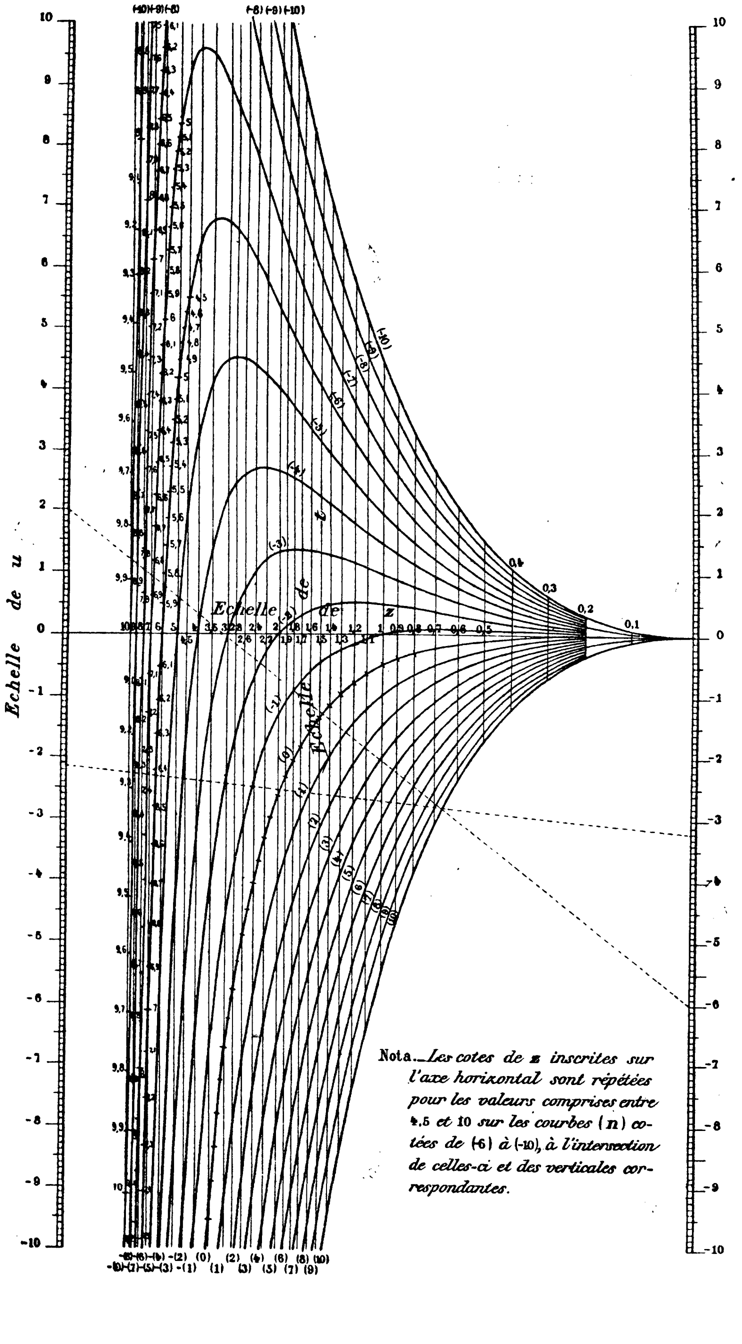
de remarquer, comme on vient de le faire dans le cas général, que, une fois construite, la courbe C_0 définie par l'ordonnée y_0, on a, sur chaque ligne (z), les points des courbes correspondant à $t = 1, 2, 3, \ldots$ en ajoutant à l'ordonnée y_0, une fois, deux fois, trois fois, ... l'ordonnée η qui n'est autre que celle de l'hyperbole construite pour le nomogramme précédent.

La courbe C_0 est d'ailleurs une cubique cuspidale ayant son point d'inflexion en B, où la tangente se con-

---

[1] Pour l'extension de la méthode jusqu'au septième degré, *voir* les Notes que nous avons publiées dans les *Comptes rendus* (t. CXXXI, p. 522) et le *Bull. des Sc. math.* (2e série, t. XXIV, p. 286).

Fig. 2.


Echelle de u
Echelle de v
Echelle de z
Echelle de t
Echelle de n
Nota.—Les cotes de z inscrites sur l'axe horizontal sont répétées pour les valeurs comprises entre 4,5 et 10 sur les courbes (n) cotées de (-6) à (-10), à l'intersection de celles-ci et des verticales correspondantes.

fond avec Ox, et son point de rebroussement à l'infini sur la partie négative de AA' ([1]).

C'est ainsi qu'a été obtenu le nomogramme représenté par la figure 2, sur laquelle on a indiqué en pointillé les positions de l'index se rapportant à la résolution des équations

$$z^3 + 2z - 6 = 0, \qquad z^3 + z^2 - 2,16z - 3,2 = 0,$$

pour lesquelles le nomogramme donne respectivement

$$z = 1,46 \qquad \text{et} \qquad z = 1,6.$$

Remarque. — On peut, pour construire le système (t), porter sur chaque droite (z) les ordonnées η à partir de l'une quelconque des courbes C_t, tracée d'abord. En particulier, on peut partir de la courbe C_1 définie par l'ordonnée

$$y = -\frac{z^3 + z^2}{1 + z} = -z^2,$$

que fournit immédiatement une simple Table de carrés.

[D1bα]

SUR L'INTÉGRALE DE DIRICHLET ([2]);

PAR M. STÄCKEL (trad. LAUGEL).

I.

La démonstration donnée par Dirichlet, en 1829, qu'une fonction arbitraire est représentable par une

---

([1]) Pour la construction point par point de cette cubique avec ses tangentes, *voir* le *Traité de Nomographie,* p. 190.

([2]) Extrait des *Comptes rendus de l'Académie royale des Sciences de Leipzig,* mai 1901.

série trigonométrique repose sur le théorème suivant :

Si l'on désigne par $f(\xi)$ une fonction continue de ξ, qui, tandis que ξ croît de o à h $\left(\text{la constante } h \text{ vérifiant les conditions } h > 0 \text{ et } h \leqq \frac{\pi}{2}\right)$, est toujours ou bien croissante ou bien décroissante, l'intégrale

$$\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi} f(\xi)\,d\xi,$$

quand on y donnera au nombre n des valeurs positives croissant indéfiniment, tendra de plus en plus vers la limite $\frac{\pi}{2}f(0)$ (*Œuvres*, t. I, 1889, p. 154. Berlin).

Comme corollaire de ce théorème résulte (*loc. cit.*, p. 155) la proposition suivante :

Si l'on désigne par g et h des constantes vérifiant les conditions $g > 0$, $\frac{\pi}{2} \geqq h > g$, et si la fonction $f(\xi)$, pour ξ croissant de g à h, est une fonction ou bien toujours croissante ou bien toujours décroissante, l'intégrale

$$\int_g^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi} f(\xi)\,d\xi,$$

pour n infiniment grand, sera égale à o.

Dans ce qui suit, je me propose d'abord de montrer comment, sans faire usage du théorème de Dirichlet, on peut immédiatement obtenir le corollaire, et ensuite, en faisant certaines hypothèses sur la nature de la fonction $f(\xi)$, comment on peut inversement déduire le théorème du corollaire.

Dès l'année 1860 on trouve une démonstration directe très élégante du corollaire dans un Mémoire de M. Scheibner ([1]), qui d'abord suppose que la fonction $f(\xi)$ est continue entre les limites d'intégration et reste toujours ou bien croissante, ou bien décroissante, et ensuite, en décomposant l'intervalle compris entre ces limites, étend la proposition à des fonctions qui ne présentent qu'un nombre fini d'oscillations finies et un nombre fini de valeurs maxima et minima. La démonstration que je donne ici est encore plus générale, car l'unique hypothèse que je fais est que $f(\xi)$ reste continue dans l'intervalle $\xi = (g \ldots h)$, en sorte que les fonctions continues admettant une infinité d'oscillations ne sont pas exclues.

II.

Comme point de départ prenons la formule

$$\int_\alpha^\beta \sin(2n+1)\xi\, d\xi = \frac{\cos(2n+1)\alpha - \cos(2n+1)\beta}{2n+1},$$

d'où l'on conclut que la valeur absolue de l'intégrale est $\leq \frac{2}{2n+1}$. On arrive au même résultat au moyen d'une considération géométrique. L'aire de la courbe

$$\eta = \sin(2n+1)\xi$$

est formée d'ondes de longueur $\frac{2\pi}{2n+1}$, où celles que l'on peut nommer les *collines* et les *vallées* ont même aire, à savoir $\frac{2}{2n+1}$. Comme collines et vallées sont situées alternativement de part et d'autre de l'axe des ξ, prises deux à deux ensemble, elles fournissent à l'intégrale

---

([1]) *Ueber unendliche Reihen und deren Convergenz.* Leipzig, Hirzel.

une contribution nulle et dans une sommation quelconque il reste au plus *une* aire (que l'on doit compter soit dans le sens positif, soit dans le sens négatif) égale à $\frac{2}{2n+1}$.

Si la fonction $\varphi(\xi)$ est continue dans l'intervalle $\xi=(g\ldots h)$, on sait qu'elle est aussi uniformément continue ([1]) dans cet intervalle, c'est-à-dire qu'en prenant une quantité positive ε suffisamment petite, on peut assigner un nombre r tel que, dans les r intervalles

$$\xi=\left(g\ldots g+\frac{h-g}{r}\right),\quad \left(g+\frac{h-g}{r}\ldots g+2\frac{h-g}{r}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\left(g+\lambda\frac{h-g}{r}\ldots g+[\lambda+1]\frac{h-g}{r}\right),\quad \left(g+[r-1]\frac{h-g}{r}\ldots h\right),$$

on ait

$$\varphi(\xi)=\varphi\left(g+\lambda\frac{h-g}{r}\right)+\varepsilon\,\mathfrak{I}_\lambda(\xi);$$
$$(\lambda=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1),$$

les fonctions $\mathfrak{I}_\lambda(\xi)$ vérifiant les inégalités

$$\mathfrak{I}_\lambda(\xi)<1.$$

On a par conséquent l'équation

$$\begin{aligned}\int_g^h &\sin(2n+1)\xi\,\varphi(\xi)\,d\xi\\ &=\sum_{\lambda=0}^{r-1}\varphi\left(g+\lambda\frac{h-g}{r}\right)\int_{g+\lambda\frac{h-g}{r}}^{g+(\lambda+1)\frac{h-g}{r}}\sin(2n+1)\xi\,d\xi\\ &\quad+\varepsilon\sum_{\lambda=0}^{r-1}\int_{g+\lambda\frac{h-g}{r}}^{g+(\lambda+1)\frac{h-g}{r}}\sin(2n+1)\xi\,\mathfrak{I}_\lambda(\xi)\,d\xi.\end{aligned}$$

([1]) *Voir* U. DINI, *Teorica delle funzioni di variabili reali*, § 41 (Pisa, 1878), contenant une démonstration due à M. G. Cantor.

Dans la première somme, chacune des r intégrales est en valeur absolue $\leqq \frac{2}{2n+1}$; dans la seconde, comme la quantité sous le signe d'intégration est, abstraction faite du signe, < 1, chacune des r intégrales prise en valeur absolue est plus petite que l'intervalle d'intégration, c'est-à-dire $< \frac{h-g}{r}$. Soit alors M le maximum de la valeur absolue de $\varphi(\xi)$ dans l'intervalle $\xi = (g \ldots h)$, on aura toujours

$$\left| \int_g^h \sin(2n+1)\xi\, \varphi(\xi)\, d\xi \right| < \mathrm{M} \frac{2r}{2n+1} + \varepsilon(h-g).$$

Si pour une valeur donnée de la quantité ε à laquelle il faut adjoindre un nombre r, on choisit $2n+1$ suffisamment grand, par exemple

$$2n+1 \geqq r^2,$$

on peut, en faisant décroître ε, rendre la valeur absolue de l'intégrale

$$\int_a^b \sin(2n+1)\xi\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

plus petite que toute quantité positive donnée δ, c'est-à-dire que l'on aura

$$(\mathrm{L}) \qquad \lim_{n=\infty} \int_g^h \sin(2n+1)\xi\, \varphi(\xi)\, d\xi = 0.$$

On peut rendre intuitive, par une interprétation géométrique, la condition de choisir $2n+1$ grand par rapport au nombre r.

En partageant l'intervalle $\xi = (g \ldots h)$ en un grand nombre de petits intervalles, la fonction $\varphi(\xi)$ dans chaque intervalle partiel éprouve une oscillation au plus égale à 2ε, et par conséquent est près d'être constante. En prenant alors $2n+1$ suffisamment grand par rapport à r, on fait devenir le nombre des ondulations qui remplissent chaque intervalle très grand, quoique l'intervalle soit très petit.

Mais comme collines et vallées apportent à l'intervalle des quantités qui se détruisent, la contribution qu'apporte un intervalle partiel à la valeur totale de l'intégrale est une quantité tellement petite que la somme de r pareilles quantités est elle-même une très petite quantité. De cette manière on se figure très bien comment il se fait que la valeur de l'intégrale devient de plus en plus petite pour les valeurs de plus en plus grandes du nombre n.

III.

Lorsque la fonction $f(\xi)$ est continue dans l'intervalle $\xi = (g \ldots h)$, il en est de même de la fonction

$$\varphi(\xi) = \frac{f(\xi)}{\sin \xi},$$

tant que l'on a $g > 0$, $\frac{\pi}{2} \leqq h > g$, g pouvant tendre d'ailleurs vers zéro, mais étant différent de zéro, et par suite alors de l'équation (L) résulte immédiatement le corollaire de Dirichlet :

$$\lim_{n=\infty} \int_g^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin \xi} f(\xi)\, d\xi = 0,$$

qui est ainsi démontré pour toutes les fonctions *continues* $f(\xi)$.

La question éprouve une modification essentielle lorsque l'on fait $g = 0$ dans l'équation (L); en effet, il n'est plus permis alors de poser

$$\varphi(\xi) = \frac{f(\xi)}{\sin(\xi)},$$

car pour $\xi = 0$ la continuité peut cesser d'avoir lieu, $\sin\xi$ étant nul. Pour que l'équation (L) soit encore exacte, il faut que le numérateur de $\varphi(\xi)$ soit aussi égal à zéro pour $\xi = 0$.

Or nous pouvons remplir cette condition; écrivons l'intégrale

$$\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi} f(\xi)\, d\xi$$

sous la forme

$$f(0)\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}\, d\xi + \int_0^h \sin(2n+1)\xi\, \frac{f(\xi)-f(0)}{\sin\xi}\, d\xi.$$

Le simple examen de cette expression fournit ce théorème :

Si la fonction $f(\xi)$ est telle que non seulement $f(\xi)$, mais encore le quotient

$$\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi},$$

soit continu dans l'intervalle $\xi = (0 \ldots h)$, $h \leqq \frac{\pi}{2}$, on a l'équation

$$\lim_{n=\infty} \int_0^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}\, d\xi$$
$$= f(0) \lim_{n=\infty} \int_0^h \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}\, d\xi = \frac{\pi}{2} f(0).$$

D'où résulte ce théorème :

Une fonction continue $f(x)$ peut toujours être développée en série de Fourier dans tout intervalle où elle a une dérivée première finie.

[E1] [H5f]

SUR LA CONVERGENCE DE LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE;

Par M. Maurice GODEFROY,
Bibliothécaire de la Faculté des Sciences de Marseille.

Si l'on regarde la fonction $\Gamma(x)$ comme étant la limite, pour $n=\infty$, du produit

$$\Pi(x) = n^x \frac{1.2\ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n)},$$

on en déduit sans peine que l'expression

$$\frac{1}{n^x}\,\frac{\Gamma(x+n)}{1.2\ldots(n-1)}$$

tend vers l'unité quand n augmente indéfiniment. Ce résultat, dû à Weierstrass, non seulement a de l'importance au point de vue de la théorie de la fonction gamma, mais il fournit en outre un procédé commode pour la discussion de certaines séries dont les termes sont formés avec des factorielles. A cette catégorie appartiennent les séries considérées par Stirling et la série hypergéométrique. Je me bornerai au cas de la série hypergéométrique, qui, je crois, n'a pas encore été étudiée de cette manière.

Soit donc

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots$$

la série hypergéométrique de Gauss, les paramètres α, β, γ étant réels ou complexes mais non égaux à des entiers négatifs. Le terme général de cette série

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n$$

est égal, comme on le constate facilement, au produit des deux expressions

$$n^{\alpha+\beta-\gamma-1}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^n,$$

et

$$\left[\frac{1}{n^\alpha}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{1.2\ldots(n-1)}\frac{1}{n^\beta}\frac{\Gamma(\beta+n)}{1.2\ldots(n-1)}\right]:\left[\frac{1}{n^\gamma}\frac{\Gamma(\gamma+n)}{1.2\ldots(n-1)}\right],$$

cette dernière ayant pour limite l'unité lorsque n devient infini. Or, si a, b, c sont les parties réelles des paramètres α, β, γ, le module de l'exponentielle $n^{\alpha+\beta-\gamma-1}$ est $n^{a+b-c-1}$; par conséquent, on peut poser

$$|u_n| = \lambda_n n^{a+b-c-1}|x|^n,$$

en désignant par λ_n un coefficient qui tend vers une limite pour $n=\infty$. Le rayon de convergence est évidemment l'unité; il reste à examiner la nature de la série aux extrémités de son intervalle de convergence. Trois hypothèses sont alors à distinguer :

1° $a+b-c-1>0$. — Les modules des termes augmentent indéfiniment.

2° $a+b-c-1=0$. — Les modules des termes tendent vers une limite non nulle.

3° $a+b-c-1<0$. — Les modules des termes tendent vers zéro.

La série des modules est convergente quand a, b, c vérifient l'inégalité

$$a+b-c<0,$$

et seulement dans ce cas, car

$$n^{c-b-a+1}|u_n| = \lambda_n.$$

[F]

EXERCICES ET LECTURES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES (PRÉPARATION A L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES);

NOTES RÉUNIES PAR M. A. B.

---

1. Trouver les périodes principales du réseau dérivé des deux périodes $2+26i$ et $1+15i$.

(C. JORDAN, *Conf. de l'École Polytechn.*)

2. Représenter par des graphiques en perspective cavalière l'ensemble des valeurs réelles de pu dans le cas du discriminant positif et dans le cas du discriminant négatif.

3. Construire la courbe $y = \zeta x$, les invariants g_2 et g_3 étant réels.

4. La surface

$$\operatorname{tn} y \operatorname{tn} z + \operatorname{tn} z \operatorname{tn} x + \operatorname{tn} x \operatorname{tn} y + 3 = 0$$

$\left(\text{où } \operatorname{tn} u = \dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} \text{ et } k = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}\right)$ est une surface minima.

(GREENHILL, *Fonct. ellipt.*, p. 37.)

5. *Arrière-voussure de Saint-Antoine.* — On donne une ellipse dont un axe OC est vertical, et un rectangle horizontal dont les côtés opposés MN, PQ ont respectivement pour milieux les extrémités B et B' de l'axe horizontal de l'ellipse; la surface de l'arrière-voussure est engendrée par une ellipse variable dont le plan reste normal à la droite BB' et dont les sommets sont les points où ce plan rencontre l'ellipse BOC et les côtés opposés MQ et NP du rectangle :

1° Déterminer les asymptotiques de cette surface;

2° Rapporter la surface à ses asymptotiques.

Prenant pour axe des x la droite OB, pour axe des z la droite OC (axes rectangulaires), et posant : $BB' = 2a$, MN $= 2b$, OC $= c$, on a

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\frac{a}{2}\left(\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} v}+\frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{cn} u}\right) \\ y &= \pm\frac{b}{2}\left(\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v \operatorname{dn} u}+\frac{\operatorname{sn} v \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} v}\right) \\ z &= \pm\frac{c}{4}\,\frac{(\operatorname{cn}^2 u-\operatorname{cn}^2 v)^2}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v} \end{aligned}\right\} \quad \left(k=\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

les asymptotiques étant les lignes $u =$ const. et $v =$ const.

[E. Rouché, *Sur les lignes asymptotiques d'une surface du quatrième degré* (*Comptes rendus*, t. LXXXIV).]

(L'intéressant calcul qui conduit au résultat énoncé n'a jamais été publié.)

6. Soit $f(z)$ une fonction elliptique du second ordre dont l'une des périodes est 2ω. Les n quantités

$$f(z),\quad f\left(z+\frac{2\omega}{n}\right),\quad \ldots,\quad f\left(z+\frac{n-1}{n}2\omega\right)$$

sont racines d'une équation en θ de la forme

$$P(\theta)+\lambda(z)\,Q(\theta)=0,$$

$P(\theta)$ et $Q(\theta)$ désignant deux polynomes de degré n à coefficients constants.

(R. Bricard, *Société math. de France*, t. XXVI, 1898, p. 92.)

Ce théorème est susceptible d'applications géométriques.

(*Ibid.*, p. 96.)

7. Toute fonction elliptique d'ordre n, $f(u)$ est représentable par le quotient de deux expressions de la forme

$$a_0 + a_1\,p(u+h) + a_2\,p'(u+h) + \ldots + a_{n-1}\,p^{(n-2)}(u+h),$$

h et les a_i désignant des constantes convenables.

Ce mode de représentation est valable, que les zéros ou les pôles de $f(u)$ soient distincts ou non.

[P. Painlevé, *Sur la représentation des fonctions elliptiques* (*Société math. de France*, t. XXVII, déc. 1899, p. 300).]

8. Appliquer le théorème de M. Painlevé à l'établissement de la formule

$$\frac{p'u - p'v}{pu - pv} + \text{const.}$$
$$= \frac{2p'\frac{v}{2}}{p\left(u_0 + \frac{v}{2}\right) - p\left(\frac{v}{2}\right)} \frac{p\left(u + \frac{v}{2}\right) - p\left(u_0 + \frac{v}{2}\right)}{p\left(u + \frac{v}{2}\right) - p\left(\frac{v}{2}\right)},$$

où u_0 désigne un zéro du premier membre.

Cette formule a été utilisée en particulier par M. Andrade dans sa thèse citée plus loin (n° 34).

9. Décomposer en éléments simples les fonctions

$$\frac{1}{pu - e_\alpha}, \quad \frac{1}{pu - pv} \quad (v = \text{const.}), \qquad \frac{1}{p'^2 u}, \quad \frac{pu}{p'u}.$$

10. Intégrer au moyen des fonctions elliptiques

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{(ax+b)\,dx}{(x-1)\sqrt{x^3-1}} \\ \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^3-x}} \\ \displaystyle\int \frac{(ax^2+b)\,dx}{\sqrt{x^4+1}} \end{array}\right\} \quad \text{(fonctions de Weierstrass),}$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^4-1}} \qquad \text{(fonctions de Jacobi).}$$

(G. Humbert, *Conf. de l'École Polytechn.*)

11. Réduire au type canonique de Jacobi les intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pm[(x-\alpha)^2+\beta^2][(x-a)^2 \pm b^2]}},$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pm(x-a)[(x-\alpha)^2+\beta^2]}},$$

en posant $x = \alpha + \beta \operatorname{tang}(\varphi + \varphi_1)$ et en choisissant φ_1 de manière que la différentielle à intégrer prenne la forme

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{A + B\cos 2\varphi}}.$$

Appliquer à

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\pm(x^4-1)}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\pm(x^3+1)}}.$$

(Comte MAGNUS DE SPARRE, *Société scientifique de Bruxelles*, 1885.)

12. *Aire de l'ellipsoïde.* — 1° Aire comprise sur un ellipsoïde quelconque entre deux sections planes le long desquelles on peut circonscrire à l'ellipsoïde un cône de révolution, c'est-à-dire entre deux sections planes dont les pôles sont sur l'hyperbole focale (zone d'Humbert).

2° Le lieu des points d'un ellipsoïde où la normale fait avec l'un des axes principaux de la surface un angle donné, se compose de deux boucles fermées, symétriques par rapport au centre. Aire comprise sur l'ellipsoïde à l'intérieur d'une de ces boucles (zone de Lebesgue et de Gellett). En déduire l'aire de l'ellipsoïde entier.

[G. HUMBERT, *Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie* (*Journal de Mathématiques,* 1890, p. 243 et 255; *voir* aussi *Comptes rendus,* t. CIX, 1889, p. 611).]

13. *Rectification de courbes.* — 1° Rectifier l'arc d'ellipse en utilisant les fonctions de Weierstrass. En déduire le théorème de Fagnano.

(L. LÉVY, *Précis des Fonct. ellipt.,* p. 145.)

2° Rectifier l'arc de lemniscate

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$$

en prenant le rayon vecteur ρ pour variable indépendante.

3° On considère la cubique

$$x = -\frac{9}{pu}, \qquad y = \frac{p'u}{2pu}$$

($g_2 = 0$, $g_3 = -27$; axes rectangulaires).

Exprimer son élément d'arc en fonction de u.

Exprimer l'élément d'arc de sa transformée par inversion par rapport à l'origine suivant le module 1, aussi en fonction de u.

Trouver, en fonction de u, les coordonnées d'un point de cette transformée. Démontrer que tout cercle passant par l'origine O des axes détermine sur cette transformée, dite *courbe en trèfle*, trois arcs OA, OB, OC dont le plus grand est égal à la somme des deux autres.

(G. HUMBERT, *Journal de Mathématiques*, 1887, p. 394.)

14. *Lignes géodésiques*. — 1° De l'ellipsoïde de révolution aplati; 2° de la surface de vis à filet carré.

15. On donne un ellipsoïde d'axes $2a$, $2b$, $2c$ $(a > b > c)$ liés par la relation $2b^2 = a^2 + c^2$. Déterminer sur sa surface les lignes qui, en chacun de leurs points, sont tangentes aux diagonales du rectangle des axes de l'indicatrice en ce point.

(X. STOUFF, *Nouvelles Annales de Math.*, 1896.)

16. Sur l'équation d'Euler et son intégration algébrique.

[Lire la Note de M. LACOUR (*Nouv. Annales*, 1899, p. 293).]

17. *Théorèmes de Poncelet*. — S'il existe un polygone P de n côtés inscrit dans une conique S et circonscrit à une autre conique T, il existe une infinité de polygones analogues de n côtés.

Si n est pair, les droites qui joignent deux sommets opposés passent par un centre de sécantes communes des deux coniques.

Soit $\Delta(\lambda)$ le discriminant de la forme $T + \lambda S$; démontrer que, si l'on développe $\sqrt{\Delta(\lambda)}$ suivant les puissances positives croissantes de λ sous la forme

$$\sqrt{\Delta(\lambda)} = A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 + E\lambda^4 + \ldots,$$

la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un polygone P est

$$\begin{array}{lcc} C = 0 & \text{pour} & n = 3, \\ D = 0 & \text{»} & n = 4, \\ \begin{vmatrix} C & D \\ D & E \end{vmatrix} = 0 & \text{»} & n = 5, \\ \begin{vmatrix} D & E \\ E & F \end{vmatrix} = 0 & \text{»} & n = 6. \end{array}$$

(CAYLEY, *Mathematical Papers*.)

Développer les calculs dans le cas de deux cercles; décomposition des équations de condition.

(Lire sur ce sujet un intéressant article de M. LELIEUVRE (*Enseignement mathématique*, 1900, p. 410-423).]

18. Soit une cubique dont les trois asymptotes sont inflexionnelles et concourent en un même point O; une droite quelconque la coupe en trois points M_1, M_2, M_3. Si la droite se déplace, la somme algébrique des aires balayées par les rayons vecteurs OM_1, OM_2, OM_3 est nulle (c'est-à-dire que la plus grande de ces aires est égale à la somme des deux autres).

(G. HUMBERT, *Cours de l'École Polytechn.*)

19. *Obtention de la représentation paramétrique elliptique :* 1° d'une cubique plane; 2° d'une quartique à deux points doubles; 3° de la polaire réciproque d'une cubique.

(HERMITE, *Cours d'Analyse de l'École Polytechn.*, Ire Partie, p. 422, 425-427.)

20. La thèse du R. P. d'Esclaibes *Sur l'application des fonctions elliptiques aux courbes de genre* UN (1880) contient un Chapitre consacré aux propriétés des cubiques planes. L'étude des points remarquables y est déduite de la formule de Kiépert : Points d'inflexion, leur disposition; points sextactiques; points situés sur une conique.

Polygones de Steiner. — Inscrire dans une cubique des polygones d'un nombre pair de côtés et tels que les côtés de rang impair concourent en un point fixe de la courbe, et de même les côtés de rang pair en un autre point fixe.

Points correspondants ou *points dont les arguments elliptiques ont une différence constante.* — L'enveloppe des droites qui joignent deux points correspondants est une courbe de sixième classe et de douzième ordre, tangente à la cubique en dix-huit points; cette courbe admet neuf tangentes doubles dont chacune passe par un point d'inflexion.

21. Traiter à l'aide des fonctions de Weierstrass la question proposée comme problème de Mathématiques spéciales au Concours de l'École Normale en 1900 [*Propriétés des cercles bitangents à la cubique :* $x(x^2+y^2)=a^3$].

22. Pour la cubique, lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère, l'invariant absolu reste le même quand on déforme le quadrilatère.

23. Il y a neuf systèmes de coniques biosculatrices à une cubique S : la droite qui joint les points de contact avec S des coniques d'un même système passe par un des neuf points d'inflexion.

Soit I ce point :

1° Par un point quelconque A du plan passent trois coniques biosculatrices du même système; ces coniques ont un second point commun B situé sur la droite AI ; les six points de contact de ces trois coniques avec S sont sur une conique qu'on appellera *conique polaire* de A ; A sera dit le *pôle* de cette conique; il est clair que B est également un pôle de la conique et que toute conique polaire a ainsi deux pôles;

2° Toute conique polaire passe par ses pôles;

3° Les coniques polaires des points d'une conique polaire passent par les pôles de celle-ci ;

4° Les pôles des coniques polaires menées par un point sont sur la conique polaire de ce point;

5° Si un point décrit une droite passant par I, sa conique polaire reste bitangente à une conique fixe; les deux points de contact sont sur la tangente en I à la cubique S;

6° Quand un point décrit une conique C biosculatrice à S, du système considéré, sa conique polaire reste bitangente à une cubique fixe, osculatrice à S au point I et aux deux points de contact de S et de C;

7° Supposons qu'un point A décrive une conique C ; soient C′ et C″ les deux autres coniques biosculatrices du même système passant par A ; elles se coupent aux deux points A et B qui décrivent C, et en deux autres points qui décrivent la cubique du 6° ;

8° Les coniques polaires qui passent par un point touchent en deux points une cubique osculatrice à S au point I.

(On utilisera l'équation normale de la cubique

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

en prenant le point I à l'infini sur Oy.)

(G. Humbert, Thèse sur les *Courbes de genre* UN; 1885.)

24. Théorèmes de Steiner sur les coniques surosculatrices à une quartique de genre *un*.

(D'ESCLAIBES, *Thèse*.)

25. *Points d'une quartique de genre* UN, *conjugués dans un système* S, *ou points dont les arguments elliptiques ont une somme* S. — Ce mode de conjugaison est indépendant du mode de représentation employé.

La droite qui joint deux points conjugués dans un système donné enveloppe une conique.

Le conjugué harmonique par rapport à deux points conjugués dans un système S, du point où la droite qui les joint coupe une droite fixe, décrit une courbe unicursale d'ordre quatre.

Ce lieu est une conique pour quatre positions particulières de la droite fixe.

Si S est une demi-période, la droite qui unit deux points conjugués passe par un point fixe.

(G. HUMBERT, Thèse sur les *Courbes de genre* UN.)

26. Soit la courbe C :

$$(x^2+y^2)^2 - 2a(x^2+y^2)(x+y) + a^2(x+y)^2 - 2a^3y = 0.$$

1° Exprimer les coordonnées x, y d'un point quelconque en fonction elliptique d'un paramètre u.

2° Déterminer tous les couples de quadriques dont l'intersection se projette suivant C.

3° Condition pour que quatre points de C soient sur un cercle. Soient U_1, U_2, U_3, U_4 ces quatre points; si par U_1 et U_2 on fait passer une droite ou un cercle, et par U_3 et U_4 une autre droite ou un autre cercle, on obtient chaque fois deux autres points d'intersection, soit V_1, V_2, V_3 et V_4 : ces quatre points V sont sur un même cercle.

4° Il y a quatre familles de cercles bitangents à C. Déterminer l'ordre, la classe, le genre de l'enveloppe des cordes de contact de chaque famille. Établir que chaque corde de contact coupe la courbe en deux autres points qui sont les points de contact d'un cercle bitangent de la même famille.

5° Quel est le nombre des cercles bitangents à C tangents en un point U_0? Si U_1 et U_2 sont les deux autres points de contact respectifs de deux de ces cercles, trouver l'ordre et la classe de l'enveloppe de la corde U_1U_2 quand U_0 varie.

6° Nombre des cercles osculateurs passant par un point U_0 de C; U_1 et U_2 étant les points de contact de deux de ces cercles, ordre et classe de l'enveloppe de la corde U_1U_2.

7° Nombre des cercles surosculateurs à C; les points de surosculation sont quatre à quatre sur des cercles.

(P. Painlevé, *Exercice proposé aux élèves de l'École Normale.*)

(On utilisera le mode de représentation de M. Painlevé indiqué au n° 7.)

27. *Étude de la biquadratique gauche, avec les notations de Jacobi.* — La plupart des résultats attribués à Harnack ont été publiés six mois avant le Mémoire de ce géomètre par M. Léauté. Les *Nouvelles Annales* ont reproduit ces propriétés sous forme de questions proposées sous les n°s 1901 et 1907 (année 1901).

[H. Léauté, *Étude géométrique sur les fonctions elliptiques de première espèce* (*Comptes rendus*, septembre 1876; *Journal de l'École polytechnique,* Cahier XLVI, 1879).]

28. Appliquer les fonctions elliptiques à la résolution du problème proposé dans les *Nouvelles Annales,* 1897, p. 287, et relatif à une biquadratique gauche définie numériquement.

29. *Étude de la surface gauche du quatrième ordre à deux directrices rectilignes* DOUBLES *distinctes.* — 1° En prenant les droites doubles pour arêtes opposées du tétraèdre de référence ($x=0$, $y=0$) et ($z=0$, $t=0$), on peut disposer des faces de ce tétraèdre de manière à donner à la surface la représentation paramétrique

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{\operatorname{sn} u}=\frac{z}{v\operatorname{sn}(u-\alpha)}=\frac{t}{v},$$

où u et v sont les variables, et α une constante.

Équation ponctuelle de la surface.

2° Génératrices rectilignes remarquables de la surface.

3° Quadriques inscrites dans la surface.

4° Les asymptotiques de la surface sont des courbes algébriques du huitième ordre qui divisent harmoniquement les génératrices de la surface.

5° Condition pour que quatre génératrices rectilignes appartiennent à une même quadrique. Quadriques touchant suivant deux droites, osculatrices, surosculatrices.

[E. ROUYER, *Sur les surfaces réglées du quatrième degré* (*Annales de Toulouse,* 1900, p. 163).]

30. Cayley a donné le nom de *tétraèdroïde* à la transformée homographique de la surface des ondes. Il y a sur cette surface huit coniques, situées deux à deux dans quatre plans; dans chacun de ces plans, les points communs à deux coniques sont des points doubles de la surface.

L'étude de cette surface au moyen des notations de Weierstrass a formé le sujet d'un concours des *Nouvelles Annales.* Lire la solution de M. Raoul Bricard.

(*Nouvelles Annales,* 1899, p. 197.)

31. Étudier le mouvement du pendule simple en utilisant les notations de Weierstrass.

32. Étudier le mouvement du pendule sphérique en utilisant les notations de Jacobi.

(MATHIEU, *Dynamique analytique,* p. 105.)

33. Le mouvement d'un point sur une sphère

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

dans le cas de la fonction de forces

$$U = Ax^2+B(y^2+z^2)$$

se ramène aux fonctions elliptiques. (Equation de Lamé dans le cas le plus simple de $n=1$.)

(G. KOBB, *Comptes rendus,* t. CVIII, p. 560.)

34. Mouvement d'un point soumis à l'attraction newtonienne de deux points fixes. Réduction aux quadratures. Inversion.

(J. ANDRADE, Thèse, *Journal de l'École Polytechnique,* 60e Cahier, 1890, p. 19-46.)

35. Mouvement d'un corps pesant, homogène, de révolution, suspendu par un point de son axe. Emploi des notations de Jacobi.

(MATHIEU, *Dynamique analytique,* p. 147.)

36. Même question. Substitution des paramètres de Klein aux angles d'Euler ; expressions elliptiques de ces divers paramètres.

(Lacour, *Nouvelles Annales,* 1899, p. 543-553.)

37. Mouvement à la Poinsot dans le cas d'une quadrique roulante quelconque. Formules elliptiques pour le mouvement et pour les cosinus directeurs des axes.

(Lacour, *Annales de l'École Normale,* 1900, p. 281.)

38. Mouvement d'un corps solide de révolution fixé par un point de son axe; chaque point de ce corps homogène est soumis à une force constante, à une force dirigée vers le point fixe et proportionnelle à la distance à ce point fixe, et à une force proportionnelle à la distance à un plan fixe normal à la direction de la force constante.

(Nanny Lagerborg, *Bulletin de la Société mathématique de France,* 1890.)

39. Forme d'équilibre d'un fil homogène pesant sur une sphère. Expressions des coordonnées d'un point du fil et de l'arc au moyen des fonctions de Jacobi.

(P. Appell, *Société mathématique de France*, 1885.)

40. Courbe plane dont le rayon de courbure est inversement proportionnel à l'abscisse. Déterminer les constantes par la condition que la courbe passe par l'origine et y touche l'axe des x. Forme et propriétés de la courbe. (Elastique plane sans pression.)

41. Élastique gauche : hélice soumise à l'action d'un couple, cas particulier de B. Elie.

(Elie, *Nouvelles Annales,* 1901, p. 307-313.)

42. *Calculs numériques; usage des Tables.* — 1° Une ellipse a pour demi-axes $OA = 2$ et $OB = \sqrt{2}$. Calculer l'arc BM, le point M ayant pour abscisse $x = 1$.

2° L'angle initial d'un pendule simple de longueur $\frac{1}{2}.9^m,088$ est de 60°. Calculer la durée d'une oscillation simple. Au bout de combien de temps le pendule fait-il, pour la première fois, un angle de 30° avec la verticale.

(G. Humbert, *Cours d'Analyse de l'École Polyt.*)

3° Résoudre au moyen des fonctions elliptiques l'équation

$$x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 23x - 6 = 0.$$

(L. Lévy, *Précis*, p. 154.)

4° Calculer la surface totale d'un ellipsoïde dont les demi-axes sont $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$.

[H8]

SUR LES GROUPES QUI DÉPENDENT DE FONCTIONS ARBITRAIRES;

Par M. H. Laurent.

Considérons une équation linéaire aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \mathrm{A}f = 0$$

où l'on a posé

$$\mathrm{A}f = \mathrm{A}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathrm{A}_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \mathrm{A}_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$ désignant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il est facile de voir que cette équation admet un groupe très général de substitutions. Si, en effet, on substitue aux x de nouvelles variables y, l'équation (1) devient

$$\mathrm{A}y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \mathrm{A}y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \ldots + \mathrm{A}y_n \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0;$$

et elle restera invariante, si l'on a

$$(2) \qquad \mathrm{A}y_1 = \lambda \mathrm{B}_1, \qquad \mathrm{A}y_2 = \lambda \mathrm{B}_2, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{A}y_n = \lambda \mathrm{B}_n,$$

$\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_n$ désignant ce que deviennent $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$, quand on y remplace x_1 par y_1, x_2 par y_2, ..., [plus généralement : $\mathrm{A}f = 0$ se transformera en $\mathrm{B}f = 0$, si les relations (2) ont lieu quels que soient les B supposés donnés en $y_1, y_2, \ldots, y_n$]; λ est alors un facteur quelconque.

Les équations (2) sont d'un type remarquable, considéré par Jacobi; on les intègre en posant (*voir* mon *Traité d'Analyse*, t. VI)

$$\text{(3)} \qquad \frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n} = \frac{dy_1}{\lambda B_1} = \ldots = \frac{dy_n}{\lambda B_n},$$

et si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n-1}$ sont les fonctions qui, égalées à des constantes arbitraires, représentent les intégrales de ce système (3) (où λ est quelconque)

$$\text{(4)} \qquad \Phi_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n-1}) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n-1}) = 0,$$

les Φ désignant des fonctions arbitraires, seront les intégrales générales de (2).

Or, les équations (3) peuvent s'intégrer en considérant à part les systèmes

$$\text{(5)} \qquad \frac{dx_1}{A_1} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n}$$

et

$$\text{(6)} \qquad \frac{dy_1}{B_1} = \ldots = \frac{dy_n}{B_n},$$

dont les intégrales sont respectivement de la forme

$$X_1 = \text{const.}, \qquad \ldots; \qquad X_{n-1} = \text{const.}$$

et

$$Y_1 = \text{const.}; \qquad \ldots, \qquad Y_{n-1} = \text{const.},$$

les Y ne différant des X que parce que x_1 y est remplacé par y_1, x_2 par y_2, ...

A ces formules il faudra adjoindre une dernière équation de la forme

$$X_n = Y_n + \text{const.}$$

obtenue en intégrant une dernière équation de la forme

$$dx_1 . F(x_1) = dy_1 . G(y_1),$$

X_n ne dépendra que des x et Y_n que des y ; j'ajoute que, si l'on prend $\lambda = 1$, X_n et Y_n ne différeront l'un de l'autre que parce que x_1 y sera remplacé par y_1, etc. Alors la *substitution laissant* $Af = 0$ *invariante sera de la forme*

$$(7)\qquad \begin{cases} Y_1 = \psi_1(X_1, \ldots, X_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_{n-1} = \psi_{n-1}(X_1, \ldots, X_{n-1}), \\ Y_n = X_n + \psi_n(X_1, \ldots, X_{n-1}). \end{cases}$$

les ψ *désignant des fonctions arbitraires. En général on a*

$$X_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = Y_i(y_1, \ldots, y_n),$$

excepté si $i = n$, *mais si cette formule a encore lieu pour* $i = n$, *ce n'est plus seulement l'équation* $Af = 0$ *qui sera invariante, mais l'expression elle-même* Af *restera invariante.*

On voit aussi qu'il existe une substitution très générale changeant Af en Bf ou $Au = 0$ en $Bu = 0$, les A et les B étant donnés.

Le groupe qui laisse $Af = 0$ invariante permute évidemment les intégrales les unes dans les autres : c'est ce qui est évident à l'inspection des formules (7).

Cette propriété dont jouissent les équations linéaires à une inconnue, de posséder un groupe qui les laisse invariantes, appartient exclusivement à ces équations, en ce sens toutefois que ce ne sont que des équations très particulières parmi les équations non linéaires ou linéaires simultanées, qui jouissent de cette propriété.

Le groupe qui laisse $Af = 0$ invariante contient d'autres groupes qui laissent $Af = 0$ invariante en même temps que d'autres équations $A'f = 0$, $A''f = 0$, formant avec $Af = 0$ un système complètement intégrable; ces sous-groupes permutent les intégrales communes.

Le problème que nous venons de résoudre conduit à une autre question intéressante; il nous a conduit à résoudre des équations de la forme

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x_1, \ldots, x_n)\dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} = A_1(y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x_1, \ldots, x_n)\dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} = A_n(y_1, \ldots, y_n), \end{array}\right.$$

les y étant les inconnues. On peut les considérer à un autre point de vue, et les y étant censés connus en fonction des x, on peut se demander quelle est la forme qu'il faut donner aux A pour satisfaire à ces équations (8).

Supposons que la substitution s qui définit les y en fonction des x fasse partie d'un groupe à un paramètre t défini symboliquement par sa substitution infinitésimale Xf, s laissera invariante l'équation $Af = 0$. Si l'on a

$$(XA - AX)f = hAf,$$

c'est-à-dire si l'on a

$$XA_i - AX_i = hA_i,$$

ces équations forment un système d'équations de Jacobi analogue à celui que nous avons rencontré dans la solution du problème inverse; les A sont donc déterminés et l'on connaît des équations $Af = 0$ que la substitution s laisse invariantes, en sorte que s change Af en λAf; alors s changera μAf en $\nu\lambda Af$, en changeant μ en ν. Si alors $\mu = \lambda\nu$, s changera μAf en μAf, ou laissera μAf invariant, il reste donc à trouver une fonction μ que s change en $\frac{\mu}{\lambda}$.

Le problème que nous voulons résoudre admettra donc une solution. Si la substitution donnée fait partie d'un groupe à un paramètre, nous sommes ainsi conduits à résoudre cet autre problème :

Étant donnée une substitution s, trouver le ou les groupes à un paramètre dont elle fait partie.

Considérons la substitution

$$(9) \qquad y_1 = \varphi_1, \qquad y_2 = \varphi_2, \qquad y_n = \varphi_n,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ désignent des fonctions des $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Soit

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

une équation aux dérivées partielles admettant les intégrales $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$; on peut en trouver une dernière intégrale fonction de $x_1, \ldots, x_n$ et t, se réduisant pour $t = 0$ à $\varphi_n(x_1, \ldots, x_n)$. Soit $y_n = \psi(x_1, \ldots, x_n, t)$ cette intégrale; la substitution

$$y_1 = \varphi_1, \qquad \ldots, \qquad y_{n-1} = \varphi_{n-1}, \qquad y_n = \psi$$

sera la substitution générale d'un groupe à un paramètre qui, pour $t = 0$, fournira la substitution (9).

J'ai dit tout à l'heure que les équations non linéaires n'admettaient pas, en général, de substitutions; je vais le prouver en montrant quelle est la classe très restreinte des équations du premier ordre qui jouissent de cette propriété.

Si l'équation

$$(10) \qquad f(x_1, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

où $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, admet une substitution s,

$$(11) \quad y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \qquad \ldots, \qquad y_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_n),$$

il existe une équation linéaire et homogène (F) admettant la substitution s, et si l'on fait subir un changement de variable t à l'équation (10), elle admettra, après ce changement, la substitution s également, car s changeant par exemple l'intégrale α en α', α' en α'', ..., t changera β intégrale de la transformée (F) en β, st changera α' en une intégrale β' de (F), ...; donc s changera β en β', β' en β'', ...; il existera donc une équation (F) linéaire ayant avec (10), si l'on veut, l'intégrale commune β et les intégrales β', β'', ...

Donc une équation telle que (10), admettant une substitution s, a une série d'intégrales communes avec une équation linéaire. Elle n'est donc pas quelconque; il y a plus : si l'équation (10) admet un groupe à un paramètre, elle aura une intégrale renfermant une constante arbitraire commune avec une équation linéaire, et il est d'ailleurs facile de vérifier par le calcul que, si $f = 0$ admet la substitution infinitésimale Xf, on a

$$\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial\Omega}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial\Omega}{\partial x_i}\right) = \lambda f$$

en posant

$$\Omega = p_1 X_1 + \ldots + p_n X_n.$$

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1897);

Solution de la question d'Analyse par un Correspondant.

On donne l'équation aux dérivées partielles

$$p^2 + q^2 + (px + qy - z)^2 = F\left(\frac{x^2 + y^2 + 1}{z^2}\right),$$

où p et q désignent les dérivées partielles du premier ordre de z considéré comme fonction de x et y.

1° *Former les équations des caractéristiques et prouver que ces équations admettent deux intégrales qui ne dépendent pas de la forme de la fonction* F.

2° *Déduire du résultat obtenu que les courbes caractéristiques sont planes et que les développables caractéristiques sont des cônes. Dire quelle relation existe entre le plan d'une courbe caractéristique et le sommet du cône caractéristique circonscrit suivant cette courbe.*

3° *Indiquer comment on pourra utiliser ces résultats pour intégrer complètement l'équation proposée.*

4° *On mènera l'intégration jusqu'au bout dans le cas particulier où la fonction* F *a la forme*

$$A\frac{x^2+y^2+1}{z^2}+B,$$

A *et* B *désignant deux constantes. Montrer que, dans ce cas, une intégrale complète est fournie par une surface du second degré dépendant de deux paramètres.*

Posons

$$u = px+qy-z, \qquad s=\frac{x^2+y^2+1}{z^2}.$$

L'équation à intégrer s'écrit

$$p^2+q^2+u^2 = F(s).$$

1° Les équations différentielles des bandes caractéristiques sont

$$\frac{dx}{dt}=p+ux, \qquad \frac{dp}{dt}=\frac{F'(s)}{z}\left(\frac{x}{z}-sp\right),$$
$$\frac{dy}{dt}=q+uy, \qquad \frac{dq}{dt}=\frac{F'(s)}{z}\left(\frac{y}{z}-sq\right).$$
$$\frac{dz}{dt}=F(s)+uz,$$

On en déduit

$$\frac{du}{dt} = x\frac{dp}{dt} + y\frac{dq}{dt} = -\frac{F'(s)}{z}\left(su + \frac{1}{z}\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} + x\frac{du}{dt} + u\frac{dx}{dt} = \left[-\frac{sF'(s)}{z} + u\right]\frac{dx}{dt}.$$

Par suite,

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \text{const.} = -\cot\omega.$$

On a dès lors les deux intégrales premières indépendantes de la forme de F :

$$\frac{p + ux}{q + uy} = -\tang\omega$$

et

$$x\cos\omega + y\sin\omega = \text{const.} = l.$$

2° L'intégrale

$$x\cos\omega + y\sin\omega = l$$

montre que les courbes caractéristiques sont des courbes planes, situées dans des plans parallèles à l'axe Oz.

L'intégrale

$$p\cos\omega + q\sin\omega + ul = 0$$

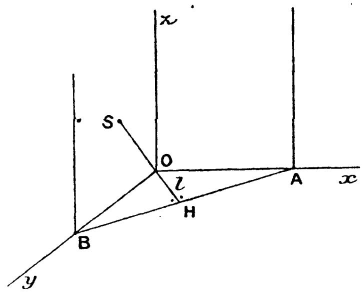
ou

$$p\left(\frac{\cos\omega}{l} + x\right) + q\left(\frac{\sin\omega}{l} + y\right) - z = 0$$

montre que tout plan tangent à une surface intégrale en un point de la caractéristique (ω, l) passe par le point $-\frac{\cos\omega}{l}$, $-\frac{\sin\omega}{l}$, o.

La développable caractéristique (ω, l) est donc un cône.

Le sommet de ce cône est le point inverse de la projection de l'origine des axes sur le plan de la caractéristique, le module étant — 1 et le pôle étant l'origine.



3° Nous allons établir que la connaissance de ces deux intégrales permet de réduire à une quadrature la recherche des caractéristiques.

On obtient immédiatement

$$dp^2+dq^2+du^2$$
$$=\frac{F'^2}{z^2}\left[\frac{x^2+y^2}{z^2}+(p^2+q^2)s^2-\frac{2s}{z}(px+qy)+\frac{1}{z^2}+\frac{2su}{z}+s^2u^2\right]dt^2$$
$$=\frac{F'^2 s}{z^2}(sF-1)\,dt^2.$$

Mais, d'autre part,

$$\frac{1}{2}\frac{ds}{dt}=\frac{x}{z^2}\frac{dx}{dt}+\frac{y}{z^2}\frac{dy}{dt}-\frac{2s}{z}\frac{dz}{dt}$$
$$=\frac{(px+qy)+u(x^2+y^2)-2sz(F+uz)}{z^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dt}{z}=-\frac{ds}{2(sF-1)}.$$

La relation précédente s'écrit donc

$$dp^2+dq^2+du^2=\frac{sF'^2\,ds^2}{4(sF-1)}.$$

Nous poserons

$$s = \frac{1}{\tau} \qquad \text{et} \qquad F(s) = G(\tau).$$

Nous avons les relations

$$p^2 + q^2 + u^2 = G(\tau),$$

$$dp^2 + dq^2 + du^2 = \frac{dG^2}{4(G - \tau)},$$

$$p \cos\omega + q \sin\omega = -ul,$$

$$x \cos\omega + y \sin\omega = l,$$

et nous prendrons comme inconnues auxiliaires

$$p \sin\omega - q \cos\omega = V,$$

$$x \sin\omega - y \cos\omega = W.$$

On en déduit d'abord

$$p^2 + q^2 = V^2 + u^2 l^2, \qquad dp^2 + dq^2 = l^2 du^2 + dV^2.$$

Les deux premières équations prennent alors la forme

$$(1 + l^2) du^2 + dV^2 = \frac{dG^2}{4(G - \tau)},$$

$$(1 + l^2) u^2 + V^2 = G(\tau).$$

Le changement de variables

$$\sqrt{1 + l^2}\, u = \rho \cos\varphi, \qquad V = \rho \sin\varphi$$

est bien naturel; il donne

$$d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 = \frac{dG^2}{4(G - \tau)},$$

$$\rho^2 = G(\tau).$$

Éliminons ρ entre ces deux équations; un calcul immédiat donne

$$\text{(A)} \qquad \varphi = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{\tau}{G - \tau}} \frac{dG}{G}.$$

Telle est la quadrature énoncée; elle définit φ en fonction de τ. On a ensuite

$$p\cos\omega + q\sin\omega = -\frac{l\sqrt{G}}{\sqrt{1+l^2}}\cos\varphi,$$

$$p\sin\omega - q\cos\omega = \sqrt{G}\quad\sin\varphi;$$

d'où l'on déduit les expressions de p et q en fonction de τ et des constantes l, ω, φ_0

$$(\mathrm{B})\quad\begin{cases} p = \sqrt{G}\left(\quad\sin\varphi\sin\omega - \dfrac{l}{\sqrt{1+l^2}}\cos\varphi\cos\omega\right), \\ q = \sqrt{G}\left(-\cos\omega\sin\varphi - \dfrac{l}{\sqrt{1+l^2}}\cos\varphi\sin\omega\right). \end{cases}$$

Enfin on a

$$(\mathrm{C})\qquad\begin{cases} x = l\cos\omega + W\sin\omega, \\ y = l\sin\omega - W\cos\omega, \\ z^2 = \tau(1+l^2+W^2), \end{cases}$$

W étant lié à τ par la relation

$$u + z = px + qy,$$

ou

$$(\mathrm{D})\qquad \cos\varphi\sqrt{1+l^2} + \sin\varphi\, W\sqrt{\frac{\tau(1+l^2+W^2)}{G}}.$$

Les bandes caractéristiques sont ainsi déterminées par les expressions de (x, y, z, p, q) en fonction de τ et des trois paramètres essentiels ω, l, φ_0. Leur connaissance achève l'intégration de l'équation donnée.

On observera que (W, z) sont les coordonnées d'un point d'une courbe caractéristique dans son plan (l, ω); la troisième équation (C) et l'équation (D) sont donc les équations de cette caractéristique, définissant z et W en fonction du paramètre τ.

La construction d'une surface intégrale passant par une courbe donnée est immédiate.

4° Dans le cas particulier proposé, on a

$$\text{(E)} \qquad G = \frac{A}{\tau} + B \qquad \text{ou} \qquad \tau = \frac{A}{G - B}.$$

L'intégrale (A) donne

$$2\varphi = \int \frac{\sqrt{A}\, dG}{G\sqrt{G^2 - BG - A}};$$

une inversion bien simple conduit à

$$\frac{\sqrt{A}}{G} - \left(\frac{B^2}{4A} - 1\right) \sin 2(\varphi - \varphi_0) - \frac{B}{2\sqrt{A}}.$$

Considérons φ comme le paramètre variable; cette équation définit G; (E) définit τ; (B) font connaître p et q; (D) donne W et enfin (C) déterminent x, y, z.

Insistons sur le cas où $\varphi_0 = 0$. Alors

$$\frac{1}{G} + \frac{B}{2A} = \frac{2}{\sqrt{A}}\left(\frac{B^2}{4A} - 1\right) \sin\varphi \cos\varphi.$$

Mais

$$\sin\varphi \cos\varphi = \frac{u V \sqrt{1 + l^2}}{\rho^2} = \frac{u(p \sin\omega - q \cos\omega)\sqrt{1 + l^2}}{G},$$

et

$$G = p^2 + q^2 + u^2.$$

Par suite

$$1 + \frac{B}{2A}(p^2 + q^2 + u^2) = \frac{B^2 - 4A}{2A\sqrt{A}} u(p \sin\omega - q \cos\omega)\sqrt{1 + l^2}.$$

Or cette équation est l'équation tangentielle d'une surface intégrale, l'équation du plan tangent étant

$$Z = pX + qY + u.$$

Cette surface est de seconde classe, c'est une quadrique, et, comme elle dépend essentiellement des deux paramètres l et ω, son équation ponctuelle fera connaître une intégrale complète de l'équation proposée.

En posant

$$\frac{2A}{B} = m \qquad \text{(quantité donnée)},$$

$$\frac{B^2 - 4A}{2B\sqrt{A}}\sqrt{1 + l^2} = a \qquad \text{(paramètre)},$$

on a à passer de l'équation tangentielle homogène

$$U^2 + V^2 + mW^2 + T^2 - 2a(U\sin\omega - V\cos\omega)T = 0$$

à l'équation ponctuelle correspondante; on trouve aisément comme résultat

$$\begin{aligned} z^2(1 - a^2) = m[x^2 + y^2 + 1 - a^2(x\cos\omega + y\sin\omega)^2 \\ + 2a(x\sin\omega - y\cos\omega)]. \end{aligned}$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1865.

(1900, p. 384.)

Si un hyperboloïde circonscrit à un tétraèdre orthocentrique passe aussi par l'orthocentre, il admet des systèmes de trois génératrices rectangulaires, et inversement.

(G. Fontené.)

SOLUTION

Par un abonné.

Soit un tétraèdre ABCD pour lequel il existe un point E tel que chacun des cinq couples de plans

$$\begin{cases} (\overline{BCE}, \ \overline{DAB}), \\ (\overline{BCE}, \ \overline{DAC}), \end{cases} \qquad \begin{cases} (\overline{CAE}, \ \overline{DBC}), \\ (\overline{CAE}, \ \overline{DBA}), \end{cases} \qquad (\overline{ABE}, \ \overline{DCA})$$

soit formé de deux plans rectangulaires (deux conditions). Chacun de ces cinq couples de plans constitue un hyperboloïde équilatère passant par les cinq points A, B, C, D, E;

les équations de ces quadriques étant $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, ..., $S_5 = 0$, l'équation générale des quadriques passant par ces cinq points est, avec quatre paramètres,

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \ldots + \lambda_5 S_5 = 0,$$

et il est bien évident que ces quadriques sont des hyperboloïdes équilatères, puisque la condition pour une quadrique d'être un hyperboloïde équilatère est linéaire par rapport aux coefficients de son équation ponctuelle. En particulier, si l'on prend un quelconque des cinq points, soit le point E, les deux plans EDA, EBC, par exemple, sont rectangulaires, ce qui donne les propriétés du tétraèdre orthocentrique. Inversement, si une quadrique passant en A, B, C, D est de plus équilatère, comme les cinq conditions sont linéaires par rapport aux coefficients de l'équation ponctuelle de la quadrique, cette équation renferme quatre paramètres au premier degré, et se confond par suite avec celle des quadriques qui passent par les cinq points A, B, C, D, E.

Remarque. — Ce théorème est énoncé et démontré dans les *Premiers principes de Géométrie moderne* de M. Duporcq, page 105.

1866.

(1900, p. 384.)

Soit Q *la conique inscrite en* A, B, C *au triangle* $A_1B_1C_1$.

I. *Si par* A_1 *on mène une droite quelconque qui coupe* B_1C_1 *en* I_1, CA *en* H *et* AB *en* K, *le point* ω(BH, CK) *appartient à* Q *et* ωI_1 *est la tangente en* ω.

II. P *étant un point quelconque de* BC, *si* PB_1 *et* PC_1 *coupent* C_1A_1 *et* A_1B_1 *en* H_1 *et* K_1, *la droite* H_1K_1 *est tangente à* Q *et* PA *la rencontre au point de contact* ω_1.

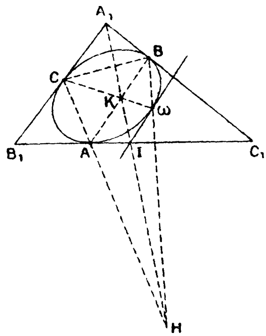
(P. Sondat.)

SOLUTION

Par M. Nicolai, à Pistoia.

I. La conique lieu des points communs aux rayons homologues de deux faisceaux homographiques C(A, ω, A_1),

$B(A, \omega, C)$, passe par les points A, B, C, ω, touche CA_1 et BA_1 en C et en B_1 car les deux faisceaux formeut sur la



transversale A_1H une involution, les points H et K se correspondant doublement.

D'après un cas particulier du théorème inverse de Pascal, on voit encore immédiatement que ω appartient à Q, et du théorème direct on déduit que ωI_1 est la tangente en ω.

II. Le premier théorème transformé par dualité fournit le deuxième.

Autres solutions par MM. RETALI et VACQUANT.

1868.

(1900, p. 431.)

Lieu des centres des coniques dont on connaît le centre de courbure en un point donné, ainsi que la somme des carrés des axes. (E. DUPORCQ.)

SOLUTION

Par M. G. FONTENÉ.

Lorsqu'un triangle circonscrit à une conique devient évanouissant, le cercle conjugué à ce triangle devient un cercle tangent extérieurement à la conique et dont le diamètre est égal au rayon de courbure au point de contact; ou encore, comme l'a remarqué P. Serret (*Nouv. Ann.*, 1861, p. 80), lorsqu'un triangle conjugué à une conique devient évanouissant, le cercle circonscrit au triangle devient un cercle tel que le précédent. Le théorème de Steiner, ou celui de Faure, donne donc l'énoncé suivant, qui a été proposé comme question par Steiner (*Nouv. Ann.*, 1849, p. 393) :

Le cercle tangent extérieurement à une conique, et dont le diamètre est égal au rayon de courbure au point de contact, coupe orthogonalement le cercle orthoptique.

M. Ploix a donné une démonstration directe de cette propriété (*Nouv. Ann.*, 1850, p. 59) en rappelant que Poncelet avait déjà donné le cas particulier de la parabole. Si le point de contact M est donné ainsi que le centre de courbure C en ce point, en appelant K le symétrique de C par rapport à M, le lieu du centre de la conique est un cercle ayant pour centre le milieu de MK.

P. Serret *a étendu à l'espace* la remarque rappelée plus haut (*Nouv. Ann.*, 1861, p. 82); en précisant un peu son énoncé, on a eu : Lorsqu'un tétraèdre conjugué à une quadrique devient évanouissant, la sphère circonscrite au tétraèdre devient une sphère tangente à la quadrique, le diamètre MK issu du point de contact M étant déterminé par la relation

$$\overline{MK} = -(\overline{MC_1} + \overline{MC_2}),$$

où C_1 et C_2 sont les centres de courbure principaux en M_1. On peut dire encore : Lorsqu'un tétraèdre orthocentrique circonscrit à une quadrique devient évanouissant, la sphère conjuguée au tétraèdre devient une sphère telle que la précédente.

Il résulte alors du théorème de Faure étendu à l'espace, ou du théorème de Steiner étendu à l'espace avec un tétraèdre orthocentrique, qu'*une sphère définie comme ci-dessus est orthogonale à la sphère orthoptique de la quadrique.* Ce dernier fait, qui entraîne les précédents, est susceptible d'une démonstration directe analogue à celle de M. Ploix. Si l'on considère la sphère qui est tangente en M à la quadrique et qui est orthogonale à la sphère orthoptique, le diamètre OM de la quadrique coupant encore cette sphère en N, on a

$$\overline{ON} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\overline{OM}},$$

γ étant OM, α et β étant les demi-axes de la section centrale de la quadrique faite parallèlement au plan tangent en M; on a donc

$$\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\overline{OM}};$$

si MK est le diamètre de la sphère, et si OP est la perpendiculaire menée de O sur le plan tangent en M, on a

$$\overline{OM} \times \overline{MN} = \overline{MK} \times \overline{OP},$$

et par suite

$$\overline{MK} = \frac{a^2 + \beta^2}{\overline{OP}};$$

on doit donc avoir

$$\overline{MC_1} + \overline{MC_2} = \frac{\alpha^2}{\overline{PO}} + \frac{\beta^2}{\overline{PO}};$$

et cela a lieu *terme à terme.*

Autre solution, par M. E.-N. BARISIEN.

1870.

(1900, p. 432.)

On considère la figure plane qui est la projection de la figure de l'espace formée par cinq plans a, b, c, d, e; on désigne par (ab) la droite qui est la projection de l'intersection des plans a et b et par (A, B) *le point qui est l'intersection des plans autres que a et b. Montrer qu'il existe une conique telle que chacune des droites de la figure est la polaire du point correspondant.* (G. FONTENÉ.)

SOLUTION

Par M. V. RETALI.

Considérons la figure corrélative : nous avons cinq points (dont quatre quelconques ne sont pas dans le même plan) sommets d'un pentagone gauche ayant dix couples d'éléments *opposés* (à la droite qui joint deux points est *opposé* le plan des trois autres points). Ces dix couples d'éléments opposés sont coupés par un plan arbitraire (ne passant par aucun des sommets du pentagone) suivant dix couples d'éléments conjugués d'un système polaire [*voir*, par exemple ([1]), Reye, *Géométrie de position*, t. II, p. 79 de la traduction française]. Le théorème corrélatif dans l'espace est : En projetant les dix couples d'éléments opposés (droites et points) d'un pentaèdre, d'un point arbitraire (non situé sur aucune des faces du pentaèdre), on obtient dix couples d'éléments conjugués (plans et rayons) d'une *gerbe polaire*. En coupant cette gerbe par un plan π, on obtient le théorème proposé.

Il y a un nombre doublement infini de cubiques gauches dont les plans a, b, c, d, e sont osculateurs; les trois plans osculateurs menés à une quelconque de ces cubiques par un point arbitraire coupent le plan π suivant un trilatère conjugué à la conique, etc.

1877.

(1900, p. 571.)

On donne un triangle CAB. *Sur* AB, AC *comme demi-diamètres conjugués on construit une ellipse* (E); *sur* AB, BC *on construit pareillement une seconde ellipse* (E'). *Étudier les intersections des deux ellipses* (E), (E').

(C.-A. Laisant.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

En appelant D et E les points symétriques de C par rapport à A et B, les deux ellipses sont respectivement tangentes à la droite |DE| aux points D et E, et au point C elles ont pour tangente la parallèle à |AB|; elles ont en ce point C un contact du deuxième ordre et se coupent sur la médiane du triangle ABC issue de C. Si a, b, c sont les longueurs des côtés de ABC, les équations de (E), (E') rapportées aux axes obliques AB, AC, sont respectivement

$$(E) \equiv b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2 = 0,$$
$$(E') \equiv (bx + cy)^2 - 2bc(bx + cy) + c^2y^2 = 0$$

et, par suite,

$$(E') - (E) = c(y - b)(2bx + cy - bc),$$

([1]) On peut consulter aussi : E. Duporcq, *Premiers principes de Géométrie moderne*, p. 141. Gauthier-Villars, 1899.

$y - b = 0$ est la tangente commune au point C;

$$2bx + cy - bc = 0$$

est la médiane issue de C; donc (E), (E') s'osculent au point C et se coupent au point $\left(\frac{4c}{5}, -\frac{3b}{5}\right)$.

Autres solutions de MM. E.-N. Barisien et Valdès.

1900

(1900, p. 575.)

On considère deux points fixes A *et* B *et un cercle décrit du milieu* O *de* AB *comme centre avec un rayon égal à* OA $\sqrt{3}$. *Montrer que pour un point* C *quelconque de ce cercle le triangle* ABC *jouit de cette propriété que l'axe radical de son cercle des neuf points* (et du cercle circonscrit) *est parallèle à la médiane* OC.

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Appelons H l'orthocentre, M le centre du cercle des neuf points, G le barycentre, ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC : ces quatre points étant une ligne droite, il suffit de démontrer que HG est perpendiculaire à la médiane OC. Soit C' la projection de C sur AB, et posons $AO = a$: comme les points C et H sont conjugués au cercle de centre O et rayon a, nous avons

$$C'H.C'C = \overline{CC'}^2 - CH.C'C = a^2 - \overline{OC'}^2$$

et, par suite,

$$CH.CC' = \overline{OC}^2 - a^2 = 2a^2;$$

mais

$$CG.CO = \tfrac{2}{3}\,\overline{CO}^2 = 2a^2,$$

donc

$$CH.CC' = CG.CO$$

et le théorème est démontré.

Autre solution de M. Lez.

QUESTIONS.

1921. Démontrer que, pour tout nombre entier n, on a l'inégalité

$$\left(\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1}\right)^2 > n\pi,$$

et que, lorsque n augmente indéfiniment, la différence des deux termes de l'inégalité tend vers zéro.

(E.-N. Barisien.)

1922. Tout octaèdre à faces triangulaires dont les douze arêtes sont tangentes à une quadrique a ses diagonales concourantes, et, réciproquement, si un octaèdre a ses diagonales concourantes, ses douze arêtes sont tangentes à une quadrique.

En déduire le théorème suivant :

« Étant données deux quadriques, il est en général impossible d'inscrire à l'une un octaèdre dont les arêtes sont tangentes à la seconde; si la construction est possible, elle l'est d'une infinité de manières, et l'octaèdre dépend alors d'un paramètre. »

Il y a exception si les deux quadriques sont inscrites l'une à l'autre : dans ce cas, l'octaèdre, quand sa construction est possible, dépend de trois paramètres. (R. Bricard.)

1923. On donne une quadrique (Q) et deux droites A et B : démontrer que les droites qui, avec A et B, déterminent un hyperboloïde harmoniquement inscrit (ou circonscrit) à (Q) forment un complexe linéaire. (R. Bricard.)

1924. Si la tangente en un point M d'une hyperbole rencontre une des asymptotes au point T et si la droite qui joint le point M à l'un des foyers F rencontre la même asymptote au point A, on a

$$AT = AF.$$

Déduire de là le lieu des foyers des hyperboles dont on connaît une asymptote et une tangente avec son point de contact. (M. d'Ocagne.)

CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » EN 1901.

Résultat.

Après examen des Mémoires parvenus à la Rédaction, le prix a été décerné à M. G. Lery, à Paris. Nous publions dans ce numéro le Mémoire de M. G. Lery.

[N¹1i]

SUR LES MOUVEMENTS POUR LESQUELS IL EXISTE PLUSIEURS CENTRES DES AIRES;

PAR M. GEORGES LERY [1].

On dit qu'un point M *décrit une courbe* C *suivant la loi des aires, le centre des aires étant un point* S, *lorsque la portion de droite* SM *décrit des aires qui varient proportionnellement au temps sur la surface du cône qui a pour sommet le point* S *et pour directrice la courbe* C.

On demande d'étudier les mouvements pour lesquels il existe deux ou trois centres des aires.

1. Je commence par étudier le cas d'un seul centre des aires. Pour que le point M décrive la courbe C suivant la loi des aires par rapport au centre S, il faut et

(1) Mémoire ayant obtenu le prix au concours de 1901 des *Nouvelles Annales*.

il suffit qu'on ait la relation

$$pv = c,$$

en désignant par v la vitesse du point M, par p la distance de S à la tangente en M à la trajectoire, et par c une constante. Si l'on se donne la trajectoire C, le point S et le nombre c, cette relation définit la vitesse en chaque point de la trajectoire, et l'on obtient l'arc M_0M en fonction du temps par l'inversion d'une intégrale

$$\int_{s_0}^{s} p(s)\,ds = c(t - t_0).$$

Si la courbe C est dans un plan contenant le point S, on sait que l'accélération du point M dans son mouvement est constamment dirigée vers S. Lorsque la courbe C est gauche, ou que son plan ne contient pas le centre S, on a une propriété analogue :

Le vecteur accélération au point M *se trouve dans le plan normal, le long de* SM, *au cône qui projette* C *du point* S.

Soient, en effet, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ les coordonnées du mobile par rapport à un trièdre trirectangle de sommet S. La loi des aires fournit l'équation

$$(yz' - zy')^2 + \ldots = c^2,$$

d'où, en dérivant par rapport à t,

$$(yz' - zy')(yz'' - zy'') + \ldots = 0.$$

Les deux plans menés respectivement par la vitesse et l'accélération, et par S sont donc rectangulaires. On démontre aussi simplement ce théorème par la Géométrie infinitésimale.

CAS DE DEUX CENTRES DES AIRES.

2. Pour que le mobile M décrive la courbe C suivant la loi des aires relativement à deux centres S et S_1, il faut et il suffit que l'on ait les deux relations

$$\begin{aligned} pv &= c, \\ p_1 v &= c_1, \end{aligned}$$

v désignant la vitesse du mobile, p et p_1 les distances respectives des deux centres à la tangente en M, et c, c_1 deux constantes.

On en déduit la relation nécessaire

$$p : p_1 = c : c_1; \tag{1}$$

ainsi, le rapport des distances des tangentes de la trajectoire aux deux centres des aires doit être constant. Je dis que cette condition est suffisante : soit, en effet, une courbe C qui y satisfasse; comme nous l'avons vu au début, nous pouvons la faire parcourir par un mobile suivant la loi des aires, le centre étant S et la constante c; on aura alors

$$pv = c.$$

Mais l'équation (1) devient

$$p_1 v = c_1;$$

le point mobile obéit donc à la loi des aires pour le centre S_1 et le nombre c_1. D'ailleurs la courbe C répond encore à la question si les deux constantes sont kc et kc_1, mais la loi du mouvement du mobile sur elle est changée.

Ainsi, la question cinématique proposée se ramène à une question géométrique :

Étudier les courbes telles que le rapport des dis-

tances de leurs tangentes à deux points fixes soit constant.

3. Ces tangentes doivent donc appartenir à un complexe dont il est facile d'obtenir une autre définition. Soient A et A_1 les deux points qui partagent SS_1 dans le rapport constant donné; les plans menés par une droite quelconque p du complexe, et les points A, A_1 sont rectangulaires; c'est évident si l'on projette la figure sur un plan perpendiculaire à p. Par suite, les droites p font partie du complexe de Painvin relatif à la surface de seconde classe composée des points A et A_1. Je suppose d'abord ces points à distance finie.

Les courbes de ce complexe sont les seules sur lesquelles on puisse trouver un mouvement tel que la loi des aires soit vérifiée par rapport aux centres S et S_1, les constantes étant proportionnelles à c et c_1. Il est intéressant de remarquer que ces courbes jouissent de la même propriété relativement à d'autres couples de centres, en nombre infini. Prenons, en effet, des points S' et S'_1 divisant harmoniquement le segment AA_1; il existe toujours un rapport $c' : c'_1$ tel que A et A_1 divisent $S'S'_1$ dans ce rapport, de sorte que le complexe est défini par les centres S' et S'_1, et le nombre $c' : c'_1$ est identique à celui que déterminent S et S_1 et $c : c_1$.

Les droites du complexe qui sont parallèles à une direction donnée se trouvent évidemment sur un cylindre de révolution; A et A_1 sont sur deux génératrices diamétralement opposées. Les droites qui passent par un point M ont pour lieu un cône du deuxième degré, dont les plans de sections cycliques sont respectivement perpendiculaires à MA et MA_1. Enfin un calcul de Géométrie élémentaire fournit l'enveloppe des droites du complexe dans un plan ϖ : on vérifie que le produit de leurs distances aux projections de A et A_1 sur ϖ est constant; l'enveloppe est donc une conique ayant pour foyers les projections de A, A_1; les sommets situés sur l'axe focal se trouvent à l'intersection de cet axe et de la sphère de diamètre AA_1.

Ces propriétés très simples, et d'ailleurs bien connues, nous fournissent déjà des solutions du problème : ce sont les courbes planes du complexe, en plus des droites elles-mêmes. Et l'on voit que les seules courbes planes sur lesquelles on peut trouver un mouvement satisfaisant à la loi des aires par rapport à deux centres sont des coniques, ayant leurs foyers et leurs sommets à distance finie.

4. Avant de rechercher toutes les courbes du complexe, on peut étudier le degré de généralité de la question.

Considérons un point M d'une surface F; le cône du complexe en M coupe le plan tangent de la surface suivant deux droites : il y a donc deux courbes du complexe tracées sur la surface et passant par le point M; elles sont tangentes aux deux droites. Toute surface est donc doublement recouverte par une famille de courbes du complexe; il y a exception pour les surfaces qui sont touchées en chacun de leurs points par le cône du complexe correspondant.

Les courbes C du complexe qui passent par un point M de l'espace ont pour tangentes respectives les différentes génératrices du cône du complexe ayant pour sommet le point M. Toutes celles qui ont en M la même tangente ont aussi le même plan osculateur : c'est le plan tangent au cône du complexe le long de la génératrice qui sert de tangente commune. La propriété précédente est exacte pour tous les complexes; on peut la démontrer directement et la compléter pour celui que nous étudions. Je considère en effet le mouvement d'un mobile sur la courbe C, la loi des aires étant vérifiée pour les centres S et S_1; le vecteur accélération en un point M de C doit se trouver dans le plan mené par SM perpendiculairement au plan SMT, MT étant la tangente, ainsi que dans le plan mené par S_1M et perpendiculaire à S_1MT. L'accélération est donc sur une droite déterminée d'une façon unique par le point M et la tangente MT; *toutes les courbes* C *tangentes en un point* M *ont donc les accélérations des mouvements correspondants dirigées suivant une même droite,* et par suite ont même plan osculateur. La droite en question est issue du point M, elle rencontre la normale s menée en S au plan SMT, et la normale s_1 menée en S_1 au plan S_1MT.

Cette construction montre que le plan osculateur en un point quelconque de la droite MT du complexe est le plan tangent, en ce point, à l'hyperboloïde défini par les droites MT, s et s_1.

5. Je considère maintenant les droites du complexe de direction donnée; en les coupant par un plan perpendiculaire à cette direction, on voit que le lieu de leurs traces est un cercle ayant pour diamètre le segment qui est la projection de AA_1 sur le plan. Il est alors évident que toutes les droites réelles du complexe rencontrent la sphère de diamètre AA_1 ou lui sont tangentes; ce dernier cas se présente si la direction de la droite est orthogonale à AA_1. La distance du point S à une droite réelle du complexe est au plus égale à la plus grande des deux distances SA et SA_1, soit SA par exemple :

$$p \leqq SA\,;$$

p peut être nul, mais alors p_1 l'est aussi, et l'on a la droite SS_1. Comme p a une limite supérieure, la vitesse v a une limite inférieure : elle n'est jamais nulle, et ne devient infinie que si la courbe C considérée touche SS_1.

Bien que les tangentes des courbes C restent à une distance finie de S et S_1, ces courbes peuvent avoir des branches infinies : par exemple, il y a des hyperboles parmi les courbes planes; cela arrive lorsque le plan ne passe pas entre A et A_1, car, d'après la construction des sommets et des foyers que nous avons indiquée, les premiers sont entre les seconds.

Dans tout ce qui précède, on a étudié les courbes C sur lesquelles on peut trouver un mouvement pour lequel existe la loi des aires relativement aux deux centres S et S_1, et à des *constantes proportionnelles à c et c_1*; les tangentes de ces courbes appartiennent à un complexe quadratique, le complexe de Painvin relatif à la quadrique composée des points A et A_1, qui divisent le segment SS_1 dans le rapport des constantes. Si ce rapport varie, à chacune de ses valeurs correspond un segment AA_1 et un complexe; l'ensemble des courbes de tous ces complexes fournit la solution du problème proposé.

Deux de ces complexes n'ont aucune droite réelle commune, en dehors de SS_1, car il faudrait que l'on eût

$$c_1 p - c p_1 = 0,$$
$$c'_1 p - c' p_1 = 0,$$

p et p_1 n'étant pas nuls. Par suite, si l'on peut trouver sur une courbe C un mouvement qui vérifie la loi des aires pour les centres S et S_1 et les constantes respectives c et c_1, il n'existe sur elle aucun mouvement qui vérifie la même loi pour les mêmes centres, mais avec des constantes qui ne sont pas proportionnelles aux premières.

6. Nous avons obtenu quelques propriétés des courbes C; il reste à trouver ces courbes elles-mêmes. Je considère l'un des complexes, correspondant à une certaine valeur de $c : c_1$; les axes de coordonnées étant choisis, soit

$$\Phi(yz' - zy', \ldots; x - x', \ldots) = 0$$

l'équation de ce complexe; pour qu'un point mobile dépendant d'un paramètre décrive une courbe dont les tangentes appartiennent au complexe, il faut que les trois coordonnées satisfassent à l'équation

$$\Phi(y\,dz - z\,dy, \ldots; dx, \ldots) = 0.$$

On pourra prendre arbitrairement les fonctions y et z du paramètre, et l'équation précédente déterminera x.

Cela revient à chercher les courbes du complexe qui sont sur un cylindre donné. L'équation différentielle en x est du premier ordre, mais elle contient, comme coefficients, des fonctions que l'on peut prendre arbitrairement, et l'on ne peut rien dire de général sur elle. Le problème se ramène cependant à deux quadratures.

Je prends pour axe des z la droite AA_1 et pour origine le milieu de AA_1. L'équation du complexe est, en déterminant chaque droite par les quantités $(y\,dz - z\,dy, \ldots; dx, \ldots)$,

$$(y\,dz - z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 + (x\,dy - y\,dx)^2 - a^2(dx^2 + dy^2) = 0.$$

On l'obtient en exprimant que les plans menés par les points $A(0, 0, a)$ et $A_1(0, 0, -a)$ et chaque droite du complexe sont rectangulaires. Le complexe étant de révolution autour de l'axe des z, il y a intérêt à prendre des coordonnées polaires dans le plan des xy; il vient

$$r^2 \varphi'^2 (r^2 + z^2 - a^2) + (r z' - z r')^2 - a^2 r'^2 = 0.$$

On voit qu'en divisant par r^4, on a au premier membre une fonction de $\frac{1}{r}$, de $\frac{z}{r}$ et de leurs dérivées; je pose donc

$$\frac{1}{r} = u, \qquad \frac{z}{r} = v;$$

l'équation devient

$$\varphi'^2 (v^2 - a^2 u^2 + 1) + v'^2 - a^2 u'^2 = 0.$$

Si l'on prend $\varphi' = 0$, on a

$$v = \pm\, au + \text{const.}$$

ou

$$z = br \pm a.$$

Ce sont là les droites passant par A ou A_1, et qui font partie du complexe. On obtient les autres droites du complexe en prenant dans la première équation

$$dx = dy = dz = 0.$$

Je suppose maintenant que φ ne soit pas constant; je le prends comme variable. On peut choisir pour u, par exemple, une fonction arbitraire de φ, et v est donné par une équation du premier ordre

$$v'^2 + v^2 = a^2 u'^2 + a^2 u^2 - 1,$$

ou plutôt, en posant

$$v - au = m, \qquad v + au = n,$$

on a une équation du premier ordre et linéaire, soit en m, soit en n :

$$m'n' + mn + 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$n = e^{-\int \frac{m}{m'} d\varphi} \times \left(k - \int \frac{1}{m'} e^{\int \frac{m}{m'} d\varphi} d\varphi\right).$$

On trouverait facilement un grand nombre de cas particuliers où l'on puisse faire les intégrations; par exemple l'hypothèse $u =$ const. donne

$$v = \text{A} \sin(\varphi - \varphi_0).$$

7. Si les constantes des aires sont égales, l'un des points A et A_1 est à l'infini. Les courbes planes du complexe correspondant sont des paraboles. Dans le cas général, la surface singulière du complexe se compose de la sphère de diamètre AA_1 et des deux plans isotropes menés par AA_1 : c'est là en effet le lieu des points où les cônes du complexe sont décomposés. Lorsque $c = c_1$, la surface singulière devient un système de quatre plans; on a donc affaire à un complexe tétraédral; en prenant comme origine le milieu de SS_1, et comme axe des z la droite SS_1, on arrive à l'équation

$$(x\,dx + y\,dy)\,dz - z(dx^2 + dy^2) = 0$$

ou

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx^2 + dy^2}{x\,dx + y\,dy}.$$

Prenons pour y une fonction arbitraire de x; alors

$$\log z = \int \frac{1 + y'^2}{x + yy'}\,dx.$$

CAS DE TROIS CENTRES.

8. Pour qu'une courbe C soit parcourue suivant la loi des aires par rapport à trois centres S, S_1, S_2, les constantes des aires respectives étant c, c_1, c_2, il faut que l'on ait en chaque point M de C :

$$pv = c, \qquad p_1 v = c_1, \qquad p_2 v = c_2;$$

v étant la vitesse, et p, p_1, p_2 les distances des centres à la tangente en M. On en déduit que les distances de toute tangente de C aux trois centres doivent être proportionnelles à c, c_1, c_2; la condition est nécessaire et suffisante pour que sur C on puisse trouver un mouvement répondant à la question.

Les tangentes des courbes C doivent donc faire partie des trois complexes définis par les équations

$$\begin{aligned} c_1 p - c p_1 &= 0, \\ c_2 p - c p_2 &= 0, \\ c_1 p_2 - c_2 p_1 &= 0. \end{aligned}$$

Or, toute droite qui appartient à deux d'entre eux appartient évidemment au troisième, de sorte que les trois complexes définissent une congruence, du quatrième ordre et de la quatrième classe.

Soient A et B, A_1 et B_1, A_2 et B_2 les couples de points qui divisent respectivement les segments S_1S_2, S_2S, SS_1 dans les rapports $c_1 : c_2$, $c_2 : c$, $c : c_1$. Ces six points sont les sommets d'un quadrilatère complet dont le triangle diagonal est SS_1S_2; de chacune des droites de la congruence, on voit sous un angle droit les segments AB, A_1B_1, A_2B_2, et par suite toutes les coniques inscrites au quadrilatère complet. Tout ceci suppose que SS_1S_2 ne sont pas en ligne droite. Il y a deux droites de la congruence perpendiculaires à un plan; leurs pieds sont les points cycliques du quadrilatère qui a pour sommets les projections des points A et B; les deux autres droites que l'on devrait encore trouver passent par les points circulaires à l'infini du plan.

Il y a quatre droites de la congruence dans un plan; ce sont les tangentes communes aux coniques des trois complexes; ces coniques doivent bien appartenir à un même faisceau tangentiel, puisque les trois complexes ont en commun la congruence définie par deux d'entre eux. Il n'existe pas de courbe plane dont les tangentes fassent partie de la congruence; il faudrait pour cela, en effet, que les trois coniques des complexes coïncidassent pour une certaine position du plan; en particulier leurs foyers réels devraient être confondus, ce qui est impossible, car il n'existe pas de plan sur lequel les six sommets d'un quadrilatère se projettent en deux points.

9. On sait qu'avec les droites d'une congruence on peut former deux séries de développables, dont les arêtes de rebroussement sont les courbes de la congruence; elles sont situées sur les deux nappes de la surface focale. Cherchons les points focaux sur une droite de la congruence; nous avons vu que, en appelant p cette droite, s et s_1 les perpendiculaires en S et S_1 aux plans Sp et $S_1 p$, le plan tangent au cône du complexe (S, S_1) en un point M de p contient la droite, issue de M, qui rencontre s et s_1. Les points focaux sur p seront donc les points par lesquels on pourra mener une droite rencontrant s, s_1 et s_2; ce sont les points de rencontre de p avec le paraboloïde défini par s, s_1, s_2. Il y a deux courbes de la congruence touchant p; les points de contact sont les points focaux, et l'accélération dans le mouvement d'un mobile, qui parcourt l'une d'elles suivant la loi des aires

est dirigée, au point de contact avec p, suivant la droite issue de ce point et qui rencontre s, s_1 et s_2. Cette droite détermine donc le plan osculateur de la trajectoire.

10. On peut remarquer, comme dans le cas de deux centres, que les droites réelles de la congruence rencontrent les sphères de diamètres AB, A_1B_1, A_2B_2. La distance p de S à une droite de la congruence reste donc finie; mais elle ne peut devenir nulle, car p_1 et p_2 devraient s'annuler aussi, ce qui est impossible si S, S_1 et S_2 ne sont pas en ligne droite. La vitesse v sur toute courbe de la congruence reste finie et différente de zéro.

Enfin, si l'on fait varier les constantes des aires, on obtient une série de congruences dont les courbes fournissent la solution complète du problème.

11. Lorsque les points S, S_1, S_2 sont en ligne droite, les couples de points AB, A_1B_1, A_2B_2 existent encore, mais sont sur la droite SS_1S_2, qui est un axe de révolution pour la congruence. Il peut y avoir des courbes planes de la congruence; d'après le raisonnement déjà fait (n° 9), le plan d'une telle courbe doit être perpendiculaire à l'axe SS_1S_2; or les courbes planes du complexe (S, S_1) qui répondent à cette condition sont les cercles situés sur la sphère de diamètre A_2B_2; ainsi la seule courbe plane de la congruence est le cercle commun aux sphères (AB), (A_1B_1) et (A_2B_2).

Remarque. — On a vu que la détermination des courbes telles que les distances de leurs tangentes à deux points fixes soient dans un rapport constant dépend de l'intégration de l'équation différentielle

$$m'n' + \varphi'^2(1 + mn) = 0. \tag{1}$$

Il est intéressant de remarquer que l'on peut définir les courbes intégrales cherchées par des équations ne contenant pas de signe de quadrature.

Considérons m, n et φ comme les coordonnées d'un point de l'espace. Les courbes intégrales passant par un point donné sont tangentes aux génératrices d'un cône T :

$$(M - m)(N - n) + (\Phi - \varphi)^2(1 + mn) = 0.$$

Les surfaces qui touchent, en chacun de leurs points, le cône T correspondant sont les surfaces intégrales d'une certaine équation aux dérivées partielles ; et l'on sait, d'après Monge, que si l'on connaît une intégrale complète

$$V(m, n, \varphi, \alpha, \beta) = 0,$$

les courbes intégrales sont définies par les équations

$$V[m, n, \varphi, \alpha, f(\alpha)] = 0,$$
$$\frac{dV}{d\alpha} = 0,$$
$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = 0;$$

$f(\alpha)$ est une fonction arbitraire du paramètre α.

L'équation aux dérivées partielles en question s'obtient en exprimant que le plan $(p, q, -1)$ touche le cône T, ce qui donne la condition

$$(2) \qquad 4pq(1 + mn) + 1 = 0.$$

En écrivant les équations différentielles des caractéristiques, on trouve l'intégrale

$$(3) \qquad pm - qn = \alpha.$$

Ainsi, p et q étant déterminés par les équations (2) et (3), $pdm + qdn$ est une différentielle exacte. On a

$$\varphi - \beta = \int \frac{\alpha}{2}\left(\frac{dm}{m} - \frac{dn}{n}\right)$$
$$+ \int \sqrt{\alpha^2 - \frac{mn}{1+mn}}\left(\frac{dm}{2m} + \frac{dn}{2n}\right).$$

La dernière quadrature s'effectue facilement par le changement de variable

$$t^2 = \alpha^2 - \frac{mn}{1+mn},$$

d'où

$$mn = \frac{\alpha^2 - t^2}{t^2 - \alpha^2 + 1}.$$

On trouve

$$\varphi - \beta = \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{L}\frac{m}{n} - \alpha\,\mathrm{L}\frac{\alpha+t}{\alpha-t} + \sqrt{\alpha^2-1}\,\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{\alpha^2-1}+t}{\sqrt{\alpha^2-1}-t}.$$

Il suffit maintenant de remplacer t par sa valeur, β par $f(\alpha)$, f désignant une fonction arbitraire; l'équation précédente et celles qu'on obtient en dérivant deux fois par rapport à α donnent φ, m, n en fonction du paramètre α.

La même méthode s'applique à l'équation de Monge, à laquelle on arrive lorsque les constantes des aires sont égales.

S. Lie a d'ailleurs donné les équations des courbes dont les tangentes font partie d'un complexe tétraédral, comme celles dont il est ici question.

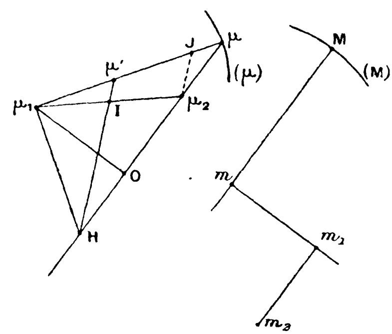
Le calcul montre que φ, $\log r$ et $\log z$ sont des fonctions algébriques de α, lorsque la fonction arbitraire $f(\alpha)$ est elle-même algébrique. Il n'en est pas de même lorsque les constantes des aires sont différentes.

[O2q]

SUR LA COURBE RADIALE DE HOUËL;

PAR M. M. D'OCAGNE.

Si, par un pôle O, on mène des vecteurs $O\mu$ équipollents aux rayons de courbure mM d'une courbe plane (M), la courbe (μ) est ce que Houël a appelé la



radiale de la courbe (M). Par extension d'une terminologie que nous avons précédemment employée [1], cette radiale peut être dite une *adjointe infinitésimale du second ordre* de la courbe donnée.

M. Sucharda a fait connaître une construction de la tangente et du centre de courbure de la radiale [2]. Deux théorèmes généraux qui se trouvent dans notre *Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale* [3] fournissent une solution immédiate et beaucoup plus simple du même problème.

---

(1) *Nouv. Ann. de Math.*, 3e série, t. XIX, 1900, p. 219.
(2) *Bull. de l'Acad. des Sciences de Prague*, t. IV, 1897, p. 100.
(3) Édité chez Gauthier-Villars (1896).

Le premier de ces théorèmes [1], appliqué aux deux premières développées de la courbe (M), montre que si m_1 et m_2 sont les centres de seconde et de troisième courbure de la courbe (M) et si les vecteurs $O\mu_1$ et $O\mu_2$ sont respectivement équipollents à $m_1 m$ et $m_2 m_1$, les normales aux courbes (μ) et (μ_1) sont respectivement les droites $\mu\mu_1$ et $\mu_1\mu_2$.

Le second [2], appliqué à la courbe (μ) que l'on rapporte au pôle O, montre que, si l'on élève en μ à $\mu\mu_1$ la perpendiculaire $\mu_1 H$ qui coupe $O\mu$ en H, la droite qui joint le point H au milieu I de $\mu_1\mu_2$ passe par le centre de courbure μ' cherché de la radiale (μ).

Si, inversement, la radiale est connue et que l'on sache construire ses centres de courbure, on en déduira pour chaque point de la courbe (M) les centres m, m_1, m_2 des trois premières courbures. Le rayon de première courbure mM sera, en effet, donné par le vecteur $O\mu$ de la radiale (μ) parallèle à la normale mM, le rayon de seconde courbure $m_1 m$ par la sous-normale polaire $O\mu_1$ de (μ). Quant au rayon de troisième courbure $m_2 m_1$, il suffit, pour l'avoir, de connaître le point μ_2.

Or, les points H et μ' étant connus, ce point est immédiatement donné par la parallèle $J\mu_2$ à $H\mu'$ menée par la symétrique J du point μ_1 par rapport au point μ'.

Remarquons en passant que, si la courbe (μ) est un cercle passant par O, le point μ_1 est diamétralement opposé à μ dans ce cercle, et comme le centre de courbure μ' est alors le milieu du diamètre $\mu\mu_1$, le point J se confond avec le point μ et, par suite, aussi le point μ_2. Autrement dit, le rayon de troisième courbure est,

---

(1) *Loc cit.*, p. 261. Note au bas de la page.
(2) *Loc. cit.*, p. 286.

pour chaque point de la courbe (M), équipollent au rayon de première courbure.

Ce pourrait être un exercice de candidat à la licence que de rechercher les courbes (M) ayant pour radiale (μ), un cercle passant par le pôle O.

[F2e]

SUR UNE FORMULE FONDAMENTALE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. EUGÈNE FABRY.

Dans le Traité de Greenhill (*Sur les fonctions elliptiques et leurs applications*) on trouve, aux exercices proposés à la fin du Chapitre VI, l'intégrale

$$(1)\quad \mathrm{I}=\int_{e_2}^{e_1}\int_{e_3}^{e_2}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{-16(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}}=\frac{\pi}{2},$$

où $e_1>x>e_2>y>e_3$.

La valeur de cette intégrale double se déduit des propriétés des fonctions $p(u)$, $\zeta(u)$, et de la relation

$$(2)\qquad \delta=\eta\omega'-\omega\eta'=\pm\frac{\pi i}{2},$$

où $\eta=\zeta(\omega)$, $\eta'=\zeta(\omega')$, le signe $\pm$ étant celui du coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$.

Inversement, on peut calculer directement la valeur de l'intégrale (1), sans employer les fonctions elliptiques, et en déduire une démonstration de la formule (2).

En supposant toujours e_1, e_2, e_3 réels, $e_1>e_2>e_3$, faisons la substitution

$$x=e_2+\mathrm{X},\qquad y=e_2-\mathrm{Y}.$$

En posant

$$e_1 - e_2 = a, \qquad e_2 - e_3 = b,$$

on a

$$I = \int_0^a \int_0^b \frac{(X+Y)\,dX\,dY}{4\sqrt{XY(a-X)(a+Y)(b+X)(b-Y)}}.$$

Faisons la nouvelle substitution

$$XY = u, \qquad Y - X = v,$$

de déterminant différentiel

$$\frac{D(u, v)}{D(X, Y)} = X + Y.$$

Si le point (X, Y) décrit les axes, entre les points (o, b), (o, o), (a, o), c'est-à-dire si l'on a $X = o$, Y variant de b à o; puis $X = o$, Y variant de o à a; on aura

$$u = o,$$

v variant de b à o puis à $-a$.

Pour $X = a$, Y variant de o à b, on a

$$u - av = a^2,$$

u variant de o à ab.

Pour $Y = b$, X variant de o à a, on a

$$u + bv = b^2,$$

u variant encore de o à ab.

Les points (X, Y) intérieurs au rectangle d'intégration, de côtés a, b, correspondent à des points (u, v) intérieurs au triangle dont les côtés ont pour équations

$$u = o, \qquad u - av = a^2, \qquad u + bv = b^2.$$

Les sommets de ce triangle sont les points

$$(u = o,\ v = -a), \qquad (u = o,\ v = b), \qquad (u = ab,\ v = b - a).$$

L'intégrale double devient ainsi

$$I = \int_0^{ab} \int_{\frac{u}{a}-a}^{b-\frac{u}{b}} \frac{du\, dv}{4\sqrt{u(a^2 - u + av)(b^2 - u - bv)}}.$$

Or on a

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \left(2 \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}\right)_\alpha^\beta = \pi \qquad (\alpha < \beta),$$

et

$$\int_{\frac{u}{a}-a}^{b-\frac{u}{b}} \frac{dv}{\sqrt{(a^2 - u + av)(b^2 - u - bv)}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}.$$

Par suite

$$I = \int_0^{ab} \frac{\pi\, du}{4\sqrt{abu}} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour en déduire la valeur de l'expression (2), supposons ω et $\frac{\omega'}{i}$ réels et positifs. On a

$$e_1 = p(\omega), \qquad e_2 = p(\omega + \omega'), \qquad e_3 = p(\omega'),$$

$$2\omega = \int_{e_3}^{e_2} \frac{dy}{\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}},$$

$$2\omega' = i\int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{-(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

$$\begin{aligned} 2\eta &= \zeta(u+2\omega) - \zeta(u) \\ &= -\int_{\omega'}^{\omega'+2\omega} p(u)\, du = -\int_{e_3}^{e_2} \frac{y\, dy}{\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\eta' &= \zeta(u+2\omega') - \zeta(u) \\ &= -\int_{\omega}^{\omega+2\omega'} p(u)\, du = -i\int_{e_2}^{e_1} \frac{x\, dx}{\sqrt{-(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\eta\omega' - \omega\eta' \\ &= \frac{i}{4}\int_{e_2}^{e_1}\int_{e_3}^{e_2} \frac{(x-y)\, dx\, dy}{\sqrt{-(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}} = \frac{\pi i}{2}. \end{aligned}$$

On peut remarquer que la fonction $p(u)$ suppose $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, mais la valeur de l'intégrale (1) reste la même, quels que soient e_1, e_2, e_3, pourvu que $e_1 > e_2 > e_3$.

Dans le cas où e_1, e_2, e_3 sont imaginaires, la formule (2) peut encore se déduire de l'intégrale (1).

Si e_1, e_2, e_3 ont des rapports réels, soit

$$\frac{e_1}{\rho_1} = \frac{e_2}{\rho_2} = \frac{e_3}{\rho_3} = e^{\theta i},$$

on peut poser

$$\begin{aligned} 2\omega &= \int_{e_3}^{e_2} \frac{dy}{\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}} \\ &= e^{-\frac{\theta i}{2}} \int_{\rho_3}^{\rho_2} \frac{dy}{\sqrt{(y-\rho_1)(y-\rho_2)(y-\rho_3)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\omega' &= \int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} \\ &= ie^{-\frac{\theta i}{2}} \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{dx}{\sqrt{-(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)}}, \end{aligned}$$

$\frac{\omega'}{i\omega}$ étant supposé positif;

$$2\eta = -e^{\frac{\theta i}{2}} \int_{\rho_3}^{\rho_2} \frac{y\,dy}{\sqrt{(y-\rho_1)(y-\rho_2)(y-\rho_3)}},$$

$$2\eta' = -ie^{\frac{\theta i}{2}} \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{-(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)}},$$

$\eta\omega'$ et $\omega\eta'$ ne dépendent pas de θ, et $\eta\omega' - \omega\eta'$ se ramène à l'intégrale I.

Enfin, si e_1, e_2, e_3 n'ont pas de rapports réels, soit

$$e_1 = A + Re^{\alpha_1 i}, \qquad e_2 = A + Re^{\alpha_2 i}, \qquad e_3 = A + Re^{\alpha_3 i}$$

et

$$x = A + Re^{ti}, \qquad y = A + Re^{\theta i}.$$

Supposons

$$0 < \alpha_1 < t < \alpha_2 < \theta < \alpha_3 < 2\pi,$$

les points x et y décrivent alors la circonférence qui passe par les points e_1, e_2, e_3. Pour préciser la valeur des radicaux, nous supposerons qu'en passant de l'arc $e_1 e_2$ à l'arc $e_2 e_3$, on tourne autour du point e_2 en passant en dehors de la circonférence. Soit alors

$$\sqrt{y - e_1} = \sqrt{2\mathrm{R}\sin\frac{\theta-\alpha_1}{2}}\, e^{\frac{\theta+\alpha_1+\pi}{4}i},$$

$$\sqrt{y - e_2} = \sqrt{2\mathrm{R}\sin\frac{\theta-\alpha_2}{2}}\, e^{\frac{\theta+\alpha_2+\pi}{4}i},$$

$$\sqrt{y - e_3} = \sqrt{2\mathrm{R}\sin\frac{\alpha_3-\theta}{2}}\, e^{\frac{\theta+\alpha_3-\pi}{4}i},$$

on en déduit

$$\sqrt{x - e_1} = \sqrt{2\mathrm{R}\sin\frac{t-\alpha_1}{2}}\, e^{\frac{t+\alpha_1+\pi}{4}i},$$

$$\sqrt{x - e_2} = \sqrt{2\mathrm{R}\sin\frac{\alpha_2-t}{2}}\, e^{\frac{t+\alpha_2-\pi}{4}i},$$

$$\sqrt{x - e_3} = \sqrt{2\mathrm{R}\sin\frac{\alpha_3-t}{2}}\, e^{\frac{t+\alpha_3-\pi}{4}i}.$$

Nous poserons

$$2\omega = \int_{e_3}^{e_2} \frac{dy}{\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}}$$

$$= e^{\frac{\pi-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}{4}i} \int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \frac{e^{\frac{\theta i}{4}}\, d\theta}{2\sqrt{2\mathrm{R}\sin\frac{\theta-\alpha_1}{2}\sin\frac{\theta-\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3-\theta}{2}}},$$

$$2\omega' = \int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

$$= e^{\frac{3\pi-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}{4}i} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{e^{\frac{ti}{4}}\, dt}{2\sqrt{2\mathrm{R}\sin\frac{t-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2-t}{2}\sin\frac{\alpha_3-t}{2}}}.$$

Si l'on sépare les parties réelles et imaginaires, sous la forme $2\omega = a + bi$, $2\omega' = a' + b'i$, dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, le coefficient de i est $\frac{ab' - ba'}{a^2 + b^2}$ et a le signe de

$$ab' - ba' = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \frac{\cos\frac{\theta - t}{4}\,dt\,d\theta}{8\mathrm{R}\sqrt{\sin\frac{t-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2 - t}{2}\sin\frac{\alpha_3 - t}{2}\sin\frac{\theta - \alpha_1}{2}\sin\frac{\theta - \alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3 - \theta}{2}}}$$

qui est positif.

D'autre part

$$2\eta = -\int_{e_3}^{e_2} \frac{y\,dy}{\sqrt{(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}}$$

$$= -e^{\frac{\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{4} i} \int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \frac{(\mathrm{A} + \mathrm{R}e^{\theta i})\,e^{\frac{\theta i}{4}}\,d\theta}{2\sqrt{2\mathrm{R}\sin\frac{\theta - \alpha_1}{2}\sin\frac{\theta - \alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3 - \theta}{2}}},$$

$$2\eta' = -\int_{e_2}^{e_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}}$$

$$= -e^{\frac{3\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{4} i} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{(\mathrm{A} + \mathrm{R}e^{ti})\,e^{\frac{ti}{4}}\,dt}{2\sqrt{2\mathrm{R}\sin\frac{t - \alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2 - t}{2}\sin\frac{\alpha_3 - t}{2}}},$$

$$\delta = \eta\omega' - \omega\eta' = \int_{e_2}^{e_1}\int_{e_3}^{e_2} \frac{(x - y)\,dx\,dy}{4\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}}$$

$$= e^{-\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2} i}$$

$$\times \int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \frac{(e^{\theta i} - e^{ti})\,e^{\frac{t+\theta}{4} i}\,dt\,d\theta}{32\sqrt{\sin\frac{t-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2 - t}{2}\sin\frac{\alpha_3 - t}{2}\sin\frac{\theta - \alpha_1}{2}\sin\frac{\theta - \alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3 - \theta}{2}}}.$$

Faisons la substitution

$$t = \alpha_2 - 2u, \qquad \theta = \alpha_2 + 2v$$

et posons

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 2a, \qquad \alpha_3 - \alpha_2 = 2b,$$

a et b sont positifs,

$$a + b = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2} < \pi,$$

$$\delta = i\,e^{(a-b)i}\int_0^a\int_0^b \frac{\sin(u+v)\,e^{3\frac{v-u}{2}i}\,du\,dv}{4\sqrt{\sin u \sin v \sin(a-u)\sin(a+v)\sin(b+u)\sin(b-v)}}.$$

Faisons la nouvelle substitution

$$\sin u \sin v = X, \qquad v - u = Y.$$

Le déterminant différentiel

$$\frac{D(X, Y)}{D(u, v)} = \sin(u+v).$$

Si le point (u, v) décrit les axes entre les points $(0, b)$, $(0, 0)$, $(a, 0)$, c'est-à-dire si $u = 0$, v variant de b à 0; puis $v = 0$, u variant de 0 à a; on a

$$X = 0,$$

Y variant de b à 0 et $-a$.

Lorsque $u = a$, v variant de 0 à b, on a

$$X = \sin a \sin(a + Y),$$

Y variant de $-a$ à $b - a$.

Lorsque $v = b$, u variant de 0 à a, on a

$$X = \sin b \sin(b - Y),$$

Y variant de b à $b - a$.

Les points (u, v) intérieurs au rectangle d'intégration, de côtés a, b, correspondent à des points intérieurs au triangle curviligne dont les côtés ont pour équations

$$X = 0, \qquad X = \sin a \sin(a + Y), \qquad X = \sin b \sin(b - Y).$$

et dont les sommets sont les points

$$(X = o,\ Y = -a),\quad (X = o,\ Y = b),$$
$$(X = \sin a \sin b,\ Y = b - a).$$

On a donc

$$\delta = \frac{i}{4} e^{(a-b)i} \times \left[\int_{-a}^{b-a} \int_0^{\sin a \sin(a+Y)} + \int_{b-a}^{b} \int_0^{\sin b \sin(b-Y)} \frac{e^{\frac{3}{2}Yi}\, dY\, dX}{\sqrt{\begin{matrix} X(X - \sin a \sin(a+Y)) \\ \times (X - \sin b \sin(b-Y)) \end{matrix}}} \right],$$

où les deux intégrales ne diffèrent que par les limites.

Dans la première, posons

$$X = \sin a \sin(a + Y) \sin^2\theta;$$

dans la seconde

$$X = \sin b \sin(b - Y) \sin^2\theta.$$

On a

$$\delta = \frac{i}{2} e^{(a-b)i} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-a}^{b-a} \frac{e^{\frac{3}{2}Yi}\, d\theta\, dY}{\sqrt{\sin b \sin(b - Y) - \sin a \sin(a + Y) \sin^2\theta}} \right.$$
$$\left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{b-a}^{b} \frac{e^{\frac{3}{2}Yi}\, d\theta\, dY}{\sqrt{\sin a \sin(a + Y) - \sin b \sin(b - Y) \sin^2\theta}} \right];$$

Or

$$\int_{-a}^{b-a} \frac{e^{\frac{3}{2}Yi}\, dY}{\sqrt{\sin b \sin(b - Y) - \sin a \sin(a + Y) \sin^2\theta}}$$
$$= \left[\frac{-2 e^{\frac{Yi}{2}} \sqrt{\sin b \sin(b - Y) - \sin a \sin(a + Y) \sin^2\theta}}{e^{-bi} \sin b + e^{ai} \sin a \sin^2\theta} \right]_{-a}^{b-a}$$
$$= 2\, \frac{e^{-\frac{a}{2}i} \sqrt{\sin b \sin(a + b)} - e^{\frac{b-a}{2}i} \sqrt{\sin a \sin b} \cos\theta}{e^{-bi} \sin b + e^{ai} \sin a \sin^2\theta},$$

la seconde intégrale s'en déduit par une simple permutation

$$-\int_b^{b-a} \frac{e^{\frac{3}{2}\mathrm{Y}i}\, d\mathrm{Y}}{\sqrt{\sin a \sin(a+\mathrm{Y}) - \sin b \sin(b-\mathrm{Y}) \sin^2\theta}}$$

$$= 2\, \frac{e^{\frac{b}{2}i}\sqrt{\sin a \sin(a+b)} - e^{\frac{b-a}{2}i}\sqrt{\sin a \sin b}\cos\theta}{e^{ai}\sin a + e^{-bi}\sin b \sin^2\theta}.$$

On obtient ainsi, en intervertissant les termes

$$\delta = -i e^{\frac{a+b}{2}i}\sqrt{\sin a \sin b}$$

$$\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin a\, e^{(a+b)i} + \sin b \sin^2\theta} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin b + e^{(a+b)i}\sin a \sin^2\theta}\right)$$

$$+ i\sqrt{\sin(a+b)}$$

$$\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\frac{ai}{2}}\sqrt{\sin b}\, d\theta}{\sin b + e^{(a+b)i}\sin a \sin^2\theta} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{bi}{2}}\sqrt{\sin a}\, d\theta}{\sin a + e^{-(a+b)i}\sin b \sin^2\theta}\right).$$

Posons dans la première intégrale

$$\sin\theta = x\sqrt{\frac{\sin a}{\sin b}},$$

dans la seconde

$$\sin\theta = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{\sin b}{\sin a}},$$

dans la troisième

$$\operatorname{tang}\theta = x\sqrt{\frac{\sin b}{\sin(a+b)}},$$

dans la quatrième

$$\operatorname{tang}\theta = x\sqrt{\frac{\sin a}{\sin(a+b)}}.$$

On obtient ainsi

$$\delta = -i e^{\frac{a+b}{2}i}\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + e^{(a+b)i}}$$

$$+ i e^{-\frac{ai}{2}}\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{-ai} + x^2} + i e^{\frac{bi}{2}}\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{bi} + x^2};$$

or

$$\int \frac{e^{\frac{\omega i}{2}}\,dx}{e^{\omega i}+x^2} = \frac{i}{2}\log\left(\frac{x+i\,e^{\frac{\omega i}{2}}}{x-i\,e^{\frac{\omega i}{2}}}\right)$$

$$= \frac{i}{4}\log\frac{1+x^2-2x\sin\frac{\omega}{2}}{1+x^2+2x\sin\frac{\omega}{2}} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{2x\cos\frac{\omega}{2}}{x^2-1}$$

et

$$\int_0^\infty \frac{e^{\frac{\omega i}{2}}\,dx}{e^{\omega i}+x^2} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{si} \qquad -\pi < \omega < \pi.$$

En prenant successivement pour ω les valeurs $a+b$, $-a$, b, on a

$$\delta = \frac{\pi i}{2}.$$

On pourrait, en changeant la valeur de

$$\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}$$

changer les signes de ω et η, alors δ et le coefficient de i dans $\frac{\omega'}{\omega}$ changent de signes en même temps.

[R7b]

SUR UNE LOI DE FORCE CENTRALE DÉTERMINÉE PAR LA CONSIDÉRATION DE L'HODOGRAPHE;

PAR M. PAUL-J. SUCHAR.

Docteur ès sciences.

Je me propose de résoudre le problème suivant :

Sachant que, sous l'action d'une force centrale, l'hodographe est une conique quelles que soient les conditions initiales, trouver la loi de la force.

Soit

$$(1)\quad f(x',y') = A'x' + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

l'équation de la conique hodographe rapportée à un système d'axes ayant le centre attractif pour origine. Les coordonnées x', y' sont les dérivées par rapport au temps des coordonnées x, y du point correspondant de la trajectoire.

Le théorème des aires nous donne

$$(2)\qquad xy' - yx' = \gamma.$$

Écrivons que la tangente à l'hodographe en un point quelconque est parallèle au rayon vecteur correspondant de la trajectoire; nous aurons

$$(3)\qquad \frac{y}{x} = -\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}},$$

$f'_{x'}$, $f'_{y'}$ étant les demi-dérivées partielles de (1) par rapport à x', y'.

Les équations (2) et (3) nous donnent

$$(4)\qquad x = -\gamma\frac{B'x' + C'y' + E'}{D'x' + E'y' + F'},\qquad y = \gamma\frac{A'x' + B'y' + D'}{D'x' + E'y' + F'}.$$

Si nous résolvons le système (4) par rapport à x', y', on a

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{(E'D' - B'F')x + (E'^2 - F'C')y + \gamma(C'D' - B'E')}{(D'B' - A'E')x + (D'C' - E'B')y + \gamma(B'^2 - A'C')},\\ y' &= -\frac{(D'^2 - A'F')x + (D'E' - F'B')y + \gamma(B'D' - A'E')}{(D'B' - A'E')x + (D'C' - E'B')y + \gamma(B'^2 - A'C')}.\end{aligned}\right.$$

Les relations (4) et (5) nous montrent qu'entre les coordonnées x', y' et x et y il existe une transformation homographique, et comme le point de coordonnées x' et y' décrit une conique, il résulte que le point de coordonnées x et y décrit aussi une conique, c'est-à-dire que la trajectoire correspondante sera aussi une conique et cela quelles que soient les conditions initiales.

La même proposition peut s'établir géométriquement d'une manière très simple.

Nous pouvons évidemment envisager la trajectoire comme étant l'enveloppe d'une de ses tangentes; or, en vertu du théorème des aires que l'on peut écrire sous la forme

$$pv = \gamma,$$

où v est la vitesse et p la distance du centre attractif à la tangente à la trajectoire, nous remarquons que l'extrémité du segment de la vitesse portée sur la droite qui mesure p est le pôle de la tangente à la trajectoire; nous remarquons encore que, si la tangente enveloppe la trajectoire, la courbe lieu du pôle tournée d'un angle droit autour du centre attractif n'est autre chose que la courbe hodographe; or, d'après une proposition bien connue en Géométrie, à savoir : *Si la polaire enveloppe une conique, le pôle décrit aussi une conique et réciproquement,* donc notre proposition se trouve établie.

D'après ce qui précède, notre problème se ramène à un problème un peu plus général que celui proposé par Bertrand (*Comptes rendus,* t. LXXXIV) et résolu à la fois par Halphen et M. Darboux.

Dans un travail qui paraîtra prochainement, nous reprenons le problème de Bertrand, ainsi modifié, où nous montrons qu'il existe, outre les deux lois de forces trouvées par Halphen et M. Darboux et qui ne dépendent que de la position du mobile, une troisième loi qui dépend de la distance au centre attractif, de la vitesse et de l'angle de la vitesse avec une droite fixe.

Nous allons terminer par une application qui nous paraît intéressante.

Trouver la loi de la force centrale sachant que le point correspondant de l'hodographe le parcourt suivant la loi des aires autour du centre attractif.

Si nous appelons s_1 l'arc de l'hodographe, la condition que le point de l'hodographe parcourt cette courbe suivant la loi des aires autour du centre attractif se traduit par une expression de la forme

$$\frac{ds_1}{dt} v \sin V = C_1,$$

où V est l'angle du rayon vecteur avec la tangente à la trajectoire; or, par définition, si J est la force cherchée, nous aurons

$$J = \frac{ds_1}{dt},$$

où nous supposons, pour simplifier, la masse du point égale à 1; donc la formule précédente s'écrit

$$J v \sin V = C_1.$$

D'après le théorème des aires, on a

$$v \sin V = \frac{C}{r},$$

C étant la constante des aires due à la force centrale; on trouve alors

$$J = \frac{C_1}{C} r,$$

donc la trajectoire est une conique ayant le centre attractif pour centre. Il résulte, d'après notre proposition sur l'hodographe, que l'hodographe sera aussi une conique.

Il est facile de se rendre compte de la nature de la conique hodographe. Remplaçons, dans l'expression

$$J v \sin V = C_1,$$

J par la valeur trouvée; nous aurons

$$v = \frac{C}{r \sin V},$$

ou encore, en désignant par r' le demi-diamètre de la conique trajectoire, conjuguée à la direction r, nous aurons

$$v = \frac{Cr'}{rr' \sin V};$$

or, d'après le théorème d'Apollonius, l'expression

$$rr' \sin V$$

est constante; il résulte alors que la vitesse est proportionnelle au demi-diamètre conjugué à la direction r.

Si nous nous rapportons maintenant à la définition de l'hodographe, nous savons que pour l'obtenir nous devons porter, par le centre attractif, des segments égaux et parallèles aux vitesses de la trajectoire, c'est-à-dire des segments proportionnels à r'; donc l'hodographe sera une courbe homothétique de la trajectoire et aura le même centre que la conique trajectoire.

[R1e]

NOTE SUR UN SYSTÈME ARTICULÉ;

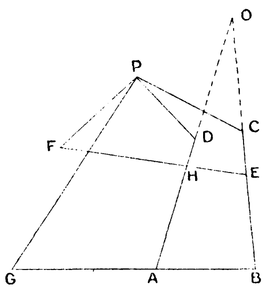
PAR M. J. RÉVEILLE.
Professeur d'Hydrographie.

On doit à M. Hart, outre son inverseur, un système articulé qui avec cinq tiges permet de décrire une circonférence ou une droite. Ce système a été étudié, en particulier, par M. Darboux (Notes à la *Mécanique* de Despeyrous) et par M. Kœnigs (*Cinématique*). Les développements de calcul qui forment la théorie de cet appareil contrastent avec la simplicité des résultats auxquels on aboutit; et M. Darboux a remarqué lui-même que la théorie est un peu longue pour un résultat extrêmement simple.

Voici une théorie purement géométrique qui me paraît avoir de plus l'avantage de mettre en lumière pour certains points de la figure un caractère de réciprocité assez remarquable.

Soit le pentagone articulé ABDPC (*fig.* 1); fixons

Fig. 1.



son côté AB, et assujettissons-le à cette condition géométrique que les angles C et D restent toujours égaux. Le point P décrit alors un cercle dont le centre G est sur AB, et tel que l'on ait

$$(1) \qquad \frac{GA}{GB} = \frac{PD.DA}{PC.CB}.$$

On peut donc réaliser la condition d'égalité des angles en réunissant le point P au point G par une tige PG de longueur convenable.

Je prends maintenant sur BC un point E tel que l'on ait $\frac{PC}{CE} = \frac{AD}{PD}$, et j'articule en P et E deux tiges PF et EF articulées entre elles en F, et telles que l'on ait

$$\frac{EF}{PG} = \frac{PF}{AG} = \frac{EC}{PD} = \frac{PC}{DA}.$$

En vertu de ces proportions, et comme les angles D et C sont égaux, le quadrilatère PCEF est semblable au quadrilatère ADPG, et les angles F et G sont égaux.

Soit H l'intersection des droites DA et EF; comparons les deux quadrilatères PDHF et BCPG. Ils ont leurs angles égaux chacun à chacun. En effet, les angles D et C sont égaux, ainsi que les angles F et G. D'ailleurs, l'angle FPD est égal à l'angle B, car cet angle FPD est égal à l'angle FPC diminué de l'angle DPC; mais on trouve la même mesure pour l'angle B dans le triangle ABO obtenu en prolongeant les côtés AD et BC.

Remarquons de plus que la similitude des quadrilatères PCEF et ADPG donne la relation

$$(2) \qquad \frac{PF}{GA} = \frac{PC}{DA}.$$

Multipliant les relations (1) et (2), nous obtenons

$$\frac{PF}{GB} = \frac{PD}{CB};$$

les deux quadrilatères PDHF et BCPG sont donc aussi semblables. Il en résulte que les longueurs DH et FH, et par conséquent aussi AH et HE, sont invariables, et l'on peut articuler les tiges AD et FE au point H sans gêner le mouvement du système articulé.

La nouvelle liaison introduite permet d'en supprimer d'autres, par exemple PG et PC; on a alors le système formé par les deux quadrilatères articulés ABHE et PDHF qui fait décrire un cercle au point P. Si l'on supprime PF et PG, on obtient le système articulé de Hart, qui réalise l'égalité des angles D et C par la tige HE; et le point P décrit un cercle de centre G. Si l'on fixe la tige HE, le point P décrit un cercle de centre F.

Conservant les tiges PF et PG, et supprimant les tiges PC et PD, si l'on fixe AH, le point P décrit un cercle de centre D; et si l'on fixe BE, il décrit un cercle de centre C. Ainsi les quatre points F, G, D, C jouent les uns par rapport aux autres des rôles réciproques.

Il est facile de voir que l'on a

$$\frac{FH}{HE} = \frac{GA}{AB} \quad \text{et} \quad \frac{DH}{HA} = \frac{CE}{EB};$$

et l'on a vu que

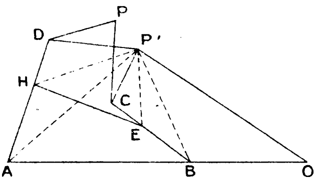
$$\frac{GA}{GB} = \frac{PD.DA}{PC.CB}.$$

Si donc on choisit les quatre tiges PD, DA, PC, CB de manière que le rapport $\frac{PD.DA}{PC.CB}$ soit égal à 1, le point G et aussi le point F sont à l'infini; la figure précédente n'existe plus, mais on voit par continuité que le point P décrira une droite perpendiculaire à AB. Son mouvement est réalisé au moyen des cinq tiges PD, DA, PC, CB, HE; et l'on a l'appareil à ligne droite de Hart.

Voici d'ailleurs comment on peut traiter directement le cas où le point P décrit une droite.

Soit un couple de deux tiges AD, DP′ (*fig.* 2) arti-

Fig. 2.



culées ensemble au point D, l'extrémité A étant un point fixe d'articulation; et un autre couple de deux tiges BC, CP′ articulées ensemble au point C, le point d'articulation B étant fixe comme le point A. Les tiges P'D et P'C sont articulées au point P' qui est relié par une tige P'O au point fixe O de la droite AB.

Les longueurs des tiges sont telles que

$$\frac{AD}{DP'} = \frac{BC}{CP'}, \tag{1}$$

et le point O ainsi que la tige OP' sont choisis de telle sorte que le point P' décrive le cercle lieu des points dont les distances P'A et P'B aux deux points A et B soient dans le rapport $\frac{P'A}{P'B} = \frac{AD}{BC} = \frac{P'D}{P'C}$.

Dans le mouvement du système à un paramètre ainsi défini, les triangles P'DA, P'CB restent semblables, et les angles P'DA, P'CB restent égaux.

Articulons en C une tige PC = P'D, et en D une tige PD = P'C, ces deux nouvelles tiges s'articulant en P; il est aisé de voir que le point P décrit une droite perpendiculaire à AB. En effet, les angles D et C du contre-parallélogramme PDP'C étant égaux, il en est de même des angles PDA et PCB. On a d'ailleurs

$$\overline{PA}^2 = \overline{PD}^2 + \overline{DA}^2 - 2PD.DA \cos PDA,$$
$$\overline{PB}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{CB}^2 - 2PC.PB \cos PCB.$$

Or les angles PDA et PCB sont égaux, et en vertu de (1) on a

$$PD.DA = PC.CB;$$

donc la différence $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2$ est constante.

Nous avons ainsi construit un nouvel appareil à ligne droite, mais on peut le simplifier et en déduire celui de Hart.

Pour cela, prenons sur DA un point H tel que le triangle P'DH soit semblable au triangle P'DA, et sur CB un point E tel que le triangle P′CE soit semblable au triangle P′CB. On a

$$\frac{P'D}{DH} = \frac{AD}{P'D},$$

d'où

$$DH = \frac{\overline{P'D}^2}{AD} = \frac{\overline{PC}^2}{AD};$$

de même

$$CE = \frac{\overline{P'C}^2}{BC} = \frac{\overline{PD}^2}{BC}.$$

Joignons HE ; les points HE étant homologues dans les deux triangles semblables P′DA, P′CB, le triangle P′HE est semblable au triangle P′AB, et l'on a

$$\frac{HE}{AB} = \frac{P'H}{P'A} = \frac{P'D}{DA} = \frac{PC}{DA}.$$

Donc HE est constant, et nous pouvons remplacer la liaison formée par les tiges DP′, P′C, P′O par une nouvelle liaison formée avec la tige HE reliant les points HE déterminés comme il a été dit.

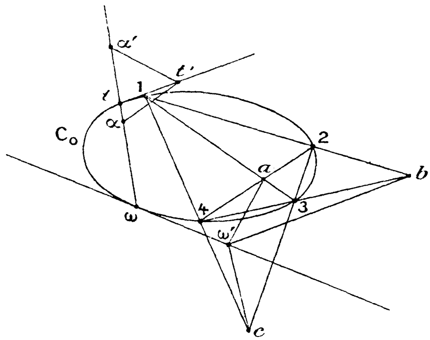
[M¹5g]

SUR LES CUBIQUES PLANES;

PAR M. GEORGES HALLEY DES FONTAINES,
Élève de Mathématiques spéciales
au collège Chaptal.

1. Soient dans le plan cinq points fixes, ω, 1, 2, 3, 4. On sait que le lieu des points de contact des tangentes menées de ω à toutes les coniques C qui passent par 1, 2, 3 et 4 est une cubique Γ, passant par ω et touchant

aux points 1, 2, 3 et 4 les droites ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Cette cubique passe évidemment par les sommets a, b, c du triangle conjugué commun aux coniques C. Remarquons



enfin que, si α et α' désignent deux points de Γ en ligne droite avec ω, ces points sont les points doubles de l'involution déterminée sur $\omega\alpha\alpha'$ par les coniques C : par suite, ils sont conjugués à toutes ces coniques, et se correspondent, par conséquent, dans la transformation du second ordre (α, α'), qui admet pour points doubles les points 1, 2, 3 et 4. La cubique Γ est donc le lieu des points α tels que la droite $\alpha\alpha'$ passe par ω.

Réciproquement, toute cubique Γ est susceptible de la génération précédente et cela d'une infinité de manières : il suffit de prendre pour ω un point quelconque de Γ, et pour points 1, 2, 3 et 4 les points de contact des tangentes menées à cette courbe par ω. On obtient ainsi une infinité de transformations du second ordre transformant Γ en elle-même, de sorte que la droite joignant deux points correspondants, α et α', de Γ passe par un point fixe de cette courbe.

2. Un théorème de M. d'Ocagne va nous permettre

de déterminer les tangentes à Γ aux points α et α' : il s'agit de la propriété suivante :

Les points doubles des involutions déterminées par les coniques C *d'un faisceau ponctuel sur les côtés d'un triangle inscrit à l'une,* C_0, *de ces coniques, sont trois à trois en ligne droite.*

Soit donc C_0 la conique (1234ω) : c'est évidemment la conique polaire de ω par rapport à Γ : soient t et t_1 les points où cette conique coupe deux sécantes $\omega\alpha\alpha'$ et $\omega\alpha_1\alpha'_1$ issues de ω, et qui rencontrent respectivement Γ en α, α' et α_1, α'_1. En appliquant la propriété que nous venons de rappeler, au triangle $\omega t t_1$, inscrit à C_0, et en faisant tendre t_1 vers t, on voit que, à la limite, les tangentes à Γ en α et α' couperont la tangente en t à C_0 en un même point t' qui sera le transformé de t dans la transformation du second ordre envisagée tout à l'heure.

3. Dans le cas particulier où les points 3 et 4, par exemple, viendraient à coïncider avec un même point, p, ce point serait double sur Γ. Dans ce cas, l'une des coniques C est formée des droites p_1 et p_2, de sorte que $p\alpha$ et $p\alpha'$ sont conjuguées harmoniques par rapport à ces droites; elles le sont aussi par rapport aux droites $p\omega$ et pt, puisque α et α', conjugués à la conique C_0, divisent harmoniquement la corde pt. Or, quand t tend sur C_0 vers le point p, $p\alpha$ et $p\alpha'$ deviennent les tangentes au point double : celles-ci seront donc conjuguées à la fois au couple p_1, p_2 et au couple formé par $p\omega$ et la tangente en p aux coniques C.

On voit donc que, si les coniques C étaient osculatrices en p, Γ aurait un rebroussement en ce point, la tangente de rebroussement étant la tangente commune aux coniques C.

4. La construction précédemment indiquée pour la tangente en α tombe en défaut, lorsque la droite $\omega\alpha$ devient la tangente en ω à Γ et, par suite, à C_0 ; dans ce cas, en effet, α et t se confondent au point ω' où Γ coupe à nouveau sa tangente $\omega\omega'$ en ω.

Mais, dans ce cas, on voit aisément que le point ω' est aussi sur les tangentes à Γ aux points a, b, c, sommets du triangle diagonal du quadrangle 1234. La conique $(abc\,\omega\omega')$ est donc la conique polaire du point ω', et elle a donc, en ω', même tangente que Γ.

5. Examinons, en particulier, le cas où le faisceau des coniques C comprend un cercle O de centre ω, c'est-à-dire celui où les points 1, 2, 3 et 4 sont équidistants de ω. On voit que α et α' se correspondent alors dans l'inversion de pôle ω et dont le module a pour valeur le carré du rayon du cercle O. Par suite, Γ est anallagmatique par rapport au pôle ω. Les points a, b et c sont alors les trois autres pôles d'anallagmatie, et ω' est le point à l'infini de la cubique.

On en déduit aisément une construction linéaire de l'asymptote réelle de Γ.

6. La construction de la tangente à la cubique, donnée précédemment (n° 2) fournit immédiatement la propriété suivante :

Si une sécante pivote autour d'un point fixe ω *d'une cubique* Γ, *les tangentes menées à* Γ *aux deux points variables d'intersection se coupent en un point dont le lieu est une courbe unicursale du quatrième ordre :*

cette courbe se déduit de la conique polaire de ω par la transformation du second ordre qui admet pour points doubles les points de contact des tangentes à Γ *issues de* ω.

Les trois points doubles du lieu sont d'ailleurs les points a, b, c, considérés tout à l'heure.

Par exemple, si Γ est anallagmatique, et ω un des pôles d'anallagmatie, les trois points doubles du lieu seront les trois autres pôles d'anallagmatie.

CORRESPONDANCE.

M. **C. Servais**, à Gand. — *Sur la question* 1803. — Nous avons démontré (*Mathesis,* 1894, p. 96) le théorème suivant :

Si les normales en quatre points d'une conique concourent en un même point, il en est de même des perpendiculaires élevées en ces points sur les cordes de courbure.

C'est la propriété énoncée par M. Duporcq (*Nouv. Ann. de Math.,* 1901, p. 474).

Voici la démonstration :

Soient M le point de concours des normales MA, MB, MC, MD; M_1 le point diamétralement opposé au point M sur l'hyperbole d'Apollonius relative à M; les droites MA, M_1A parallèles à deux diamètres conjugués de l'hyperbole sont également inclinées sur les asymptotes qui sont parallèles aux axes de la conique considérée. M_1A est donc perpendiculaire à la corde de courbure au point A.

M. **E. Merlin**, à Namur. — *Sur les lignes géodésiques planes.* — M. C. Lamioni, dans le numéro de décembre 1900 des *Nouvelles Annales,* et un Anonyme, dans le numéro de septembre dernier du même recueil, s'occupent de démontrer les deux théorèmes suivants :

1° *Si une ligne de courbure est géodésique, elle est plane;*

2° *Chaque ligne géodésique plane est ligne de courbure.*

Ces deux théorèmes sont bien connus, et en voici des démonstrations plus simples :

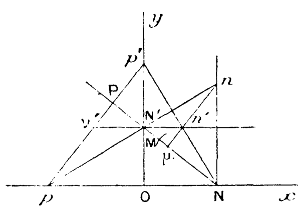
1° La ligne considérée étant une géodésique, sa normale principale, en chaque point, coïncide avec la normale à la surface, et, comme la ligne est en outre de courbure, sa normale principale enveloppe une courbe. Cette circonstance ne peut se produire que si la ligne est plane (*voir*, par exemple, W. DE TANNENBERG, *Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel*, p. 95).

2° Si la ligne géodésique est plane, son plan contient, en chacun des points de cette ligne, la normale à la surface, et, par conséquent, la ligne considérée est de courbure.

M. **d'Ocagne**. — *Au sujet des courbes de M. Collignon.* — M. Collignon a consacré récemment une étude détaillée aux courbes définies par la propriété suivante (¹) :

Si la normale en M *coupe les axes* Ox *et* Oy *aux points* N *et* N', *le produit* MN × MN' *est constant.*

On peut immédiatement déduire de là une construction fort



simple du centre de courbure μ répondant au point M.

En effet, la propriété de définition donne

$$\mathrm{MN}.d\mathrm{MN}' + \mathrm{MN}'.d\mathrm{MN} = 0.$$

Mais, si les perpendiculaires élevées en N et en N' à Ox et

(¹) *Nouvelles Annales*, 4e série, t. I, 1901, p. 481.

à Oy coupent en n et en n' la normale à la développée, on a

$$\frac{d.\mathrm{MN}}{d.\mathrm{MN}'} = \frac{\mu n}{\mu n'}.$$

Donc

$$\frac{\mu n}{\mu n'} = -\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{MN}'},$$

ou, si P est le conjugué harmonique de M par rapport à N et N'

$$\frac{\mu n}{\mu n'} = \frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{PN}'}.$$

Élevons en P à NN' une perpendiculaire qui coupe Ox en p et $\mathrm{N}'n'$ en ν'. Nous avons

$$\frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{PN}'} = \frac{\mathrm{P}p}{\mathrm{P}\nu'}.$$

Donc

$$\frac{\mu n}{\mu n'} = \frac{\mathrm{P}p}{\mathrm{P}\nu'},$$

et, puisque $\mathrm{P}p$ est parallèle à μn, les points n, N' et p sont en ligne droite. On peut donc dire que, *si la perpendiculaire à* MN' *menée par le conjugué harmonique* P *de* M *par rapport à* N *et* N' *coupe les axes* Ox *et* Oy *en* p *et en* p', *les droites* $p\mathrm{N}'$ *et* $p'\mathrm{N}$ *coupent les perpendiculaires élevées en* N *et en* N' à Ox *et à* Oy *sur la normale à la développée de la courbe* (M).

Remarquons que les triangles $pp'\mathrm{N}$ et $\mathrm{NN}'n$ sont semblables comme ayant leurs côtés orthogonaux, et, par suite, que

$$\frac{\mu \mathrm{N}}{\mu \mathrm{N}'} = \frac{\mathrm{P}p}{\mathrm{P}p'}.$$

M. **Painvin**, à Nantes. — Je suis très frappé d'une lacune, qui existait déjà dans l'enseignement des lycées alors que j'y étais, et que je constate encore maintenant que j'y ai un fils en spéciales et un autre en rhétorique. On a le plus grand soin de faire connaître aux élèves l'histoire de la Littérature, l'histoire de la Philosophie, et l'on néglige complètement de leur parler de l'histoire des Mathématiques. Il en résulte chez la plupart des élèves des idées extraordinairement fausses. Pour beaucoup, Pascal, Descartes, Leibniz ne sont que des littérateurs et des philosophes : on en étonnerait un grand nombre en leur apprenant jusqu'à quel point les Sciences mathématiques ont contribué à leur gloire et la part considérable qu'ils leur ont consacrée dans leurs travaux. Il me semble que cet enseignement devrait faire partie du programme de la classe de spéciales et pourrait avec avantage remplacer les vagues travaux littéraires auxquels on consacre encore un cours par semaine. Je me permets d'attirer sur cette intéressante question l'attention des rédacteurs des *Nouvelles Annales*. Ce journal, au temps de Terquem et de Gerono, s'intéressait très vivement aux questions de programme et d'examen, et ne ménageait pas à l'Université d'alors les critiques et les conseils, assez vertement exprimés quelquefois. Aujourd'hui qu'on s'occupe tant de remanier les méthodes d'enseignement, je m'étonne de n'avoir trouvé nulle part signalée l'absence d'un enseignement si utile, et si capable de développer, dans un sens philosophique, les idées des élèves des classes supérieures de sciences. On ne peut pourtant pas espérer qu'ils lisent d'eux-mêmes Montucla ou Chasles dans leurs moments perdus, s'ils en ont. Les quelques noms de mathématiciens qu'on leur cite au passage de théorèmes célèbres ne peuvent suppléer à un enseignement méthodique du développement et de l'enchaînement de leurs découvertes; c'est du moins mon humble avis, et la question m'a paru être assez intéressante pour vous être soumise.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1869.

(1900, p. 432.)

Étant données quatre divisions proportionnelles portées par quatre droites quelconques de l'espace, on considère les tétraèdres ayant pour sommets les points homologues de ces divisions. Si deux de ces tétraèdres sont semblables, tous les autres sont semblables deux à deux.

(E. Duporcq.)

SOLUTION

Par M. G. Fontené.

Soient, dans l'espace, deux segments AA_1 et BB_1, avec

$$(1) \qquad \frac{BB_1}{AA_1} = \sigma;$$

si l'on partage AB et A_1B_1 en C et C_1 dans un même rapport

$$(2) \qquad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{C_1A_1}} = k,$$

on a (*Nouvelles Annales*, 1899, p. 416)

$$\begin{aligned}(1+k)^2\,\overline{CC_1}^2 &= k^2\,\overline{AA_1}^2 + \overline{BB_1}^2 + 2k\,\overline{AA_1}\;\overline{BB_1}\cos(AA_1, BB_1)\\ &= \overline{AA_1}^2\,[k^2 + \sigma^2 + 2k\sigma\cos(AA_1, BB_1)]\\ &= k\sigma\overline{AA_1}^2\left[\frac{k}{\sigma} + \frac{\sigma}{k} + 2\cos(AA_1, BB_1)\right];\end{aligned}$$

en prenant les points D et D_1 pour un rapport k' tel que l'on ait

$$(3) \qquad \frac{k'}{\sigma} = \frac{\sigma}{k} \qquad \text{ou} \qquad kk' = \sigma^2,$$

on a donc

$$(4) \qquad \frac{(1+k)^2}{(1+k')^2}\,\frac{\overline{CC_1}^2}{\overline{DD_1}^2} = \frac{k}{k'}.$$

Soient alors $AA_1A_2A_3$ et $BB_1B_2B_3$ deux tétraèdres semblables, avec le rapport (1); si l'on partage AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 en C, C_1, C_2, C_3 d'une part, et D, D_1, D_2, D_3 d'autre part, de manière que l'on ait

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{C_1A_1}} = \ldots = k, \qquad \frac{\overline{BD}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{B_1D_1}}{\overline{D_1A_1}} = \ldots = k',$$

k et k' vérifiant la relation (3), on a

$$\frac{CC_1}{DD_1} = \frac{CC_2}{DD_2} = \frac{CC_3}{DD_3} = \frac{C_1C_2}{D_1D_1} = \ldots,$$

c'est-à-dire que les deux tétraèdres (C) et (D) ont leurs arêtes proportionnelles; comme ils dérivent d'une manière continue des tétraèdres semblables (A) et (B), ils sont semblables.

Si les deux tétraèdres (A) *et* (B) *sont égaux, les deux tétraèdres d'un couple quelconque* (C), (D) *le sont aussi;* on a en effet

$$\frac{CC_1}{DD_1} = \frac{\sqrt{k'} + \frac{1}{\sqrt{k'}}}{\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}},$$

et ce rapport est égal à 1 si l'on a $kk' = 1$, ou $\sigma = 1$.

1874.

(1900, p. 528.)

Soient P *et* Q *les points de contact de deux tangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements qui se rencontrent à angle droit en* M. *Montrer que :* 1° *la hauteur et l'hypoténuse du triangle* MPQ *sont également tangentes à l'hypocycloïde;* 2° *le lieu du pied de la hauteur est une circonférence de cercle.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

Soient 1 le rayon du cercle mobile, 3 celui du cercle fixe; désignons par t l'angle variable que fait avec l'axe des X le rayon vecteur joignant l'origine, centre du cercle fixe, au centre du cercle mobile, la courbe sera représentée par les relations

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{aligned} y &= 2\sin t - \sin 2t, \\ x &= 2\cos t - \cos 2t. \end{aligned} \right.$$

Par les deux points P et Q dont les coordonnées, tirées de (A), correspondent anx valeurs t et $\pi + t$ de l'angle variable, nous menons les deux tangentes

$$y\cos\frac{t}{2} + x\sin\frac{t}{2} = \sin\frac{3}{2}t,$$

$$y\sin\frac{t}{2} - x\cos\frac{t}{2} = \cos\frac{3}{2}t,$$

qui se coupent normalement au point M, dont les coordonnées sont

$$y = \sin 2t, \qquad x = -\cos 2t.$$

La droite PQ joignant les points de contact de ces deux tangentes a pour équation

$$y \cos t - x \sin t = - \sin 3t;$$

on voit qu'elle touche la courbe au point $(-2t)$.

La perpendiculaire abaissée de M sur PQ

$$y \sin t + x \cos t = - \cos 3t$$

touche l'hypocycloïde au point $(\pi - 2t)$.

2° Le lieu des rencontres de ces deux dernières droites, qui est aussi le lieu des points M, est le cercle

$$y^2 + x^2 = 1.$$

Un abonné nous écrit :

« La question 1874 est bien connue. *Voir* CREMONA, *Journal de Crelle*, t. 64; PAINVIN, *Nouvelles Annales*, 1860, p. 260. »

1875.

(1900, p. 528.)

Calculer la limite de l'expression

$$\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n^3}}$$

pour n infini. (E. WEILL.)

SOLUTION
Par M. AUDIBERT.

Soit m un nombre quelconque entier ou non, mais positif, plus grand que un. On a, n étant entier et positif, l'identité

$$n^{\frac{m+1}{m}} - 1 = \sum_{1}^{n-1} \left[(x+1)^{\frac{m+1}{m}} - x^{\frac{m+1}{m}} \right].$$

Le développement de $(x+1)^{\frac{m+1}{m}}$ par la série de Taylor arrêtée au troisième terme donne

$$(x+1)^{\frac{m+1}{m}} - x^{\frac{m+1}{m}} = \frac{m+1}{m} x^{\frac{1}{m}} + \frac{m+1}{2m}\,\frac{1}{m}\,\frac{1}{(x+\theta)^{\frac{m-1}{m}}}.$$

Le dernier terme, θ étant positif et inférieur à l'unité et x positif, sera toujours lui-même inférieur à 1 et positif.

Soit E la moyenne arithmétique des $(n-1)$ valeurs de ce terme correspondant à celles de x de 1 à $n-1$; nous pouvons écrire

$$n^{\frac{m+1}{m}} = 1 = \sum_{1}^{n-1} \frac{m+1}{m} x^{\frac{1}{m}} + (n-1)\mathrm{E}.$$

En divisant les deux membres de cette égalité par $n^{\frac{m+1}{m}}$ on aura

$$1 - \frac{1}{n^{\frac{m+1}{m}}} = \frac{\frac{m+1}{m}\sum_{1}^{n-1} x^{\frac{1}{m}}}{n^{\frac{m+1}{m}}} + \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{m}}} - \frac{1}{n^{\frac{m+1}{m}}}\right)\mathrm{E},$$

et à la limite pour n infini

$$\frac{\sum_{1}^{n-1} x^{\frac{1}{m}}}{n^{\frac{m+1}{m}}} = \frac{m}{m+1};$$

pour m $= 2$, la limite serait $\frac{2}{3}$.

Autres solutions très simples de M[lle] Paula Klekler et de M[lle] Amélie Pollak, en employant des intégrales définies.

1879.

(1900, p. 571.)

La tangente en un point M *d'une conique à centre coupe les axes en* A *et* B, *la normale au même point les rencontre en* A' *et* B'; *soit m le centre de courbure du point* M.

Démontrer que

$$\frac{mA'}{mB'} = \frac{MA}{MB},$$

et déduire de cette propriété une construction simple du centre de courbure. (Droz-Farny.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Si C est l'intersection des droites AB', A'B (¹), l'angle MCm est droit, d'après un théorème de Steiner (*Journal de Crelle*, t. 30, p. 271), donc les angles mCB', MCB sont égaux et la proportion est démontrée. La construction plus simple du point m, qui en découle, est donc une des deux données par Steiner (*loc. cit.*) : « La perpendiculaire à MC menée par l'intersection de AB' et A'B coupe la normale au point cherché. »

On peut démontrer le théorème de Steiner en observant que la parabole qui touche la normale et la tangente en M et les axes, a pour directrice la droite qui unit M au centre, et C pour foyer, m est donc bien le point de contact de la normale avec la parabole, c'est-à-dire le centre de courbure au point M.

Autre solution de M. E.-N. Barisien.

QUESTIONS.

1925. L'hyperbole équilatère ayant pour diamètre une corde AB quelconque d'une conique C et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de cette conique passe par les extrémités du diamètre de C symétrique par rapport aux axes du diamètre conjugué de la direction de AB.

Démontrer géométriquement cette proposition.

(M. d'Ocagne.)

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

DISCOURS PRONONCÉ PAR M. ROUCHÉ A LA CÉRÉMONIE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN L'HONNEUR DU COLONEL MANNHEIM (1).

« MON CHER COLLÈGUE,

» M. le Général commandant l'École et M. le Directeur des études ont retracé, dans un beau langage, votre double carrière d'officier et de professeur. Permettez-moi, au nom de notre vieille amitié, de venir, devant cet auditoire d'élite, rendre un juste hommage à votre talent et à vos travaux.

» Vos recherches mathématiques concernent toutes la Géométrie pure. Vous avez consacré à cette Science plus de cent contributions, Livres, Notes ou Mémoires, témoins irrécusables de votre puissance d'investigation et de la fécondité de vos méthodes.

» Votre première production n'est pas la moins originale. Elle comblait une lacune de la théorie de la transformation par polaires réciproques créée par le Général Poncelet. Le problème consistait à transformer les relations métriques sans leur faire subir une préparation préalable.

» Vous avez résolu la question en faisant connaître l'expression de la transformation d'un segment rectiligne par rapport à une circonférence de cercle, et en présentant cette expression sous des formes appropriées aux divers genres d'applications. Je ne saurais d'ailleurs abandonner la transformation par polaires réci-

(1) *Voir* le numéro de janvier des *Nouvelles Annales*, p. 25.

proques sans signaler l'application de cette méthode aux propriétés des rayons de courbure.

» Vous avez ensuite abordé un autre mode de transformation dite *par rayons réciproques* et qui, sans sortir du domaine de la Géométrie pure, vous a conduit, relativement aux anticaustiques de Bernoulli et à la cyclide de Dupin, à des résultats nouveaux parmi lesquels je tiens à citer cette élégante proposition : « Toute » sphère doublement tangente à une cyclide coupe cette » surface suivant deux circonférences. » Laissez-moi faire remarquer encore à ce sujet l'heureuse introduction d'une idée féconde, celle du *pôle principal*, c'est-à-dire du point qui, choisi pour pôle de la transformation, permet de transformer une courbe en elle-même.

» Il y a 40 ans, on ne connaissait que quelques rares théorèmes concernant les arcs de courbe. Malgré la difficulté du sujet, vous êtes parvenu à généraliser un beau théorème dû à Steiner et à découvrir plusieurs propriétés intéressantes en considérant, ce qui était alors une idée nouvelle, les arcs de courbes planes ou sphériques comme enveloppes de cercles.

» Voici un autre sujet sur lequel vous êtes revenu maintes fois : je veux parler de la construction géométrique des centres de courbure. Là aussi, vous avez eu l'occasion d'exercer votre sagacité habituelle, et vous avez récolté une ample moisson de tracés propres à piquer la curiosité de ceux qui aiment la Géométrie.

» Mais je ne puis tout dire, et j'ai hâte d'arriver à la partie la plus importante de votre œuvre, à celle de vos créations à laquelle vous attachez le plus de prix.

» Ampère a donné le nom de *Cinématique* à l'étude du mouvement considéré indépendamment des causes qui le produisent ; il n'est plus alors question des forces, mais seulement des déplacements et du temps. Fait-on en outre abstraction du temps, les déplacements restent seuls en jeu et l'on tombe de la sorte sur une branche spéciale de la Mécanique que vous avez nommée *Géométrie cinématique*. A peine entrevue avant vous, cette doctrine a acquis, grâce à vos travaux personnels, un développement et une importance de plus en plus considérables. Pour se rendre compte de cette extension, il suffit de comparer l'exposition qui figure dans la première édition de votre *Cours de Géométrie descriptive* à celle qui fait l'objet de votre dernier Ouvrage intitulé : *Principes et développements de Géométrie cinématique*.

» Ce grand Ouvrage, fruit de nombreuses années d'un labeur incessant, se compose de trois Parties suivies d'un Appendice.

» La première Partie se rapporte à la Géométrie cinématique plane. Vous rappelez d'abord le théorème publié en 1827 par Cauchy sur le déplacement plan des figures de forme invariable, ainsi que la méthode des normales que Chasles, en 1829, a déduite de cette proposition fondamentale. Tels sont les seuls emprunts que vous ayez faits à vos devanciers. Tout le reste de cette section vous appartient en propre. Je citerai particulièrement les formules concernant le déplacement des figures polygonales de forme variable; de ces formules si expressives vous avez tiré une nouvelle méthode de normales simple et facile, qui comprend comme cas particulier celle de Chasles, et permet en outre de construire les centres de courbure. Ces principes sont accompagnés de nombreuses applications dont les caustiques par réfraction, les coniques et leurs développées, les quadrilatères articulés, ont tour à tour fourni la matière.

» La seconde Partie concerne la Géométrie cinétique dans l'espace. Son point de départ est le Mémoire que Chasles a publié en 1843 sur le mouvement infiniment petit d'un solide libre, et dans lequel apparaissent pour la première fois les notions des droites conjuguées dont vous avez tiré un merveilleux parti. Mais c'est surtout à la théorie du déplacement d'un solide astreint seulement à quatre conditions que cette Partie doit son intérêt et son originalité. Parmi les résultats si remarquables que vous avez obtenus, je mentionnerai ceux qui sont relatifs aux normalies, à la courbure des surfaces, à la théorie du paraboloïde des huit droites, à l'hyperboloïde articulé, à la polhodie et à l'herpolhodie, au conoïde de Plücker, aux pinceaux de droites, etc.

» Cette énumération, quoique fort incomplète, montre combien les applications abondent déjà dans les deux premières sections. Mais là, ce ne sont encore, pour ainsi dire, que des exemples découlant directement des principes et destinés à les éclairer. Le véritable champ des applications est la troisième Partie. On y remarque d'abord des études qui se rapportent aux surfaces réglées, au contact du troisième ordre de deux surfaces, et à divers problèmes de la théorie des surfaces qui relèvent des infiniment petits du troisième ordre. Viennent ensuite un mode ingénieux de transformation applicable en Géométrie cinématique, et des recherches sur le déplacement d'une figure de forme invariable dont tous les plans passent par des points fixes, ainsi que sur le déplacement infiniment petit d'une figure polyédrale de dimensions variables. Enfin, je dois citer une étude approfondie de la surface des ondes lumineuses. Vos recherches sur cette surface vous ont occupé à diverses reprises; elles se distinguent non seulement par les résultats obtenus, mais encore par la méthode employée. Parmi les nouvelles propriétés géométriques que vous avez découvertes, vous avez été assez heureux pour en rencontrer plusieurs qui sont susceptibles d'une interprétation physique; on ne connaissait qu'un nombre fort restreint de propriétés de ce genre, malgré les beaux travaux de Fresnel et de ses successeurs.

» Après avoir parlé de la surface de l'onde comme surface limite, vous l'avez considérée simultanément avec des surfaces homofocales du second ordre; vous êtes ainsi amené à montrer la liaison géométrique très simple qui existe pour un point commun à trois surfaces homofocales du second ordre entre les six centres de courbure principaux de ces surfaces et les axes de courbure de leurs lignes d'intersection.

» Dans l'Appendice qui termine votre Livre, vous avez surtout voulu montrer comment vous aviez abordé l'étude du déplacement plan d'une figure polygonale de forme variable. Vous y avez de plus reproduit le Mémoire d'Optique géométrique que vous aviez publié en 1886 et qui renferme la solution géométrique du problème concernant la détermination des éléments des surfaces caustiques. Ici, tout est nouveau, tracés et méthode : vos devanciers Sturm et Bertrand n'avaient en effet considéré qu'un cas particulier, traité d'ailleurs par l'Analyse; ils n'avaient ainsi obtenu, même pour ce cas, que des formules sans constructions géométriques que comporte cependant un pareil sujet.

» C'était assurément une tentative hardie que de chercher à composer, avec tant de fragments épars, un ensemble complet et homogène. Vous avez pleinement réussi. Dans ce beau Livre, qui a conquis l'admiration de tous les géomètres français et étrangers, tout se tient, tout s'enchaîne; il y règne une unité parfaite, et sa lecture laisse cette impression que, pour la fermeté de l'esprit, vous ne le cédez à personne. Votre nom, mon cher Camarade, restera gravé en lettres d'or dans les Annales de la Géométrie, à côté de ceux de Chasles et de Poncelet, qui ont porté si haut le drapeau de notre chère École et dont vous êtes le plus brillant disciple et l'éminent continuateur. »

[F8fγ]

SUR L'ARC DE LA LEMNISCATE;

PAR M. R. BRICARD.

---

1. On sait depuis longtemps que, si deux points se déplacent sur une même lemniscate, de manière à limiter un arc de longueur constante, il existe une relation algébrique entre les coordonnées de ces deux points : l'invariabilité de longueur d'un arc de lemniscate se traduit en effet par une équation différentielle d'Euler, dont l'intégrale est algébrique.

Je me proposerai ici de préciser cette interprétation géométrique des propriétés de l'équation d'Euler, c'est-à-dire de définir géométriquement la relation algébrique qui existe entre les extrémités d'un arc de lemniscate, de longueur constante : plusieurs des résultats énoncés ci-dessous (§§ 2 et 3) avaient déjà été obtenus par Chasles (1) et par M. Humbert (2). Il m'a semblé qu'il y avait quelque intérêt à les réunir en les faisant dépendre d'une même méthode.

Les théorèmes du § 5 me paraissent nouveaux.

---

(1) *C. R.*, 1845, p. 199.
(2) *J. M. P.*, 1895, p. 216.

2. Soient L une lemniscate de centre O, Ox et Oy les tangentes à cette courbe en son point double. On sait que l'inverse de L par rapport au point O est une hyperbole équilatère H, dont l'équation est

$$xy = K.$$

On peut évidemment supposer $K = 1$, pour un choix convenable de la puissance d'inversion.

Soient m, m' deux points infiniment voisins de L, μ et μ' les points correspondants de H. On a, par la considération des triangles semblables Omm', $O\mu'\mu$,

$$mm' = \mu\mu' \frac{Om}{O\mu'} = \mu\mu' \frac{Om\, O\mu}{O\mu\, O\mu'},$$

ou, en désignant par A^2 la puissance d'inversion,

$$mm' = A^2 \frac{\mu\mu'}{O\mu'},$$

en négligeant un infiniment petit du second ordre. Soient x, y les coordonnées du point μ, $x + dx$, $y + dy$ celles du point μ'. On a

$$\overline{\mu\mu'}^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{1}{x^4}\right) dx^2,$$

$$\overline{O\mu}^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

L'arc infiniment petit de la lemniscate $mm' = dm$ a donc pour expression

$$dm = A^2 \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = A^2 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}.$$

Soient alors m et n deux points qui se déplacent sur L, de manière à limiter un arc de longueur constante,

μ et ν les points correspondant de H, x et ξ leurs abscisses respectives. Ces abscisses satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^4}}. \tag{1}$$

C'est l'équation d'Euler dont j'ai parlé au début de cette Note.

Remarquons que, l'hyperbole H ayant une asymptote parallèle à Oy, l'abscisse d'un point de H correspond d'une façon univoque à la position de ce point sur la courbe. Grâce à cette remarque, on peut appliquer immédiatement à l'équation (1) la méthode géométrique bien connue d'intégration de l'équation d'Euler, et l'on obtient le résultat suivant :

Soit $f(x, \xi) = 0$ une intégrale de l'équation (1). *Cette relation exprime que la droite joignant les points μ et ν, d'abscisses x et ξ, enveloppe une conique* C *rencontrant* H *aux points dont les abscisses sont racines de l'équation*

$$1 + x^4 = 0.$$

En ces points, les tangentes à H sont isotropes. On a, en effet,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2},$$

et, par suite, l'équation

$$1 + x^4 = 0$$

entraîne

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$$

La conique C rencontre donc H aux quatre points où la tangente est isotrope. Le point p, pôle de la corde $\mu\nu$, par rapport à H, décrit une conique polaire réciproque de C par rapport à H; cette conique a les mêmes tangentes isotropes que H et lui est par conséquent homofocale.

On parvient donc à ce théorème, dû à Chasles :

Si les points m et n se déplacent sur la lemniscate L, *en limitant un arc de longueur constante, les tangentes à* H *aux points μ et ν, qui correspondent respectivement à m et à n, se coupent sur une certaine conique fixe, homofocale à* H.

3. De là résultent diverses conséquences :

Soient mn, $m'n'$ deux arcs égaux de la lemniscate L, et soient μ, ν, μ', ν' les points de H qui correspondent respectivement aux points m, n, m', n'. Les pôles, par rapport à H, des cordes $\mu\nu$, $\mu'\nu'$ se trouvent, d'après ce qui précède, sur une même conique homofocale à H. Il en résulte, en vertu d'un théorème de Chasles, que les tangentes à H aux points μ, ν, μ', ν' touchent un même cercle. Par suite, les inverses de ces tangentes, c'est-à-dire les quatre cercles passant en O et touchant la lemniscate aux points m, n, m', n', toucheront aussi un même cercle. Ainsi :

Si deux arcs de la lemniscate sont égaux, les quatre cercles qui passent par le centre et qui touchent respectivement la courbe aux extrémités de ces deux arcs sont tangents à un même cercle [1].

Pour obtenir un nouvel énoncé remarquons que, sans modifier aucun des résultats précédents, on peut évidem-

---

[1] Humbert, *loc. cit.*

ment supposer que les courbes L et H ont les mêmes sommets. Dans ces conditions, L est non seulement une inverse, mais encore la podaire de H par rapport au centre O. Si le point m, qui correspond par inversion au point μ de H, est en même temps la projection du point O sur la tangente à H au point μ_1, les deux points μ et μ_1 sont symétriques par rapport à l'un des axes de H.

Ces propositions sont bien connues, et je ne m'arrêterai pas à leur démonstration, d'ailleurs des plus simples.

D'après cela, si un arc mn de la lemniscate varie en conservant une longueur constante, il y aura la même relation entre les points μ_1 et ν_1 de H, tels que les projections du centre O sur les tangentes en ces points soient les points m et n, qu'entre les points μ et ν, dont il a été question tout à l'heure : les tangentes en μ_1 et ν_1 se couperont sur une conique homofocale à P. Rappelons encore que les foyers de H sont les symétriques du centre O par rapport aux foyers de la lemniscate ([1]). On a donc le théorème suivant :

Si deux points m et n se déplacent sur une lemniscate de centre O en limitant un arc de longueur constante, le point t, commun aux perpendiculaires élevées aux points m et n aux droites Om et On, respectivement, décrit une conique ayant pour foyers les symétriques du point O par rapport aux foyers de la lemniscate.

On peut dire encore que *le centre du cercle qui passe par les points O, m, n se déplace sur une conique ayant les mêmes foyers que la lemniscate*. Ce théorème avait

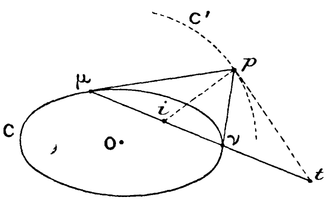
([1]) Les asymptotes isotropes de la lemniscate sont inflexionnelles, et cette courbe n'a pour cette raison que quatre foyers qui sont en même temps foyers ordinaires et foyers singuliers.

encore été énoncé, sous une forme un peu différente, par M. Humbert [1].

4. J'arrive à la démonstration géométrique du théorème énoncé à la fin du n° 2. J'établirai d'abord le théorème suivant :

Soient C *et* C′ *deux coniques homofocales* (*fig.* 1).

Fig. 1.



D'un point p *de la conique* C′ *on mène à* C *des tangentes dont les points de contact sont* μ *et* ν. *Si le point* p *se déplace infiniment peu sur* C′, *on a, entre les déplacements infiniment petits* $d\mu$ *et* $d\nu$ *des points* μ *et* ν *sur la conique* C *la relation suivante :*

$$\frac{d\mu}{\overline{O\mu'}^2} = \frac{d\nu}{\overline{O\nu'}^2}, \tag{2}$$

$O\mu'$ *et* $O\nu'$ *étant les demi-longueurs des diamètres conjugués respectivement aux diamètres* $O\mu$ *et* $O\nu$ *dans la conique* C.

Imaginons en effet que le point p se déplace sur C′. $\mu\nu$ enveloppe alors une conique C″, polaire réciproque de C′ par rapport à C. Le point de contact i de $\mu\nu$ avec C″

---

[1] *Loc. cit.*, p. 217.

est le pôle, par rapport à C, de la tangente pt à C′ et, par conséquent, le conjugué harmonique par rapport à $\mu\nu$ du point t, où cette droite est rencontrée par la tangente pt. Or, pt est, comme l'on sait, l'une des bissectrices de l'angle $\mu p \nu$: pi est donc l'autre bissectrice du même angle.

Soient μ_1 et ν_1 les positions occupées par les points μ et ν, par suite du déplacement infinitésimal du point p. On a

$$\mu\mu_1 = d\mu, \qquad \nu\nu_1 = d\nu;$$

les droites $\mu\nu$ et $\mu_1\nu_1$ se coupent au point i dont je viens d'indiquer la détermination.

Comparons les aires des deux triangles infiniment petits $i\mu\mu_1$, $i\nu\nu_1$. Les hauteurs issues du point i sont égales. On a donc

$$\frac{\text{aire } i\mu\mu_1}{\text{aire } i\nu\nu_1} = \frac{\mu\mu_1}{\nu\nu_1} = \frac{d\mu}{d\nu}.$$

Ce même rapport est encore égal à $\frac{i\mu, i\mu_1}{i\nu, i\nu_1}$, c'est-à-dire, à un infiniment petit près, à $\frac{\overline{i\mu}^2}{\overline{i\nu}^2}$. On a donc

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{\overline{i\mu}^2}{\overline{i\nu}^2} = \frac{\overline{p\mu}^2}{\overline{p\nu}^2}.$$

Or le rapport $\frac{p\mu}{p\nu}$ est égal à $\frac{O\mu'}{O\nu'}$, en vertu d'une propriété classique des coniques (évidente sur l'ellipse, considérée comme projection du cercle).

Le théorème énoncé est donc établi.

Supposons maintenant que la conique C soit une hyperbole équilatère. Dans une telle courbe, deux diamètres conjugués quelconques ont même longueur. On peut donc écrire, en ce cas,

$$\frac{d\mu}{\overline{O\mu}^2} = \frac{d\nu}{\overline{O\nu}^2}.$$

Si m et n sont les points de la lemniscate inverse de l'hyperbole équilatère par rapport à son centre, on a, comme on l'a vu au début du n° 2,

$$dm = \frac{d\mu}{\overline{O\mu}^2}, \qquad dn = \frac{d\nu}{\overline{O\nu}^2}.$$

Par suite

$$dm = dn. \tag{3}$$

Cette égalité permet d'énoncer la réciproque du théorème démontré analytiquement au n° 2.

Il faut remarquer toutefois que la relation (3) n'est vraie qu'en valeur absolue pour les différents cas qui peuvent se présenter. Le lecteur fera aisément la discussion nécessaire, et je me contenterai d'en énoncer le résultat final :

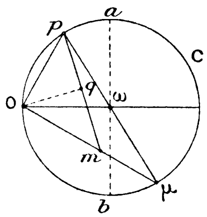
Si le point p décrit une conique C′ homofocale à H, *les points m et n décrivent sur la lemniscate des arcs de même longueur, mais l'arc mn n'est de longueur constante que si la conique C′ est une hyperbole. Si la conique C′ est une ellipse, le milieu de l'arc mn occupe une position fixe.*

5. Jusqu'ici j'ai considéré la lemniscate comme inverse ou comme podaire d'une hyperbole équilatère. Je me servirai dans ce qui suit d'un autre mode de génération, qui conduit, pour l'addition et la division des arcs, à

des constructions plus avantageuses que celles qu'on tire des théorèmes précédents.

Soient donnés un cercle C de centre ω (*fig.* 2), O un

Fig. 2.



point de ce cercle; $p\mu$ étant un diamètre variable, on détermine sur la droite $O\mu$ un point m tel que

$$pm = O\omega\sqrt{2}.$$

Le lieu du point m est une lemniscate de centre O.

Posons, en effet,

$$\widehat{\omega O \mu} = \varphi, \qquad Om = \rho, \qquad O\omega = 1.$$

On a

$$\rho^2 = \overline{pm}^2 - \overline{Op}^2 = 2 - 4\sin^2\varphi = 2\cos 2\varphi,$$

ce qui est bien l'équation en coordonnées polaires de la lemniscate.

Si l'on appelle q le milieu de pm, le quadrilatère $O\omega pq$ a ses côtés de longueurs invariables. On retrouve ainsi un mode connu de description de la lemniscate au moyen d'un quadrilatère articulé (Cayley).

L'arc infiniment petit de la lemniscate est donné par

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\varphi^2 = \frac{2\, d\varphi^2}{\cos 2\varphi},$$

et si l'on pose

$$\operatorname{tang}\varphi = t,$$

d'où $\cos 2\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $d\varphi = \frac{dt}{1+t^2}$,

$$ds^2 = \frac{2\,dt^2}{1-t^4}.$$

Les paramètres t et u qui correspondent aux extrémités d'un arc mn de longueur constante satisferont donc à l'équation d'Euler

$$\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Or, le paramètre t correspond d'une façon univoque à la position du point μ sur le cercle C. Soit ν le point qui correspond au point n.

En raisonnant comme au n° 2, on voit que la droite $\mu\nu$ enveloppe une conique C' rencontrant C aux points dont les paramètres ont les valeurs

$$\pm 1, \quad \pm i,$$

racines de l'équation

$$1 - t^4 = 0.$$

On reconnaît immédiatement que *C' est un cercle qui rencontre* C *aux points a et b, extrémités du diamètre perpendiculaire à* Oω.

La réciproque de ce théorème devra s'énoncer ainsi :

Aux points μ et ν du cercle correspondent respectivement deux points m et m' et deux points n et n' de la lemniscate; si une corde $\mu\nu$ du cercle varie en enveloppant un cercle qui passe aux points a et b, les quatre points m, m', n, n' décrivent des arcs égaux en valeur absolue. Deux des arcs mn, mn', $m'n$, $m'n'$ sont de longueurs constantes. Les deux autres ont leurs milieux fixes.

Ce théorème permet de résoudre aisément les problèmes relatifs au transport et à l'addition des arcs. Il fournit aussi une construction simple du point milieu d'un arc donné de la lemniscate.

Soient mn l'arc donné, m' et n' les points diamétralement opposés à m et n, μ et ν les points correspondant à ces points sur le cercle. Il existe deux cercles C′ et C″ tangents à $\mu\nu$ et passant par les points a et b.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les quatre points de contact avec C des tangentes communes (réelles) à C et C′ d'une part, C et C″ de l'autre. A ces points correspondent sur la lemniscate huit points $l_1, l'_1, \ldots, l_4, l'_4$. *Ce sont les points milieux des huit arcs de la lemniscate ayant pour cordes mn, mn', $m'n$, $m'n'$.*

Ce résultat est évident, après les développements qui précèdent.

6. On pourrait ajouter quelques propositions qui découlent de l'application du théorème de Poncelet aux cercles C et C′. Je me contenterai d'indiquer un cas particulier du théorème démontré au début du n° 5 :

Si le cercle C′ a son centre en O, le plus petit des arcs mn correspondant à la corde $\mu\nu$ est égal au quart du périmètre de la lemniscate.

On peut encore, par une construction un peu plus compliquée, déterminer le cercle C′ de manière que l'arc mn soit égal au tiers du périmètre de la lemniscate.

Je rappellerai, en terminant, le beau théorème qu'Abel a obtenu en appliquant les méthodes employées par Gauss pour résoudre l'équation binome à la division des périodes des fonctions elliptiques :

Le périmètre de la lemniscate est divisible en *n parties égales, par la règle et le compas, pour les valeurs de n qui rendent possible le problème analogue relatif au cercle* ($n = 2^k q q' q'' \ldots$; q, q', q'' étant des nombres premiers de la forme $2^r + 1$).

[M¹8g]

SUR CERTAINES EXTENSIONS DU THÉORÈME DE PONCELET;

PAR M. ERNEST DUPORCQ.

---

1. On sait que, comme l'a remarqué M. Darboux, deux polygones complets de m côtés, circonscrits à une même conique C, ont leurs $m(m-1)$ sommets sur une même courbe Γ d'ordre $(m-1)$. Il existe alors une infinité de polygones complets de m côtés, circonscrits à C et ayant leurs sommets sur Γ.

La conique C étant mise sous forme unicursale, soient

$$f_1(t) = 0 \quad \text{et} \quad f_2(t) = 0$$

les deux équations de degré m dont les racines correspondent aux côtés des deux premiers polygones considérés : on sait que les côtés d'un quelconque des polygones circonscrits à C et inscrits à Γ correspondront à une équation de la forme

$$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = 0.$$

On a donc ainsi une représentation d'une involution du $m^{\text{ième}}$ ordre et de première espèce.

2. Considérons maintenant trois polygones complets P_1, P_2, P_3, circonscrits à C et dont les côtés sont définis par les trois équations de degré m :

$$f_1(t)=0, \qquad f_2(t)=0, \qquad f_3(t)=0,$$

et soient Γ_1, Γ_2, Γ_3 les trois courbes d'ordre $(m-1)$ circonscrites respectivement aux polygones P_2 et P_3, P_3 et P_1, P_1 et P_2. Il est facile de voir que ces courbes ont en commun $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points.

Cette propriété résulte de ce que les deux tangentes à C issues d'un point de Γ_1 correspondent à deux racines d'une équation de la forme

$$(1) \qquad \lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3=0;$$

de même, deux tangentes à C issues d'un point de Γ_2 sont racines d'une équation de la forme

$$(2) \qquad \mu_3 f_3+\mu_1 f_1=0.$$

Si, pour des valeurs finies de λ_3 et μ_3 les équations (1) et (2) ont deux racines communes, les tangentes correspondantes menées à C se couperont en un des $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points communs à Γ_1 et à Γ_2, en dehors des $\frac{m(m-1)}{2}$ sommets du polygone P_3, et réciproquement. Mais, en multipliant respectivement (1) et (2) par μ_3 et λ_3, et retranchant membre à membre, on obtient une équation de la forme

$$(3) \qquad \nu_1 f_1+\nu_2 f_2=0,$$

à laquelle satisferont aussi les deux racines communes à (1) et à (2) : par suite, les points obtenus seront aussi sur Γ. Ainsi donc :

Les trois courbes d'ordre $(m-1)$ auxquelles sont inscrits deux à deux trois polygones complets *de m côtés, circonscrits à une même conique, ont* $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ *points communs.*

3. On peut encore se rendre compte de ce résultat au moyen de la méthode suivante.

Considérons la courbe unicursale U définie par les équations

$$(4)\qquad \frac{x}{f_1(t)} = \frac{y}{f_2(t)} = \frac{z}{f_3(t)}.$$

A toute valeur de t, il correspond à la fois un point de U et une tangente à C. Une droite quelconque Δ coupe U en m points, auxquels correspondent m tangentes à C : soit P le polygone complet qu'elles déterminent. Nous définissons ainsi une transformation qui fait correspondre à toute droite Δ les sommets d'un polygone complet de m côtés, circonscrit à C : c'est bien évidemment une transformation de contact. Si Δ a une enveloppe quelconque, les sommets de P décriront la courbe correspondant à cette enveloppe.

Supposons que Δ passe par le sommet

$$a_1(y = 0, z = 0)$$

du triangle de référence $a_1 a_2 a_3$.

A la droite

$$\lambda_2 y + \lambda_3 z = 0$$

correspond l'équation (1), de sorte qu'au point a_1 correspond la courbe Γ_1. Les courbes Γ_2 et Γ_3 correspondent de même aux points a_2 et a_3. Or, la courbe U admet $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles : pour toute droite Δ passant par l'un de ces points doubles, le polygone P correspondant à deux côtés fixes, qui sont définis par les deux valeurs que prend t pour ce point double, et il est bien visible que le point commun à ces deux côtés sera à la fois sur Γ_1, Γ_2 et Γ_3. On retrouve bien ainsi les $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points fixes.

4. Tout polygone P correspondant à une droite Δ, d'équation

$$ux + vy + wz = 0,$$

est défini par l'équation

$$uf_1 + vf_2 + wf_3 = 0,$$

dont les racines fournissent les valeurs que prend le paramètre t pour les m côtés de ce polygone.

Deux de ces polygones P et P', correspondant à deux droites Δ et Δ', sont inscrits à une courbe Γ, d'ordre $(m-1)$, qui peut être considérée comme la transformée du point a, commun aux droites A et A'.

Cette courbe passe évidemment aussi par les

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

points fixes.

Deux courbes Γ et Γ' se couperont, en outre de ces point fixes, en $\frac{m(m-1)}{2}$ points qui seront les sommets d'un polygone P, celui qui correspond à la droite aa'.

Remarquons enfin que par deux points arbitraires du plan il passe généralement une seule courbe Γ : en effet, de tout point du plan on peut mener à C deux tangentes, qui correspondent à deux points de U, et ceux-ci déterminent une droite Δ : à deux points m et m' correspondent ainsi deux droites Δ et Δ' se coupant en un point a, et la courbe Γ correspondant à ce point passe par m et m'.

Les courbes Γ forment donc un réseau linéaire, et leur équation générale est de la forme

$$\Gamma = \lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2 + \lambda_3\Gamma_3 = 0, \tag{5}$$

puisque Γ_1, Γ_2, Γ_3 sont trois courbes Γ.

Les trois paramètres λ sont d'ailleurs visiblement proportionnels aux coordonnées homogènes du point a par rapport au triangle $a_1 a_2 a_3$: ils définissent eux-mêmes un certain système de coordonnées homogènes par rapport à ce triangle.

5. Si le point a décrit une courbe dont l'équation tangentielle est dans le système

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0,$$

la courbe Γ aura une enveloppe d'équation

$$\varphi(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) = 0, \tag{6}$$

qui sera circonscrite à une infinité de polygones P.

Réciproquement :

Toute courbe de la forme

$$\varphi(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) = 0,$$

φ *étant homogène, est circonscrite à une infinité de polygones complets de* m *côtés circonscrits à* C.

Il est bien évident que les points fixes, communs à Γ_1, Γ_2, Γ_3, seront des points multiples d'ordre p de cette courbe, si φ est de degré p. Enfin toute tangente à C sera alors un côté de p polygones P inscrits dans la courbe obtenue.

6. Considérons le cas particulier où U est une cubique, et où a décrit une conique.

Les polygones P sont alors des triangles circonscrits à C, les courbes Γ des coniques passant par un point fixe, et la courbe (6) devient une quartique à un nœud. Il est facile de voir que C touche six bitangentes à cette quartique, celles-ci correspondant aux six points communs à la cubique U et à la conique décrite par a. Il est assez facile de déduire de là que :

Il existe toujours deux quartiques ayant un point double donné et bitangentes à six droites touchant une même conique.

7. On peut obtenir des résultats analogues dans l'espace pour des polyèdres complets ayant leurs sommets sur une cubique gauche. Nous nous bornerons, pour simplifier, au cas des tétraèdres.

Soient donc trois tétraèdres T_1, T_2 et T_3 inscrits à une cubique gauche C, et soient

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = 0$$

les trois équations en t du quatrième degré qui définissent leurs sommets. L'équation

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$$

représente une double infinité de tétraèdres inscrits à C et dont les faces enveloppent une quadrique, car par toute corde de C il passe seulement, en général, deux de ces faces. Cette quadrique est d'ailleurs évidemment inscrite aux trois tétraèdres T_1, T_2 et T_3. On voit donc que :

Trois tétraèdres inscrits à une même cubique gauche sont circonscrits à une même quadrique Q, et il existe alors une double infinité de tétraèdres inscrits à la cubique et circonscrits à Q.

8. On voit que les paramètres correspondant aux sommets de ces tétraèdres correspondent à ceux de quatre points en ligne droite sur la quartique unicursale

$$\frac{x}{f_1} = \frac{y}{f_2} = \frac{z}{f_3}.$$

Mais celle-ci admet trois points doubles. A toutes les sécantes issues de l'un de ces points correspondent une infinité de tétraèdres circonscrits à Q et ayant pour arête commune une corde de la cubique : les extrémités de celle-ci correspondent aux deux valeurs du paramètre qui fournissent le point double envisagé. On obtient ainsi trois cordes de la cubique qui sont nécessairement des génératrices de Q.

Réciproquement :

Il existe une double infinité de tétraèdres inscrits à une cubique gauche et circonscrits à une quadrique admettant pour génératrices trois cordes de cette cubique.

9. Soit maintenant T_4 un quatrième tétraèdre inscrit à C et correspondant à une équation

$$f_4 = 0.$$

Les quatre tétraèdres considérés sont, trois à trois, circonscrits à quatre quadriques, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Celles-ci ont une génératrice commune.

Pour le montrer simplement, considérons la quartique *gauche* unicursale définie par les équations

$$\frac{x}{f_1} = \frac{y}{f_2} = \frac{z}{f_3} = \frac{t}{f_4},$$

par rapport à un tétraèdre $a_1 a_2 a_3 a_4$. Les t des sommets d'un tétraèdre inscrit à C et circonscrit à Q_1 correspondent aux points d'intersection de la quartique avec un plan issu de a_1. Or une quartique gauche a une infinité de sécantes triples : les trois points de la cubique qui correspondront à trois points en ligne droite sur la quartique détermineront un plan touchant à la fois Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4, puisque les trois points de la quartique se trouvent bien dans un même plan contenant a_1, ou a_2, ou a_3, ou enfin a_4. Trois points alignés sur la quartique y forment d'ailleurs évidemment une involution de troisième ordre et de première espèce, puisque la donnée de l'un de ces points définit les deux autres. Or sur la cubique gauche une telle involution est évidemment obtenue en la coupant par des plans issus d'une droite fixe, et réciproquement. Donc, les plans tangents communs à Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 sont les plans issus d'une certaine droite Δ, qui est par suite une génératrice commune à ces quadriques.

Ainsi donc :

Les quatre quadriques Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, *auxquelles sont circonscrits trois par trois quatre tétraèdres inscrits à une cubique gauche,* C, *ont une génératrice commune.*

10. Par une correspondance anharmonique entre les points d'une quartique gauche unicursale et ceux d'une cubique gauche, on associe donc à tout plan Π de l'espace les faces d'un tétraèdre T inscrit à la cubique. Si le plan Π pivote autour d'un point fixe a, on voit que T reste circonscrit à une quadrique Q, passant par la droite fixe Δ.

A trois points a de l'espace correspondront trois quadriques Q passant par Δ et qui seront inscrites à un même tétraèdre inscrit à la cubique, et correspondant au plan des trois points.

Si donc a décrit une surface, Q aura une enveloppe à deux paramètres, qu'elle touchera en quatre points où les plans tangents formeront un tétraèdre inscrit à la cubique. On trouve ainsi que :

Si φ *désigne une fonction homogène, et* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 *les premiers membres des équations* TANGENTIELLES *des quadriques* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, *l'équation*

$$\varphi(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = 0$$

représente une surface inscrite à une double infinité de tétraèdres inscrits à la cubique gauche C.

Si φ est de degré m, toute corde de la cubique est une arête de m tétraèdres circonscrits à cette surface.

[P4a]

EXEMPLE DE TRANSFORMATION BIRATIONNELLE;

PAR M. E. LACOUR.

Quand on commence l'étude des transformations birationnelles, il est bon de vérifier les propositions générales sur des exemples simples. La question suivante pourra fournir un de ces exemples.

Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy *et un point* I, *à tout point* M *du plan on fait correspondre le point* m *symétrique du point donné* I *par rapport à la droite qui joint les projections* P *et* Q *du point* M *sur les axes* Ox *et* Oy.

Il s'agit d'abord d'obtenir les coordonnées de chacun des points M et m en fonction des coordonnées de l'autre point.

Nous désignerons par a, b les coordonnées du point I, par x, y et X, Y les coordonnées des points m et M.

1. *Formules de transformation.* — On trouve de suite les deux relations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x+a}{X}+\frac{y+b}{Y}-2=0,\\ &\frac{y-b}{X}-\frac{x-a}{Y}=0,\end{aligned}\right.$$

qui sont du premier degré par rapport à x et y d'une part, à $\frac{1}{X}$ et $\frac{1}{Y}$ d'autre part; on en tire les formules cherchées

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} X&=\frac{x^2+y^2-a^2-b^2}{2(x-a)},\\ Y&=\frac{x^2+y^2-a^2-b^2}{2(y-b)},\end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x-a&=\frac{2Y(XY-bX-aY)}{X^2+Y^2},\\ y-b&=\frac{2X(XY-bX-aY)}{X^2+Y^2}.\end{aligned}\right.$$

Comme on pouvait le prévoir géométriquement, non seulement x et y s'expriment rationnellement en X et Y, mais encore X et Y sont rationnels en x et y : la transformation est birationnelle.

Pour étudier cette transformation, il nous sera commode de dire que le point (x, y) se déplace dans un plan xOy et le point (X, Y) dans un plan XOY, en supposant que les plans ont été superposés de façon que OX et OY coïncident respectivement avec Ox et Oy.

A une droite

$$UX + VY + W = 0$$

décrite par le point M dans le plan XOY correspond dans le plan xOy la courbe

$$(\gamma) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2 - a^2 - b^2)[U(y - b) + V(x - a)] \\ \qquad\qquad\qquad + 2w(x - a)(y - b) = 0. \end{cases}$$

De même, à une droite

$$u(x - a) + v(y - b) + w = 0,$$

décrite par le point m dans le plan xOy, correspond dans le plan XOY la courbe

$$(\Gamma) \quad (XY - bX - aY)(uY + vX) + \frac{1}{2}w(X^2 + Y^2) = 0.$$

Les courbes (γ) et (Γ) sont d'un même degré (cette coïncidence se produit dans toute transformation birationnelle). C'est ce degré qui sert à définir l'ordre de la transformation; la transformation considérée ici est du troisième ordre.

2. *Points fondamentaux.* — Les courbes (γ) correspondant aux droites du plan XOY forment un réseau; toutes les courbes de ce réseau ont en commun un point double et quatre points simples; le point double a pour coordonnées a et b; les points simples sont définis par

$$\begin{cases} x = a, \\ y = -b, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -a, \\ y = b, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

De même toutes les courbes (Γ) qui correspondent aux droites du plan xOy ont en commun un point double et quatre points simples : le point double est l'origine, les quatre points simples sont définis par

$$\begin{cases} XY = 0, \\ Z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} XY - bX - aY = 0, \\ X^2 + Y^2 = 0, \end{cases}$$

en écartant la solution $X = 0$, $Y = 0$ qui correspond au point double.

On appelle *points fondamentaux* du plan xOy les points communs à toutes les courbes (γ), points fondamentaux du plan XOY les points communs à toutes les courbes (Γ).

Remarquons que, si l'on assujettit une cubique à admettre un point donné comme point double et quatre points donnés comme points simples, l'équation de la cubique est de la forme

$$Uf + V\varphi + W\psi = 0,$$

U, V, W désignant des paramètres arbitraires; de plus, deux de ces cubiques se coupent en un seul point non situé aux points donnés [*voir*, pour le cas général, Salmon, *Traité de Géométrie analytique* (courbes planes), traduit par Chemin, p. 439, 440 et 441].

Lignes fondamentales. — Cherchons si le point M tend vers une position limite quand le point m se rapproche de l'un des points fondamentaux du plan xOy, en se déplaçant sur une courbe déterminée qui passe par ce point. Considérons d'abord le point fondamental (a, b) qui est point double pour toutes les courbes (γ). Posons

$$y - b = t(x - a)$$

dans les formules (1), elles deviennent

$$2X = x + a + (y + b)t,$$

$$2Y = \frac{x + a + (y + b)t}{t},$$

puis supposons que, $x - a$ tendant vers zéro, t tende vers une limite t_1. On voit que X et Y ont respectivement pour limites

$$X_1 = a + bt_1,$$

$$Y_1 = b + \frac{a}{t_1}.$$

La position limite M_1 de M dépend de t_1, et le lieu de ces positions limites, quand t_1 varie, est la courbe du second ordre

$$(X - a)(Y - b) = ab \qquad \text{ou} \qquad XY - bY - aY = 0.$$

Cette courbe se nomme la *courbe fondamentale* correspondant au point fondamental (a, b).

Il est essentiel de remarquer que, si une droite du plan $x\,Oy$ passe par le point fondamental (a, b), la cubique (Γ) correspondante se décompose en deux lignes dont l'une est la conique fondamentale que nous venons de définir. En effet, si

$$u(x - a) + v(y - b) = 0$$

est la droite du plan $x\,Oy$, la courbe (Γ) se réduit

$$(XY - bX - aY)(uY + vX) = 0.$$

On verrait de même que, au point fondamental $(a, -b)$ correspond la ligne fondamentale

$$Y = 0,$$

au point fondamental $(b, -a)$, la ligne fondamentale

$$X = 0,$$

aux deux points fondamentaux $(x^2 = y^2 = 0,\ z = 0)$ les deux lignes fondamentales

$$X^2 + Y^2 = 0.$$

3. Il est facile de voir que *tous les points d'une ligne fondamentale située dans le plan* XOY *doivent faire partie de la jacobienne du réseau des courbes* (Γ), *lieu des points doubles de ces courbes.*

Montrons-le pour la conique fondamentale qui correspond au point (a, b). La cubique (Γ), correspondant à une droite

$$u(x-a)+v(y-b)=0,$$

se décompose en une conique et une droite passant par O; elle admet comme points doubles les points communs à la conique et à la droite; or, quand $\frac{u}{v}$ varie, la conique reste fixe, la droite tourne autour de l'origine.

Donc tous les points de la conique fondamentale peuvent être considérés comme points doubles d'une cubique (Γ), ou encore tous les points de la conique

$$XY-bX-aY=0$$

font partie de la jacobienne du réseau des courbes (Γ). On pourrait répéter un raisonnement analogue pour chacune des lignes fondamentales

$$X=0, \qquad Y=0, \qquad X^2+Y^2=0.$$

Or la jacobienne d'un réseau de cubiques est une courbe du sixième ordre.

Pour le réseau des courbes (Γ), elle doit donc se réduire à

$$XY(X^2+Y^2)(XY-bX-aY)=0.$$

Nous aurons plus tard une vérification de ce résultat en faisant le calcul qui donne le développement du jacobien pour le réseau des courbes (Γ).

4. *La transformation considérée du troisième ordre peut être remplacée par deux transformations quadratiques successives.*

En effet, les relations (1) entre les coordonnées des points correspondants m et M peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(4) \qquad \begin{cases} p(x+a)+q(y+b)+2=0, \\ p(y-b)-q(x-a) \qquad =0; \end{cases}$$

$$(5) \qquad \begin{cases} p=-\dfrac{1}{X}, \\ q=-\dfrac{1}{Y}, \end{cases}$$

et l'on voit de suite que chacun des systèmes de relations (4) et (5) définit une transformation quadratique.

Nous allons nous servir de cette propriété pour obtenir simplement le jacobien du réseau des courbes (Γ). Si nous rendons homogène le premier membre de l'équation de (Γ) en remplaçant X et Y par $\frac{X}{Z}$ et $\frac{Y}{Z}$ et si nous le multiplions par Z^4 (ce qui a seulement pour effet de multiplier le jacobien par un facteur numérique et par une puissance de Z), nous pourrons écrire l'équation de (Γ) sous la forme

$$(\Gamma) \qquad u\,F(X,Y,Z)+v\,\Phi(X,Y,Z)+w\,\Psi(X,Y,Z)=0,$$

en posant

$$\begin{aligned} F(X,Y,Z) &= \quad (XY \quad -bXZ-ayZ)\,YZ, \\ \Phi(X,Y,Z) &= \quad (XY \quad -bXZ-ayZ)\,YZ, \\ \Psi(X,Y,Z) &= \tfrac{1}{2}[(XZ)^2+(YZ)^2]; \end{aligned}$$

enfin si nous faisons le changement de variables

$$p=-XZ, \qquad q=-YZ, \qquad r=XY,$$

l'équation de (Γ) devient

$$u f(p, q, r) + v \varphi(p, q, r) + w \psi(p, q, r) = 0:$$

en posant

$$\begin{aligned} f(p, q, r) &= - \ (ap + bq + r)p, \\ \varphi(p, q, r) &= - \ (ap + bq + r)q, \\ \psi(p, q, r) &= \ \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2). \end{aligned}$$

Mais, d'après une propriété des jacobiens qui est bien connue et d'ailleurs facile à vérifier, on a

$$J = \Delta . D$$

en désignant par J le jacobien des trois fonctions F, Φ, Ψ, par Δ celui des trois fonctions f, φ, ψ et par D celui des trois fonctions p, q, r.

Or ici l'on trouve de suite

$$\begin{gathered} D = 2XYZ, \\ \Delta = -(ap + bq + r)(p^2 + q^2); \end{gathered}$$

on a donc, en remplaçant p, q, r par leurs valeurs et faisant ensuite $Z = 1$,

$$J = -2XY(X^2 + Y^2)(XY - bX - aY).$$

Ainsi la jacobienne du réseau des courbes (Γ) se compose des courbes fondamentales situées dans le plan XOY.

On démontre, en général, qu'une transformation birationnelle établissant une correspondance entre les points de deux plans peut être remplacée par une succession de transformations quadratiques (Salmon, *Courbes planes*, p. 450).

Pour l'étude de ces transformations et celle d'autres transformations établissant une correspondance birationnelle entre les points de deux courbes, on trouvera des renseignements dans l'Ouvrage plusieurs fois cité de Salmon, dans les *Leçons sur la Géométrie de Clebsch* (recueillies par Lindemann, traduites par A. Benoist, en particulier t. II, p. 192) et, plus tard, dans la *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, par Appell et Goursat (p. 256 et suiv.).

[O3k]

SUR LES HÉLICES CYLINDRIQUES DONT LES NORMALES PRINCIPALES RENCONTRENT UNE DROITE FIXE;

PAR M. HENRI PICCIOLI, à Pise.

La question que je me propose de résoudre dans cette Note est de chercher les hélices cylindriques dont les normales principales rencontrent une droite fixe. Cette question fut proposée et résolue par M. Pirondini dans un Travail paru dans le *Giornale di Matematiche* en 1885 : une autre résolution est due à M. Cesàro et on peut la trouver dans l'année 1886 du même journal. La solution que je vais donner est une application de certaines relations qui lient les moments des directions principales d'une courbe gauche par rapport à une droite fixe, formules que je ne crois pas remarquées jusqu'ici.

Soient p, q, r les cosinus des angles que la tangente, la normale principale, la binormale d'une courbe à double courbure L font respectivement avec une droite fixe l. On sait que, si ρ et τ désignent les rayons de courbure et de torsion

$$(1)\qquad \frac{dp}{ds}=\frac{q}{\rho},\qquad \frac{dq}{ds}=-\frac{p}{\rho}-\frac{r}{\tau},\qquad \frac{dr}{ds}=\frac{q}{\tau},$$

s désignant l'arc de L. On en déduit aisément que, si M_1, M_2, M_3 désignent les moments par rapport à l des directions principales de L, on a

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dM_1}{ds} = \dfrac{M_2}{\rho}, \\ \dfrac{dM_2}{ds} = -\dfrac{M_1}{\rho} - \dfrac{M_3}{\tau} + r, \\ \dfrac{dM_3}{ds} = \dfrac{M_2}{\tau} - q. \end{cases}$$

Ce sont les formules auxquelles je faisais allusion plus haut.

Supposons maintenant que les normales principales de L rencontrent la droite l, c'est-à-dire que M_2 est nul. Les formules (2) deviennent

$$(3)\quad \begin{cases} M_1 = \text{const.}, \\ \dfrac{M_1}{\rho} + \dfrac{M_3}{\tau} = r, \\ \dfrac{dM_3}{ds} = -q. \end{cases}$$

La première de ces relations nous montre que : *Toute courbe dont les normales principales rencontrent une droite fixe jouit de la propriété que le moment de ses tangentes par rapport à cette droite est constant.*

Soit h le segment compris sur une normale principale entre L et l; désignons respectivement par (a, a', a''), (b, b', b''), (c, c', c'') les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale, par (x, y, z) les coordonnées d'un point de L, et par (x', y', z') celles du point correspondant sur l. On a

$$x' = x + bh, \qquad y' = y + b'h, \qquad z' = z + b''h.$$

En dérivant par rapport à s, et en tenant compte des formules de Serret, analogues aux formules (1), on en déduit

$$\frac{dx'}{dz} = a + b\frac{dh}{ds} - \frac{ch}{\tau} - \frac{ah}{\rho},$$
$$\frac{dy'}{dz} = a' + b'\frac{dh}{ds} - \frac{c'h}{\tau} - \frac{a'h}{\rho},$$
$$\frac{dz'}{dz} = a'' + b''\frac{dh}{ds} - \frac{c''h}{\tau} - \frac{a''h}{\rho}.$$

En posant

$$(4) \qquad A^2 = \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{ds^2} = \frac{ds'^2}{ds^2},$$

et en remarquant que

$$\alpha = \frac{dx'}{A\,ds}, \qquad \alpha' = \frac{dy'}{A\,ds}, \qquad \alpha'' = \frac{dz'}{A\,ds}$$

sont les cosinus directeurs de la droite l, on en tire

$$(5) \qquad \begin{cases} p = a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' = \dfrac{1 - \dfrac{h}{\rho}}{A}, \\ q = b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' = \dfrac{1}{A}\dfrac{dh}{ds}, \\ r = c\alpha + c'\alpha' + c''\alpha'' = -\dfrac{1}{A}\dfrac{h}{\tau}. \end{cases}$$

Supposons maintenant que la courbe L soit une hélice cylindrique, ce qui conduit à la relation

$$(6) \qquad \frac{\tau}{\rho} = \operatorname{tang}\varphi \qquad (\varphi \text{ const.}).$$

En multipliant par τ la seconde des équations (2), dérivant par rapport à s, et tenant compte des systèmes (1) et (2), on obtient

$$2q + r\frac{d\tau}{ds} = 0,$$

et, en y remplaçant q et r par les valeurs (5),

$$\frac{2}{h}\frac{dh}{ds} - \frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{ds} = 0.$$

Il s'ensuit que

$$(7) \qquad h = \sqrt{a\tau} = \sqrt{a\rho \tang\varphi} \qquad (a \text{ const.}).$$

Or, les cosinus directeurs des génératrices du cylindre dont L est une hélice sont

$$a\cos\varphi - c\sin\varphi \qquad a'\cos\varphi - c'\sin\varphi, \qquad a''\cos\varphi - c''\sin\varphi$$

et le cosinus de l'angle ω de ces génératrices avec la droite l sera donné par la formule

$$\cos\omega = p\cos\varphi - r\sin\varphi,$$

ou, en tenant compte de (5),

$$(8) \qquad A\cos\omega = \cos\varphi.$$

Comme l'angle ω est fixe, A est constant. La valeur (4) de A montre que : *Les normales principales interceptent sur* L *et l des arcs proportionnels*. D'ailleurs, on a

$$A^2 = \left(1 - \frac{h}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{dh}{ds}\right)^2 + \frac{h^2}{\tau^2},$$

d'où, par suite des formules (7), qui permettent d'exprimer ρ et τ en fonction de h,

$$(9) \quad s = \cos\omega\cos\varphi \int \frac{h\,dh}{\sqrt{(\cos^2\varphi - \cos^2\omega)h^2\cos^2\varphi + ah\cos^2\omega\sin 2\varphi - a^2\cos^2\omega}}.$$

En changeant s et h respectivement en $\dfrac{\sigma}{\sin\varphi}$ et $\sqrt{\dfrac{2a\mathrm{R}}{\sin 2\varphi}}$ nous obtenons l'équation intrinsèque de la section droite du cylindre sous la forme

$$(10) \quad \sigma = \frac{\sqrt{a}\cos\omega}{2} \int \frac{d\mathrm{R}}{\sqrt{(\cos^2\varphi - \cos^2\omega)\mathrm{R}\cot\varphi + \cos^2\omega\sqrt{2a\mathrm{R}\sin 2\varphi} - a\cos^2\omega}}.$$

On peut remarquer que les normales principales des courbes cherchées, sauf le cas où elles sont perpendiculaires à la direction l, ne peuvent *jamais* la couper sous un angle constant différent de $\frac{\pi}{2}$.

Supposons que l'on ait

$$q = \text{const. différente de zéro};$$

la seconde des équations (1) nous donne

$$\frac{p}{\rho} + \frac{r}{\tau} = 0,$$

ou, à cause de (5),

$$\tau\left(1 - \frac{h}{\rho}\right) - \frac{h}{\tau}\rho = 0,$$

d'où

$$\tau = h(\cot\varphi + \operatorname{tang}\varphi).$$

La troisième des formules (5) nous donnant alors r constant, de la correspondance (1), il s'ensuivrait

$$q = 0,$$

contrairement à notre hypothèse.

Les cas exceptés, c'est-à-dire ceux où les normales sont perpendiculaires à l, mènent à l'hélice circulaire : h, on le voit facilement, est constant; la direction de l, qui, en général, diffère de celles des génératrices du cylindre, coïncide alors avec elle.

[O3k]

REMARQUE SUR LA NOTE PRÉCÉDENTE;

PAR M. E. DUPORCQ.

Dans la Note précédente, M. Piccioli ne met pas en évidence ce fait que, si une hélice tracée sur un cylindre est telle que ses normales principales rencontrent une droite, il en est de même de toutes les hélices tracées sur le même cylindre.

Il suffit, en effet, de remarquer que les normales principales à l'hélice sont normales au cylindre : leurs projections orthogonales sur un plan de section droite seront donc les normales à cette section : soit mm' une de ces projections, normale en m à la section droite, et coupant en m' la projection de la droite fixe envisagée. Il est bien évident que, si $m_1 m'_1$ est une autre position de mm', l'arc mm_1 et le segment $m_1 m'_1$ sont constamment proportionnels, et que cette condition est suffisante pour que les normales principales à une hélice quelconque tracée sur le cylindre coupent une droite, dont la projection reste fixe, quelle que soit l'hélice.

On est donc ramené au problème suivant :

Trouver les courbes planes telles que leurs normales découpent sur une droite fixe des segments proportionnels aux arcs décrits par leurs points d'incidence.

Ce problème est des plus simples : on peut employer une méthode analogue à la précédente : si (x, y), (x', y'), sont les coordonnées de m et m', (a, a') et (b, b') les cosinus directeurs de la tangente et de la normale à la courbe (m), enfin h le segment mm', on a

$$x' = x + bh, \qquad y' = y + b'h,$$

et l'on doit avoir

$$\frac{dx'}{ds} = \text{const.}, \qquad \frac{dy'}{ds} = \text{const.},$$

ou

$$\frac{d^2 x'}{ds^2} = 0, \qquad \frac{d^2 y'}{ds^2} = 0.$$

Or, en tenant compte des formules

$$\frac{da}{ds} = \frac{b}{\rho},$$

$$\frac{db}{ds} = -\frac{a}{\rho},$$

où ρ désigne le rayon de courbure de (m) en m, on a

$$\frac{d^2x'}{ds^2} = \frac{ah}{\rho\, ds}\left(\frac{d\rho}{\rho} - \frac{2\,dh}{h}\right) + b\left(\frac{d^2h}{ds^2} + \frac{1}{\rho} - \frac{h}{\rho^2}\right) = 0,$$

$$\frac{d^2y'}{ds^2} = \frac{a'h}{\rho\, ds}\left(\frac{d\rho}{\rho} - \frac{2\,dh}{h}\right) + b'\left(\frac{d^2h}{ds^2} + \frac{1}{\rho} - \frac{h}{\rho^2}\right) = 0.$$

On en déduit

$$\frac{d\rho}{\rho} - 2\frac{dh}{h} = 0,$$

$$\frac{d^2h}{ds^2} + \frac{1}{\rho} - \frac{h}{\rho^2} = 0.$$

De la première équation on tire

$$h = \sqrt{\alpha\rho}, \tag{1}$$

et, par suite, de la seconde

$$\left(1 - \frac{\alpha}{h}\right)^2 + \left(\frac{dh}{ds}\right)^2 = \beta,$$

d'où

$$ds = \frac{h\,dh}{\sqrt{\beta^2h^2 - (h-\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{\alpha}\,d\rho}{2\sqrt{(\beta^2-1)\rho + 2\sqrt{\alpha\rho} - \alpha}},$$

ou, en désignant par A et B deux constantes arbitraires

$$ds = \frac{A\,d\rho}{2\sqrt{B\rho + 2A\rho^{\frac{1}{2}} - A^2}},$$

équation intrinsèque des courbes cherchées.

La formule (1) montre que *le segment* mm' *compris sur la normale entre la courbe et la droite fixe est constamment proportionnel à la racine carrée du rayon de courbure en* m. Il serait intéressant d'avoir de cette propriété une démonstration de Géométrie infinitésimale.

[M²9]

UN THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LES SURFACES DE RÉVOLUTION;

PAR M. L. DESAINT.

On connaît la proposition suivante :

Toute section plane d'un paraboloïde de révolution se projette sur un plan perpendiculaire à l'axe de ce paraboloïde suivant un cercle.

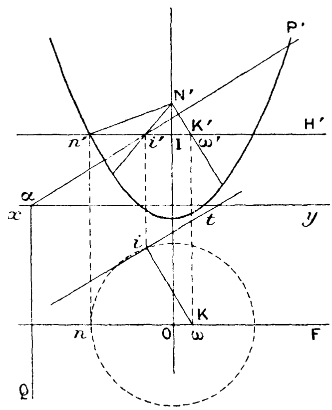
Ce théorème admet une réciproque que j'exposerai ainsi sous sa forme la plus générale :

Lorsqu'une surface de révolution indécomposable est coupée par un plan (différent d'un parallèle) suivant une courbe dont la projection de la partie réelle sur un plan perpendiculaire à son axe est un cercle (simple ou multiple), la surface de révolution admettant cette section plane ne peut être qu'un paraboloïde de révolution.

La façon la plus simple de démontrer cette proposition consiste à faire l'épure de la section plane d'une surface de révolution.

Prenons comme plan horizontal un plan perpendiculaire à l'axe de la surface de révolution S considérée et comme plan vertical un plan perpendiculaire au plan sécant qui devient le plan de bout $P'\alpha Q$.

Les figures ainsi placées, remarquons que le théorème



énoncé sera vrai si la méridienne de front de la surface S est une parabole.

Il nous reste à démontrer que cette méridienne est bien une parabole.

L'ensemble de la surface de révolution et du plan sécant forme une figure admettant comme plan de symétrie le plan de front passant par l'axe; par suite, le centre de la projection de l'intersection se trouve sur la droite F, trace horizontale du plan méridien de front, en ω.

Par hypothèse, cette projection est un cercle.

Pour obtenir un point de ce cercle, coupons par un plan horizontal H'; nous obtenons avec facilité un point (ii'). Cherchons la tangente en i à la projection horizontale de l'intersection; à cet effet, construisons le plan des normales à la surface S et au plan sécant P; menons la normale $n'N'$ à la méridienne de front M au point où elle est rencontrée par H'. La normale à S en ii' est définie par ses projections $(i'N', iO)$; quant à la normale au plan P, elle est donnée en projection verticale par la perpendiculaire $N'K'$ à $\alpha P'$, et en projection horizontale par OF.

Je vais montrer tout d'abord que le point K situé sur OF et sur la ligne de rappel de K' se confond avec ω.

La tangente it au cercle de projection ayant pour centre ω est perpendiculaire à la projection horizontale des horizontales du plan des normales en ii'; il suffit donc de couper par H'; la projection horizontale correspondante se confond avec iK, et par suite it est perpendiculaire sur iK; donc $i\omega$ et iK se confondant, les points ω et K se confondent de même.

Le point K' se trouve sur la ligne de rappel du point ω et IK' est égal à $O\omega$, c'est-à-dire est de longueur constante.

Le triangle rectangle $IN'\omega'$ a son côté de l'angle droit $IK' = I\omega'$ constant, et son angle aigu $\widehat{IN'K'}$ constant aussi puisque $N'K'$ est perpendiculaire sur $\alpha P'$. Ce triangle est de grandeur invariable et

$$IN'$$

est constant.

La sous-normale à la méridienne de front est constante, et par suite cette méridienne est une parabole.

Je reviendrai sur l'extension et les transformations de cette proposition, qui s'était présentée à M. Antomari sous des conditions différentes de celles-ci.

EXERCICES DE PRÉPARATION A L'AGRÉGATION.

FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

Mathématiques spéciales.

On donne un hyperboloïde à une nappe H et une droite fixe D qui le rencontre en deux points réels et distincts.

1° En désignant par A l'une quelconque des génératrices d'un système de H, à l'exclusion de celles de l'autre, par E une droite quelconque de l'espace, par α et β les angles de E avec A et D, et par λ et μ ses plus courtes distances à ces deux droites, on demande de démontrer que, parmi les génératrices A, il y en a, en général, deux, et seulement deux, pour lesquelles on ait la relation

$$\lambda \operatorname{tang} \alpha = \mu \operatorname{tang} \beta,$$

et en outre qu'il existe une infinité de positions ε de la droite E, pour chacune desquelles la relation précédente est vérifiée quelle que soit la génératrice A.

2° Démontrer que toutes les droites ε rencontrent une même droite D_1, et qu'il en passe deux par chaque point de D_1. Discussion.

3° Sur chaque droite ε, à partir de son point de rencontre M avec D_1, on porte une longueur MN égale à la valeur correspondante de $\mu \operatorname{tang} \beta$. Le point N obtenu ainsi engendre une courbe C. On demande la projection de cette courbe C sur un plan perpendiculaire à D_1, ainsi que la méridienne de la surface S engendrée par la rotation de C autour de D_1.

4° Déterminer toutes les droites D pour lesquelles la droite correspondante D_1 a une direction donnée.

1° On donne une ellipsoïde E et l'on demande de démontrer que, si l'un des axes d'un cône S circonscrit à E est assujetti à rester dans un plan fixe P, le plan des deux autres axes de ce cône tourne autour d'une droite fixe D.

2° Démontrer que, si le plan P tourne autour d'une droite fixe F située dans l'un des plans principaux de E, la droite D passe par un point fixe M, et trouver le lieu de ce point quand F enveloppe une conique dans le plan principal considéré.

3° Trouver le lieu des sommets des cônes S tels que l'un de leurs axes rencontre une droite fixe F située dans l'un des plans principaux de E. On discutera la surface obtenue en cherchant si elle admet des sections circulaires et en étudiant son intersection avec un plan quelconque mené par la droite F.

Mathématiques élémentaires.

On donne un triangle ABC et un point O. Par ce point, on mène une sécante variable rencontrant BC et AC en a et b.

1° Lieu du point de rencontre des droites Aa et Bb quand la sécante tourne autour du point O. Ce lieu est une conique Γ.

2° On suppose que le point O se déplace sur une droite Δ. Le lieu des centres des coniques Γ est une conique Γ'. Pour quelles positions de Δ cette conique Γ' se décompose-t-elle? Pour quelles positions est-elle une hyperbole équilatère ou un cercle?

3° On suppose que la droite Δ tourne autour d'un point fixe ω. Établir que les coniques Γ' correspondant à chaque position de Δ passent par un point fixe ω'. Démontrer que la droite $\omega\omega'$ passe par un point fixe, indépendant de ω.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1881.

(1900, p. 572.)

Les pieds des quatre perpendiculaires abaissées du centre d'un hyperboloïde équilatère sur les faces d'un tétraèdre conjugué sont situés dans un même plan.

(A. Pellet.)

SOLUTION

Par M. G. Fontené.

Si l'on prend comme tétraèdre de référence le tétraèdre conjugué, l'hyperboloïde a pour équation

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dT^2 = 0.$$

Les aires des faces du tétraèdre étant A, B, C, D, le plan de l'infini a pour équation

$$AX + BY + CZ + DT = 0,$$

et les coordonnées du centre M de l'hyperboloïde sont donnés par les relations

$$\frac{aX'}{A} = \frac{bY'}{B} = \frac{cZ'}{C} = \frac{dT'}{D}.$$

Si l'hyperbole est équilatère, on a

$$a + b + c + d = 0,$$

par suite

$$\frac{A}{X'} + \frac{B}{Y'} + \frac{C}{Z'} + \frac{D}{T'} = 0,$$

et cela exprime, comme on le voit, que les projections du point M sur les plans des faces du tétraèdre de référence sont dans un même plan (on s'appuie sur la proportionnalité des aires des faces d'un tétraèdre aux sinus des trièdres supplémentaires de ceux du tétraèdre).

Note. — *Voir*, à propos de ces propriétés, une Note de M. Duporcq : *Sur une extension à l'espace du théorème de Simson* (*S. M.*, t. XXIX, 1901, p. 29).

1887.

(1900, p. 573.)

Dans un tronc de cône de révolution, soient B *le rayon de la grande base,* b *celui de la petite, et soit* h *la hauteur du tronc. Un plan mené tangentiellement à la petite base, par le centre de la grande, détache du tronc de cône un onglet. Si l'on désire connaître le volume de cet onglet, c'est-à-dire la formule de ce volume en fonction de* B, b, h, *et qu'à cet effet on décompose l'onglet en éléments par des plans parallèles aux deux bases du tronc de cône, on se trouve en présence d'une opération longue et pénible.*

On propose de trouver une marche qui, par un très léger calcul, ramène tout à l'intégration d'une différentielle unique et de la forme $(a + bx + cx^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$.

(C. Ruchonnet.)

SOLUTION

PAR M. AUDIBERT.

L'onglet résulte de la section par un plan oblique à l'axe d'un demi-cône de révolution, et le volume du second fragment, complément de l'onglet, détaché par ce plan est mesuré par le produit de la surface de la section oblique multipliée par le tiers de la perpendiculaire abaissée sur son plan du sommet du cône.

La projection de cette section oblique sur le plan de la base a pour équation

$$(\alpha)\qquad B(2b-B)y^2+b^2x^2+2Bb(B-b)y-B^2b^2=0,$$

ellipse pour $2b>B$, parabole pour $2b=B$, hyperbole pour $2b<B$. Elle a un foyer à l'origine; nous supposerons $2b>B$.

L'équation polaire de (α) s'écrira

$$S=\frac{Bb}{b+(B-b)\sin\theta}.$$

La moitié de sa surface est donnée par l'intégrale

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\frac{B^2b^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{[b+(B-b)\sin\theta]^2}\\&=\frac{B^2b^2}{2}\left[\frac{2b}{B(2b-B)}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2b-B}{B}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{B-b}{Bb(2b-B)}\right].\end{aligned}$$

Soient S_1 la surface de la conique projetante et u l'angle du plan de la base et de la section; on aura

$$\frac{S_1}{2}=\frac{S}{2\cos u},$$

et le volume du complément de l'onglet sera

$$\frac{S}{2\cos u}\,\frac{l}{3}\cos u=\frac{S}{2}\,\frac{l}{3},\qquad l=\frac{Bh}{B-b}.$$

Alors, V désignant le volume de l'onglet, on aura

$$\begin{aligned}\frac{V}{2}&=\frac{l}{3}\,\frac{\pi B^2}{4}-\frac{S}{2}\,\frac{l}{3}\\&=\frac{B^3h}{b(B-b)}\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{2b^3}{[B(2b-B)]^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2B-b}{B}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{b(B-b)}{B(2b-B)}\right\}.\end{aligned}$$

On voit que le problème se réduit au calcul de la surface de (α), qui peut d'ailleurs être obtenue sans recourir aux coordonnées polaires. On tire, en effet, de cette équation

$$\int y\,dx = \int (p + \sqrt{q + rx^2})\,dx,$$

p, q, r étant des constantes fonctions de B, b et h.

1896.

(1900, p. 575.)

Étant données deux tangentes rectangulaires à l'ellipse dont les points de contact sont A *et* B, *du centre* O *de l'ellipse on abaisse les perpendiculaires* OS *et* OS' *sur les tangentes en* A *et en* B, *et les perpendiculaires* OQ *et* OQ' *sur les normales en* A *et* B. *Quelle que soit la position des tangentes, on a*

$$OS \times OQ = OS' \times OQ'.$$

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Soit P le point commun aux tangentes rectangulaires [1] et M le milieu de la corde $\overline{AB}$: les trois points O, M, P sont en ligne droite et les normales aux points A et B vont se couper sur la droite OP au point symétrique de P par rapport à M. Les deux rectangles OSAQ, OS'BQ' sont donc équivalents (Eucl., I, 43).

Autre solution de M. Valdès.

1897.

(1900, p. 575.)

Si l'on considère toutes les hyperboles équilatères qui passent par deux points donnés et dont les asymptotes ont une direction fixe :

1° *Le lieu des centres de ces hyperboles est une droite;*

2° *Le lieu des sommets se compose d'une ellipse et d'une hyperbole;*

3° *Le lieu des foyers se compose aussi d'une ellipse et d'une hyperbole concentriques.* (E.-N. Barisien.)

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

SOLUTION

Par M. V. RETALI.

Prenons pour axes les parallèles menées par les points donnés $A(a, o)$, $B(o, b)$ et appelons C l'autre sommet du rectangle ayant les côtés OA, OB : l'équation du faisceau des hyperboles est

$$(1) \qquad xy + \lambda(bx + ay - ab) = 0,$$

et la droite des centres est évidemment $ay = bx$.

Les équations des axes étant

$$(2) \qquad x + y + \lambda(a + b) = 0,$$

$$(3) \qquad x - y + \lambda(a - b) = 0,$$

en éliminant λ entre (1), (2) et (1), (3), nous aurons les équations du lieu des sommets : on trouve

$$(a + b)xy - (x + y)(bx + ay - ab) = 0,$$
$$(a - b)xy - (x - y)(bx + ay - ab) = 0,$$

deux coniques circonscrites au rectangle OACB et qui se coupent entre elles à angle droit.

Les coordonnées des foyers de (1) sont données par

$$x = -a\lambda \mp \sqrt{\mp 2ab\lambda(1 + \lambda)},$$
$$y = -b\lambda \mp \sqrt{\mp 2ab\lambda(1 + \lambda)}:$$

l'élimination de λ est immédiate, et l'on obtient

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & b(b + 2a)x^2 - 6abxy + a(a + 2b)y^2 \\ & \qquad + 2ab(a - b)(y - x) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & b(b - 2a)x^2 + 2abxy + a(a - 2b)y^2 \\ & \qquad - 2ab(a - b)(y - x) = 0, \end{aligned} \right.$$

suivant que l'on prend les signes supérieurs ou les inférieurs; (4) représente une ellipse passant par les deux points O, C et ayant les points donnés A, B pour foyers; (5) est une hyperbole concentrique passant par les points O, C.

[T2a]

SUR LES EXPRESSIONS DES TENSIONS EN FONCTION DES DÉFORMATIONS DANS UN MILIEU ÉLASTIQUE HOMOGÈNE ET ISOTROPE;

PAR M. PAUL APPELL.

Soit un milieu élastique homogène et isotrope dont les points occupent, à l'état naturel, des positions $P(x, y, z)$. Si l'on déforme le milieu en lui faisant subir une déformation infiniment petite, le point P vient occuper une position $P_1(x_1, y_1, z_1)$; il subit donc un déplacement infiniment petit dont les projections sont

$$(1) \qquad u = x_1 - x, \qquad v = y_1 - y, \qquad w = z_1 - z.$$

Dans ces conditions, les tensions intérieures sont caractérisées en chaque point par six fonctions

$$(2) \qquad N_1, \quad N_2, \quad N_3, \quad T_1, \quad T_2, \quad T_3$$

de x, y, z. Le problème fondamental à résoudre est d'exprimer ces six fonctions à l'aide des dérivées des déplacements (1).

Nous nous proposons d'indiquer ici une méthode géométrique pour obtenir ces expressions, méthode qui consiste à chercher la relation qui lie deux quadriques particulières appelées, l'une *quadrique directrice des tensions*, l'autre *surface des déformations*. On pourra consulter, pour la définition de ces quadriques, le Tome III de mon *Traité de Mécanique rationnelle;* on pourra également se reporter à un article de M. Sarrau intitulé : *Notions sur la théorie de l'élasticité,* publié dans ce Journal (3e série, t. VII, novembre et décembre 1888). Nous adopterons ici les notations de ce dernier article.

La déformation du milieu au point P est caractérisée par les six quantités

$$(3)\quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & a_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & a_3 = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ 2b_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}, & 2b_2 = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, & 2b_3 = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

La quadrique directrice des tensions (Q), en P, a pour équation

$$(\mathrm{Q})\quad \begin{cases} \varphi(x, y, z) \equiv \mathrm{N}_1 x^2 + \mathrm{N}_2 y^2 + \mathrm{N}_3 z^2 \\ \qquad + 2\mathrm{T}_1 yz + 2\mathrm{T}_2 zx + 2\mathrm{T}_3 xy = \pm 1, \end{cases}$$

par rapport à des axes $\mathrm{P}x$, $\mathrm{P}y$, $\mathrm{P}z$ issus de P.

La surface des déformations (S) au même point a pour équation, par rapport aux mêmes axes,

$$(\mathrm{S})\quad \begin{cases} \psi(x, y, z) \equiv a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 \\ \qquad + 2b_1 yz + 2b_2 zx + 2b_3 xy = \pm 1. \end{cases}$$

Les quantités (2) N et T sont supposées être des fonctions linéaires et homogènes, à coefficients constants, des a et b

$$(4)\quad \begin{cases} \mathrm{N}_1 = \mathrm{A}_1 a_1 + \mathrm{A}_2 a_2 + \mathrm{A}_3 a_3 + \mathrm{B}_1 b_1 + \mathrm{B}_2 b_2 + \mathrm{B}_3 b_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{T}_1 = \mathrm{C}_1 a_1 + \mathrm{C}_2 a_2 + \mathrm{C}_3 a_3 + \mathrm{D}_1 b_1 + \mathrm{D}_2 b_2 + \mathrm{D}_3 b_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

les coefficients A, B, C, D, ... étant des *constantes*. Comme le milieu est *isotrope*, c'est-à-dire a la même constitution dans toutes les directions autour de chaque point, les relations (4) doivent être *indépendantes du choix des axes*. Si, en prenant de nouveaux axes $\mathrm{P}x'y'z'$, on amène les deux quadriques à avoir pour équations

$$N'_1 x'^2 + \ldots + 2T'_1 y'z' + \ldots = \pm 1,$$
$$a'_1 x'^2 + \ldots + 2b'_1 y'z' + \ldots = \pm 1,$$

les N', T' sont donnés en fonction des a', b' par les mêmes formules (4) avec les mêmes coefficients A, B, C, D, ... De là résultent, entre ces coefficients, des relations qui permettent, comme il est connu, de les réduire à *deux*. Nous allons faire cette réduction en mettant en évidence la relation géométrique qui lie les deux quadriques (Q) et (S). Cette relation est la suivante :

Les deux quadriques ont les mêmes plans de sections circulaires.

1° Tout d'abord *les deux quadriques ont les mêmes plans principaux*. En effet, soient PX, PY, PZ les axes de la quadrique (S) : les déformations étant symétriques par rapport aux plans XPZ, YPX, ZPY, il en est de même des tensions qui en résultent ; la quadrique (Q) a donc les mêmes plans pour plans de symétrie.

2° Pour voir que les plans de sections circulaires sont les mêmes, prenons, pour un instant, les droites PX, PY, PZ pour axes de coordonnées : les équations des deux quadriques deviennent

$$\Phi(X, Y, Z) = n_1 X^2 + n_2 Y^2 + n_3 Z^2 = \pm 1,$$
$$\Psi(X, Y, Z) = \alpha_1 X^2 + \alpha_2 Y^2 + \alpha_3 Z^2 = \pm 1.$$

Les formules (4), étant indépendantes du choix des axes, s'appliquent aux formes actuelles des équations où les b sont nuls. On a donc

$$n_1 = A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_3.$$

Mais, si l'on permute PY et PZ, n_1 ne change pas et

α_2 et α_3 se permutent : donc l'expression précédente ne doit pas changer quand on permute α_2 et α_3, et l'on a $A_2 = A_3$; on peut donc écrire

$$n_1 = A_1\alpha_1 + A_2(\alpha_2 + \alpha_3) = A_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (A_1 - A_2)\alpha_1.$$

Nous écrirons

$$(5) \qquad n_1 = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + 2\mu\alpha_1.$$

Nous aurons de même n_2, n_3 par permutation circulaire des axes PX, PY, PZ, c'est-à-dire des indices 1, 2, 3. La somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ est, d'après un théorème élémentaire sur les fonctions des coefficients d'une quadrique qui ne changent pas quand on fait un changement d'axes rectangulaires, égale à $a_1 + a_2 + a_3$; cette somme s'appelle la *dilatation* cubique :

$$\theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a_1 + a_2 + a_3.$$

La formule (5) et les deux qu'on en déduit par permutation sont donc

$$(6) \qquad \begin{cases} n_1 = \lambda\theta + 2\mu\alpha_1, \\ n_2 = \lambda\theta + 2\mu\alpha_2, \\ n_3 = \lambda\theta + 2\mu\alpha_3. \end{cases}$$

Mais alors, en se reportant aux fonctions Φ et Ψ qui forment les premiers membres des équations réduites des deux quadriques, on voit qu'elles vérifient l'identité

$$(7) \qquad \Phi(X, Y, Z) \equiv \lambda\,\theta(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2\mu\,\Psi(X, Y, Z),$$

qui montre que les deux quadriques *ont les mêmes plans de sections circulaires*.

Si l'on revient aux axes primitifs Px, Py, Pz, les formes $\Phi(X, Y, Z)$, $\Psi(X, Y, Z)$ et $X^2 + Y^2 + Z^2$ se transforment en $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ et $x^2 + y^2 + z^2$, et l'identité (7) devient

$$(8) \qquad \varphi(x, y, z) \equiv \lambda\,\theta(x^2 + y^2 + z^2) + 2\mu\,\psi(x, y, z).$$

En remplaçant les fonctions φ et ψ par leurs expressions et identifiant, on obtient les formules classiques

$$N_k = \lambda\theta + 2\mu a_k, \qquad T_k = 2\mu b_k \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Remarque I. — Les quantités n_1, n_2, n_3 sont les racines de l'équation en S relative à la quadrique (Q); les quantiés α_1, α_2, α_3, les racines de l'équation en S pour la quadrique (S). On conclut alors des relations (6) les relations qui lient les coefficients des deux équations en (S), c'est-à-dire les fonctions des coefficients des deux quadriques qui restent inaltérées par un changement d'axes rectangulaires.

Remarque II. — En faisant intervenir, à la place de (S), une autre quadrique appelée *ellipsoïde des dilatations,* dont on trouvera la définition dans le Tome III de mon *Traité de Mécanique,* on pourrait, dans une certaine mesure, étendre les considérations précédentes *au cas des déformations finies.* On aurait alors à résoudre un problème de Géométrie analogue au précédent, avec cette différence que les relations donnant les coefficients de l'une des quadriques en fonctions de ceux de l'autre *ne sont plus linéaires.*

[R8cβ]

SUR LA CHUTE DES CORPS DANS LE VIDE ET SUR CERTAINES FONCTIONS TRANSCENDANTES;

Par M. C. MALTÉZOS,
Professeur à l'École militaire, Athènes.

---

1. Les équations différentielles de la chute des corps dans le vide, sans vitesse initiale, en tenant compte du

mouvement de rotation de la Terre, sont

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\sin\lambda\,\dfrac{dy}{dt}, \\[2mm] \dfrac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\left(\sin\lambda\,\dfrac{dx}{dt} + \cos\lambda\,\dfrac{dz}{dt}\right), \\[2mm] \dfrac{d^2z}{dt^2} = g - 2\omega\cos\lambda\,\dfrac{dy}{dt}, \end{cases}$$

en prenant pour axe des x la méridienne, dirigée vers le nord, pour axe des y une perpendiculaire dans le plan horizontal, dirigée vers l'est, et pour axe des z la verticale de l'origine, dirigée vers le bas. λ représente la latitude, et ω la rotation.

En intégrant on obtient les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2\omega y\sin\lambda, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = 2\omega(x\sin\lambda + z\cos\lambda), \\[2mm] \dfrac{dz}{dt} = gt - 2\omega y\cos\lambda. \end{cases}$$

La troisième s'écrit à l'aide de la première

$$\frac{dz}{dt} = gt + \cot\lambda\,\frac{dx}{dt},$$

d'où

$$(3)\qquad z = \tfrac{1}{2}gt^2 + x\cot\lambda.$$

En remplaçant dans la deuxième, on obtient

$$\frac{dy}{dt} = g\omega t^2\cos\lambda + \frac{2\omega x}{\sin\lambda},$$

et

$$(4)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 2g\omega t\cos\lambda - 4\omega^2 y.$$

Cette équation admet comme solution la seconde des équations

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{g \sin\lambda \cos\lambda}{4\omega^2}(1 - 2\omega^2 t^2 - \cos 2\omega t), \\ y = \dfrac{g \cos\lambda}{4\omega^2}(2\omega t - \sin 2\omega t). \end{cases}$$

La déviation x, comme d'ailleurs il est bien connu, est très petite et moindre que y.

On peut trouver z d'une autre manière, par une approximation plus que suffisante. Nous avons, en effet, l'équation

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g - 4\omega^2 \cos\lambda (x \sin\lambda + z \cos\lambda).$$

En négligeant le terme $4\omega^2 x \cos\lambda \sin\lambda$ devant les autres, on obtient

$$(6)\qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = g - \varphi^2 z \qquad (\varphi^2 = 4\omega^2 \cos^2\lambda).$$

En intégrant, on trouve l'équation

$$(7)\qquad z = \frac{g}{\varphi^2}(1 - \cos\varphi t),$$

pour laquelle les deux premiers termes du second membre (en t^2 et t^4) sont les mêmes que ceux de l'équation (3), à laquelle elle devient exactement identique pour l'équateur.

Remarque. — Si la hauteur de la chute est assez grande, en supposant variable l'intensité de l'accélération, on obtient, dans le cas où z est assez petit devant R (en désignant par R le rayon terrestre terminé à l'origine et g l'accélération à l'origine),

$$(8)\qquad z = \frac{g}{\varphi^2}\,\frac{e^{\varphi t} + e^{-\varphi t} - 2}{2},$$

avec

$$\varphi^2 = \frac{2g}{R} - 4\omega^2 \cos^2\lambda.$$

2. Si l'on pose

$$C_1 = \cos\varphi t = \cos\psi, \qquad C_2 = 1.2\,\frac{1-C_1}{\varphi^2 t^2} = 1.2\,\frac{1-C_1}{\psi^2},$$

l'équation (7) peut s'écrire

$$z = C_2\,\frac{gt^2}{2}.$$

La courbe $C_2 = 1.2\,\dfrac{1-\cos\psi}{\psi^2}$ est symétrique par rapport à l'axe des C, qu'elle rencontre à la distance 1 de l'origine, où elle passe par un maximum. Cette courbe possède une série de minima et maxima.

Les minima sont donnés par l'équation

$$\sin\frac{\psi}{2} = 0,$$

d'où

$$\psi = 2m\pi \qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

et les maxima par l'équation

$$\operatorname{tang}\frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2}.$$

Les fonctions C_1, C_2 peuvent être généralisées. Posons, en effet,

$$C_k = 1 - \frac{\psi^2}{(2k-1)2k} + \frac{\psi^4}{(2k-1)2k(2k+1)(2k+2)} - \ldots$$
$$= (2k-3)(2k-2)\,\frac{1-C_{k-1}}{\psi^2}.$$

Ces équations représentent des courbes rencontrant l'axe des ordonnées à la distance 1 de l'origine, où elles passent par un maximum, et elles sont symétriques autour de l'axe des C.

Pour toute valeur réelle de ψ (différente de zéro), on a

$$0 \leqq C_2 < C_3 < \ldots < C_k < 1$$

(C_2 seule s'annule aux minima).

Les fonctions C possèdent la propriété de vérifier la condition

$$C_1(x) - \frac{z^2}{1.2} C_2(x) + \frac{z^4}{1.2.3.4} C_3(x) - \ldots$$
$$= C_1(z) - \frac{x^2}{1.2} C_2(z) + \frac{x^4}{1.2.3.4} C_3(z) - \ldots.$$

L'équation différentielle de C_k est

$$\frac{d^2 C_k}{d\psi^2} + \frac{4(k-1)}{\psi} \frac{dC_k}{d\psi}$$
$$+ \left[1 + \frac{(2k-3)(2k-2)}{\psi^2}\right] C_k = \frac{(2k-3)(2k-2)}{\psi^2}.$$

On peut lui donner la forme plus générale

$$(9) \qquad \frac{d^2 u}{d\psi^2} + \frac{\alpha}{\psi} \frac{du}{d\psi} + \left(\beta + \frac{\gamma}{\psi^2}\right) u = \frac{\delta}{\psi^2},$$

dont la solution est

$$(10) \qquad u = A_0 + A_2 \psi^2 + A_4 \psi^4 + \ldots + A_{2m} \psi^{2m} + \ldots;$$

avec

$$A_0 = \frac{\delta}{\gamma},$$
$$A_2 = -\beta \frac{A_0}{1.2 + 2\alpha + \gamma},$$
$$A_4 = (-\beta)^2 \frac{A_0}{(1.2 + 2\alpha + \gamma)(3.4 + 4\alpha + \gamma)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{2m} = (-\beta)^m \frac{A_0}{(1.2 + 2\alpha + \gamma)(3.4 + 4\alpha + \gamma)\ldots[(2m-1)2m + 2m\alpha + \gamma]},$$

la série (10) est rapidement convergente, quand α et γ sont positifs.

Cas particuliers. — D'autres cas remarquables de u sont les suivants :

a. Posons $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$; on obtient alors

$$u = A_0\left[1 - \frac{\psi^2}{2^2} + \frac{\psi^4}{2^2 4^2} - \ldots + (-1)^m \frac{\psi^{2m}}{2^2 4^2 \ldots \overline{2m}^2} + \ldots\right],$$

où A_0 désigne une constante arbitraire. On a donc

$$u = A_0 J_0;$$

J_0 désignant la première des fonctions de Bessel.

b. Posons de même $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -(2n)^2$, $\delta = 0$; on trouve

$$A_0 = A_2 = A_4 = \ldots = A_{2n-2} = 0, \qquad A_{2n} = \frac{0}{0},$$

c'est-à-dire une constante arbitraire, qu'on peut écrire

$$A_{2n} = B' = \frac{B}{2^{2n}(2n)!};$$

on a donc finalement

$$u = \frac{B\psi^{2n}}{2^{2n}(2n)!}\left[1 - \frac{\psi^2}{2(4n+2)} + \frac{\psi^4}{2.4(4n+2)(4n+4)} - \ldots\right] = BJ_{2n}(\psi).$$

Les fonctions *paires* de Bessel sont donc des cas particuliers de u.

3. De même qu'on a déduit du cosinus des fonctions plus générales, on peut en déduire d'autres du sinus. Posons, en effet,

$$s_1 = \psi - \frac{\psi^3}{2.3} + \frac{\psi^5}{2.3.4.5} - \ldots = \sin\psi,$$

$$s_2 = \psi - \frac{\psi^3}{4.5} + \frac{\psi^5}{4.5.6.7} - \ldots = 2.3\,\frac{\psi - s_1}{\psi^2} \quad (^1),$$

. . . . ,

$$s_k = \psi - \frac{\psi^3}{2k(2k+1)} - \frac{\psi^5}{2k(2k+1)(2k+2)(2k+3)} - \ldots$$

$$= (2k-2)(2k-1)\,\frac{\psi - s_{k-1}}{\psi^2},$$

---

(1) Les maxima et minima de s_2 s'obtiennent par les équations $\cos\frac{\psi}{2} = 0$, d'où $\psi = (2m+1)\pi$ pour les maxima, et $\tang\frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2}$

s_k vérifiant l'équation

$$\frac{d^2 s_k}{d\psi^2} + \frac{4(k-1)}{\psi}\frac{ds_k}{d\psi} + \left[1 + \frac{(2k-2)(2k-3)}{\psi^2}\right] s_k = \frac{(2k-1)(2k-2)}{\psi}.$$

Et, en généralisant,

$$(11) \qquad \frac{d^2 v}{d\psi^2} + \frac{\alpha}{\psi}\frac{dv}{d\psi} + \left(\beta + \frac{\gamma}{\psi^2}\right) v = \frac{\delta}{\psi},$$

dont la solution est la suivante :

$$(12) \qquad v = A_1\psi + A_3\psi^3 + \ldots + A_{2m+1}\psi^{2m+1} + \ldots,$$

avec

$$A_1 = \frac{\delta}{\alpha + \gamma},$$

$$A_3 = -\beta\frac{A_1}{2.3 + 3\alpha + \gamma},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_{2m+1} = (-\beta)^m \frac{A_1}{(2.3 + 3\alpha + \gamma)(4.5 + 5\alpha + \gamma)\ldots[2m(2m+1) + (2m+1)\alpha + \gamma]}.$$

Cas particulier. — Posons

$$\alpha = \beta = 1, \qquad \gamma = -(2n+1)^2, \qquad \delta = 0;$$

on aura alors

$$A_1 = A_3 = \ldots = A_{2n-1} = 0, \qquad A_{2n+1} = \frac{0}{0},$$

ce qui est la constante arbitraire, qu'on peut écrire

$$A_{2n+1} = B' = \frac{B}{2^{2n+1}(2n+1)!},$$

---

pour les minima, excepté la valeur $\psi = 0$, car, à l'origine, la courbe possède un point d'inflexion, avec une tangente bissectrice de l'angle positif des axes. Il est à remarquer que les abscisses des minima de s_2 sont les mêmes que celles des maxima de C_2.

et l'on aura

$$v = \frac{B\psi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}\left\{1 - \frac{\psi^2}{2[(2n+1)2+2]} + \dots\right\} = BJ_{2n+1}(\psi).$$

Les fonctions *impaires* de Bessel sont donc des cas particuliers de v.

[L[1] 5b]

SUR LES ADJOINTES DES DIRECTIONS NORMALES D'UNE CONIQUE.

(Extrait d'une Lettre de M. D'OCAGNE.)

« ... L'adjointe infinitésimale Γ d'une courbe C, que j'ai appelée *adjointe des directions normales,* est particulièrement importante à considérer. C'est le lieu du point de rencontre du rayon vecteur issu d'un pôle V et de la parallèle à la normale correspondante menée d'un second pôle N.

» D'après sa définition, elle passe par les pieds des normales menées du point N à la courbe C, ainsi que par les pieds des perpendiculaires abaissées de N sur les tangentes issues de V et sur les parallèles aux asymptotes menées par V.

» Elle fournit pour les centres de courbure de la courbe C une remarquable construction reposant sur le théorème suivant :

» *La parallèle à la tangente de* C *menée par le point où sa normale rencontre* NV *et la parallèle à* *la tangente de* Γ *menée par le centre de courbure de* C *se coupent sur le vecteur issu de* V.

» Il me semble qu'il pourrait être intéressant d'étudier à part les adjointes Γ d'une conique C pour diverses positions des pôles V et N, adjointes qui sont, en général, des courbes du quatrième ordre.

» Voici déjà, sur ce sujet, quelques remarques extraites de mes publications antérieures, et qui pourraient guider vos lecteurs dans une telle étude :

» Si le pôle V se confond avec le centre de la conique C, l'adjointe Γ n'est autre que l'hyperbole d'Apollonius du pôle N.

» L'adjointe Γ ne se réduit à une droite que dans les deux cas suivants :

» 1° Le pôle V se confond avec le centre de C tandis que le pôle N est sur l'un des axes;

» 2° La conique C étant une parabole, le pôle V est sur cette courbe et le pôle N sur l'une des normales que l'on peut, du pôle V, mener à la parabole.

» Lorsque le pôle V est en un des foyers de la conique C et le point N en un point quelconque de l'axe focal, l'adjointe Γ est un cercle ayant son centre sur cet axe.

» Il y aurait intérêt notamment à déterminer s'il existe d'autres cas où, pour une conique C, l'adjointe Γ se réduit à un cercle .... »

[M¹5b]

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

PAR M. MAURICE FRÉCHET,
Élève de l'École Normale supérieure.

On appelle *hypocycloïde à trois rebroussements* une courbe de troisième classe H, tangente à la droite de l'infini aux deux points cycliques.

Nous l'étudierons en partant du problème suivant :

I. *Trouver l'enveloppe de la droite de Simson* PQR *relative à un triangle quelconque* ABC *et à un point variable* M.

Prenons celui-là comme triangle de référence; les équations des droites PQR, MP, MQ, MR seront

$$ux + vy + wz = 0,$$
$$(v\cos C + w\cos B)x + vy + wz = 0,$$
$$ux + (w\cos A + u\cos C)y + wz = 0,$$
$$ux = vy + (u\cos B + v\cos A)z = 0.$$

Ces trois droites étant concourantes, le déterminant des coefficients $\Delta(u, v, w)$ est nul. L'enveloppe cherchée est donc la courbe de troisième classe $\Delta = 0$. La droite de l'infini est tangente double, car Δ'_u, Δ'_v, Δ'_w sont nuls pour $\frac{u}{\sin A} = \frac{v}{\sin B} = \frac{w}{\sin C}$. L'équation de ses points de contact

$$U^2\Delta''_{u^2} + V^2\Delta''_{v^2} + W^2\Delta''_{v^2} + 2UV\Delta''_{uv} + 2VW\Delta''_{vw} + 2WU\Delta''_{uw} = 0$$

se réduit par un calcul facile à celle des points cycliques.

L'enveloppe des droites de Simson est donc une hypocycloïde à trois rebroussements (¹).

On a

$$\Delta(0, 0, w) = \Delta(\cos A, -\cos B, 0) = 0.$$

L'enveloppe est donc tangente aux trois côtés et aux trois hauteurs du triangle ABC.

II. *Réciproquement toute hypocycloïde à trois rebroussements* H *peut être considérée d'une infinité de manières comme enveloppe de droites de Simson.*

En effet, d'après la définition donnée :

1° L'équation en coordonnées cartésiennes de H est de la forme

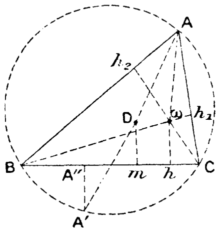
$$(1) \qquad (u^2+v^2)w + A u^3 + 3 B u^2 v + 3 C u v^2 + D v^3 = 0;$$

donc il y a une seule hypocycloïde tangente à quatre droites données.

2° Il n'y a qu'une tangente à H qui soit parallèle à une direction donnée.

Soient alors Ah_1 et Ah_2 (*fig.* 1) deux tangentes quel-

Fig. 1.



conques à une hypocycloïde H, et Bh_1, Ch_2 les *deux tan-*

(¹) Pour une démonstration géométrique de cette propriété, *voir*, par exemple, E. Duporcq, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (*Nouvelles Annales,* avril 1901, p. 168-171).

gentes perpendiculaires. La courbe H aura quatre tangentes communes avec l'enveloppe des droites de Simson relative au triangle ABC ainsi formé; ces deux hypocycloïdes coïncident.

3° Les propriétés que nous allons démontrer sur l'enveloppe des droites de Simson s'appliqueront donc à une hypocycloïde H quelconque.

Lorsque le point M (qui décrit le cercle de centre D circonscrit à ABC) vient au point A′ diamétralement opposé à A, la tangente PQR se confond avec BC, et le point P vient en un point A″, projection de A′ sur BC. Donc BC *est tangent à* A *en* A″. On a

$$\frac{m\mathrm{A}''}{mh} = \frac{\mathrm{DA}'}{\mathrm{DA}} = 1$$

si m est le milieu de BC. Donc

$$m\mathrm{A}'' = mh,$$

et, d'après la géométrie du triangle, il en résulte que les droites AA″, BB″, CC″ sont concourantes, et il y a une conique inscrite à ABC en A″B″C″. Comme le triangle ABC dépend de deux paramètres quand H est fixe et A variable, *il y aura un système doublement infini de coniques* S *tritangentes à* H. L'examen des conditions montre qu'il n'y en a pas d'autres.

4° Les trois normales à H aux points de contact avec une conique S sont les symétriques des hauteurs de ABC, par rapport à D. *Ces trois normales sont donc concourantes.*

5° Les points A″, m, h et le point k à l'infini sur BC forment une division harmonique; si x, y sont les coordonnées trilinéaires de A″, celles de m, h, k seront

$$\frac{1}{\sin \mathrm{A}}, \quad \frac{1}{\sin \mathrm{B}}, \quad 0; \qquad \frac{1}{\cos \mathrm{A}}, \quad \frac{1}{\cos \mathrm{B}}, \quad 0; \qquad \frac{1}{\sin \mathrm{A}}, \quad -\frac{1}{\sin \mathrm{B}}, \quad 0;$$

et l'on aura

$$2\left[\frac{x\cos B}{y\cos A}+\frac{\sin B}{\sin A}\left(-\frac{\sin B}{\sin A}\right)\right]=\left(\frac{x}{y}+\frac{\cos B}{\cos A}\right)\left(\frac{\sin B}{\sin A}-\frac{\sin B}{\sin A}\right),$$

d'où

$$x\sin A\tang A=y\sin B\tang B.$$

De même, pour B'' et C''; l'équation de la conique inscrite en A'', B'', C'' sera

$$(2)\qquad \frac{\sin A\tang A}{u}+\frac{\sin B\tang B}{v}+\frac{\sin C\tang B}{w}=0.$$

Un calcul immédiat montre que la droite de l'infini a même pôle par rapport à (2) et à

$$(3)\qquad \frac{\sin A}{x}+\frac{\sin B}{y}+\frac{\sin C}{z}=0$$

(équation connue du cercle D circonscrit à ABC). Donc : *le centre d'une conique S tritangente à H coïncide avec le centre du cercle circonscrit au triangle des tangentes communes.*

6° Les coefficients $mm'm''$ des tangentes à H issues d'un point quelconque de coordonnées cartésiennes x, y vérifient, d'après l'équation (1), la relation

$$(4)\qquad m^3(A-x)+m^2(y-3B)+m(3C-x)+y-D=0.$$

Le lieu des points x, y sommets des angles droits circonscrits à H s'obtient au moyen des équations (3), et de

$$m'm''=-1,$$

d'où

$$m=\frac{m\,m'\,m''}{m'\,m''}=\frac{y-D}{A-x}$$

et

$$(5)\quad\begin{cases} 2(x^2+y^2)-3(A+C)x \\ \qquad\qquad -3(D+B)y+D^2+3DB+3AC+A^2=0.\end{cases}$$

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à H est un cercle fixe Γ.

7° Alors dans le triangle A, B, C, les points h, h_1, h_2 sont sur Γ : le *cercle des neuf points du triangle des tangentes communes à* S *et* H *est fixe,* ou encore : le *lieu des milieux des côtés du triangle* ABC *est un cercle* Γ. Le *rayon* R *du cercle circonscrit au triangle des tangentes communes à* S *et* H *est constant;* car il est double de celui du cercle des neuf points.

8° Le centre D de la conique S est certainement à distance finie. Soient

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 = R^2$$

les équations en coordonnées cartésiennes de S et du cercle concentrique D. Il y a un triangle inscrit à D et circonscrit à S; en appliquant la condition $\theta'^2 - 4\theta\Delta' = 0$, on trouve

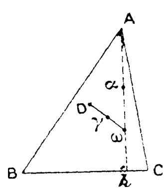
$$R^2 = \alpha + \beta \pm 2\sqrt{\alpha\beta}.$$

Quand la conique S est réelle, R^2 est réel, le produit $\alpha\beta$ est positif; *donc* S *est une ellipse*. Soient a et b ses deux demi-axes; on a, en choisissant $a \geqq b$,

$$(6) \qquad R = a + \varepsilon b \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Soit ω l'orthocentre du triangle ABC (*fig.* 2); le

Fig. 2.



centre γ du cercle des neuf points de ABC est le milieu de Dω. Posons $\gamma\omega = m$; on aura, d'après le théorème de Faure appliqué à S et au cercle conjugué au triangle ABC (de centre ω et de rayon ρ),

$$(7)\qquad a^2+b^2=4m^2-\rho^2.$$

Or le cercle des neuf points passe par h et par le milieu α de $A\omega$. On a donc, puisque son rayon est $\frac{R}{2}$,

$$\overline{\omega\alpha}\cdot\overline{\omega h}=m^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2,$$

et, comme

$$\rho^2=\overline{\omega A}\cdot\overline{\omega h},$$

$$(8)\qquad \rho^2=2m^2-\frac{R^2}{2}.$$

Des formules (6), (7) et (8) on tire

$$(9)\qquad ab=\varepsilon\left[\left(\frac{R}{2}\right)^2-m^2\right].$$

Donc le *produit des demi-axes de* S *est égal à la valeur absolue de la puissance de son centre* D *par rapport au cercle fixe* Γ. De plus $-\varepsilon$ est, d'après (9), du signe de cette puissance, et l'on conclut d'après (6) que :

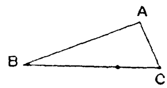
Lorsque le centre de S *est à l'intérieur du cercle fixe* Γ, *la somme des demi-axes est constante et égale au diamètre de* Γ; *lorsque* D *est à l'extérieur de* Γ, *c'est la différence qui remplace la somme.*

9° Les formules (6) et (9) montrent que l'on a

$$a=R,\qquad b=0$$

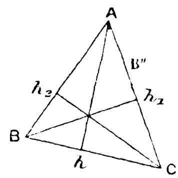
lorsque le centre de S est sur Γ. Alors la conique S se réduit à un segment de droite de longueur $2R$ dont le milieu est sur Γ. Au point de vue tangentiel, c'est un ensemble de deux points B, C ayant trois tangentes communes avec S. Il faut donc que ces trois tangentes soient BC et deux droites passant l'une en B, l'autre en C (*fig.* 3). Dans ce cas le triangle ABC devient tan-

Fig. 3.



gent en B et C à S (*fig.* 1); le point B″ (*fig.* 4) vient en C; donc $Ah_1 = B''C = 0$ et, par conséquent, h_1 venant en A,

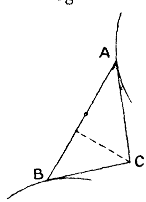
Fig. 4.



la hauteur issue de B est AB : l'angle BAC est droit.

On peut voir ceci autrement : on peut prendre AC et AB arbitrairement. Laissant la tangente quelconque AB fixe, faisons tendre AC vers la tangente à H en l'un des points d'intersection de H et AB (*fig.* 5). Alors les

Fig. 5.



deux tangentes Ah et AC se confondent, et par conséquent aussi les deux tangentes *perpendiculaires* Bh_1 et BC; donc B est sur H. Le triangle ABC devient rectangle en C; le côté $AB = 2R$, puisqu'alors le cercle circonscrit a AB pour diamètre; le milieu de AB est encore sur Γ.

Ainsi, *la portion d'une tangente quelconque à* H, *interceptée par* H *est constante; le milieu de ce segment décrit* Γ; *les tangentes aux extrémités sont rectangulaires.*

10° On tire des formules (6) et (9)

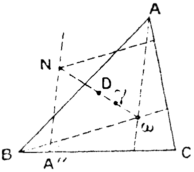
$$m = \frac{a - \varepsilon b}{2}.$$

Donc le lieu des centres des coniques S *de grandeur constante est un cercle concentrique à* Γ.

On peut considérer ces coniques S comme les diverses positions, dans un plan fixe Q, d'une ellipse S_1 invariable dans un plan mobile q.

Elles ont pour enveloppe H; donc le centre instantané de rotation sera le point de concours N (*fig.* 6)

Fig. 6.



des normales communes à S et H. On a

$$N\gamma = 3D\gamma = \tfrac{3}{2}(a - \varepsilon b) \qquad \text{et} \qquad ND = 2D\gamma = a - \varepsilon b.$$

Donc les distances du point N au point D fixe dans le plan mobile (D centre de S_1) et au point γ fixe dans le plan fixe (γ centre de Γ) sont constantes et les points N, D, γ sont en ligne droite. Donc le lieu de N est un cercle de centre D et de rayon $a - \varepsilon b$ dans q, et un cercle de centre γ et de rayon $\frac{3a - \varepsilon b}{2}$ dans le plan fixe.

L'enveloppe d'une ellipse d'axes $2a$ et $2b$ invariablement liée à un cercle concentrique de rayon $a - \varepsilon b$ roulant sur un cercle C de rayon $\frac{3}{2}(a - \varepsilon b)$ est une hypocycloïde à trois rebroussements.

11° Les normales $A''N$, $B''N$, $C''N$ sont homothétiques des hauteurs du triangle ABC par rapport au point fixe γ. Les hauteurs de ABC sont tangentes à H.

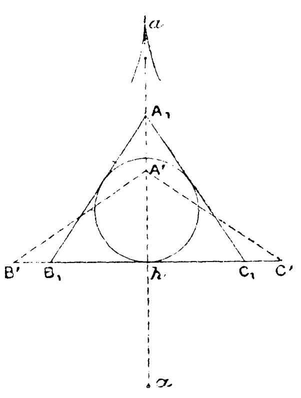
La développée d'une hypocycloïde H *est une autre hypocycloïde homothétique de la première par rapport à γ dans le rapport -3.*

12° Lorsque le centre D de S vient en γ, on a

$$a = b = \frac{R}{2};$$

donc le cercle γ est tritangent à H (*fig.* 7). Le cercle

Fig. 7.



des neuf points doit alors se confondre avec le cercle inscrit, pour le triangle $A_1B_1C_1$ relatif à Γ. Donc celui-ci est équilatéral. Si, d'un point A' d'une hauteur $A_1 h$ du triangle $A_1 B_1 C_1$, on mène deux autres tangentes à H rencontrant $B_1 C_1$ en B' et C', le cercle Γ sera le cercle des neuf points du triangle $A'B'C'$; donc ces tangentes sont symétriques par rapport à $A_1 h$:

Les hauteurs du triangle $A_1 B_1 C_1$ *sont trois axes de symétrie de* H.

En prenant pour axes $A_1 h$ et $h C_1$, l'équation de H prend la forme réduite

$$(10) \qquad w(u^2 + v^2) + 2R\, u^2 v = 0.$$

13° Le cercle D circonscrit à $A'B'C'$ coupe $A'h$ en un point α tel que $\alpha A' = 2R$, diamètre de D. Lorsque A' tend vers le point a tel que $ah = 2R$, α vient en h; donc aussi B' et C'; les tangentes $A'B'$, $A'h$, $A'C'$ sont alors confondues :

Les axes de symétrie de H *sont aussi ses tangentes de rebroussements et les points de rebroussements sont sur un cercle* Γ' *concentrique à* Γ *et de rayon triple.*

14° En appliquant la proposition (10°) dans le cas où $b = 0$, on ramène finalement à la proposition bien connue :

L'hypocycloïde à trois rebroussements est le lieu d'un point d'un cercle qui roule intérieurement dans un cercle de rayon triple.

15° On satisfait à l'équation (10) en posant

$$(11) \qquad \frac{u}{1+t^2} = \frac{v}{t(1+t^2)} = -\frac{w}{2Rt}.$$

Les t des tangentes communes à H et à une courbe quelconque de classe m

$$
\begin{aligned}
&(A_0^0 u^m + A'_0 u^{m-1} + \ldots + A_0^m v^m) \\
&\quad + w(A_1^0 u^{m-1} + \ldots) + w^2(\ldots) + \ldots + A_m^0 w^m = 0
\end{aligned}
$$

sont racines d'une équation de la forme

$$
(12) \qquad t^{3m} - T_1 t^{3m-1} + T_2 t^{3m-2} - \ldots = 0,
$$

où

$$
\begin{aligned}
\rho T_1 &= A_0^1 - 2RA_1^0, \\
\rho T_3 &= A_0^3 + mA_0^1 - 2R[A_1^2 + (m-1)A_0^1] + (-2R)^2 A_2^2, \\
\rho T_5 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

D'où, par un calcul facile qui repose sur l'identité $(1-1)^p = 0$, on tire

$$
\rho(T_1 - T_3 + T_5 - T_7 - \ldots) = 0.
$$

Soit alors φ_i l'angle avec Oy de l'une des tangentes T_i définies par (12); la relation précédente devient

$$
(13) \qquad \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{3m} \equiv 0,
$$

le signe $\equiv$ indiquant l'égalité à un multiple de π près.

D'ailleurs, toute courbe de classe m tangente à $3m-1$ tangentes d'une courbe de troisième classe est tangente à une tangente fixe de cette dernière courbe. Ainsi *la relation* (13) *est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une courbe de classe* m *tangente aux* $3m$ *tangentes* $T_1, \ldots, T_{3m}$ *à* H.

16° On en déduit, par exemple : la condition pour que trois tangentes à H soient les tangentes communes à H et à une conique S tritangente

$$
\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv \frac{\pi}{2}
$$

montre bien que celle-ci dépend de deux paramètres et qu'on peut choisir arbitrairement deux des tangentes communes.

17° *Les tangentes à* H, *issues des points de contact de* H *et de la conique* S *triplement tangente, sont concourantes;* car leurs paramètres φ'_i donnés par les équations

$$2\varphi_i + \varphi'_i = 0$$

satisfont à la relation

$$\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 = 0,$$

si l'on a

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{\pi}{2}.$$

18° Soit φ_n la tangente à H menée par le point de contact de la tangente φ_{n-1}. Avec des déterminations convenables de ces angles on aura

$$-2\varphi_{n-1} = \varphi_n, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi_n = (-2)^n \varphi.$$

Si l'on prend $\varphi = \dfrac{k\pi}{1-(-2)^n}$, on aura

$$\varphi = \varphi_n + k\pi.$$

Donc *il existe un ou plusieurs polygones de n côtés à la fois inscrits et circonscrits à* H.

Par exemple, pour $n = 3$, on a le triangle

$$\varphi = \frac{\pi}{9}, \qquad \varphi_1 = -\frac{2\pi}{9}, \qquad \varphi_2 = \frac{4\pi}{9}$$

et son symétrique par rapport à une tangente de rebroussement. En prenant ce triangle comme triangle de référence, l'équation de H prend la forme

$$A\frac{u}{v} + B\frac{v}{w} + C\frac{w}{u} + D = 0.$$

[D4a]
SUR LES ZÉROS DES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. E. IAGGI.

1. Dans une précédente Note (1), nous avons donné la forme générale des relations entre les zéros $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ d'une fonction uniforme entière donnée sous forme de série

$$\frac{F(x)}{F(0)} = 1 + \frac{A_1}{1}x + \frac{A_2}{1.2}x^2 + \ldots \tag{1}$$

et les coefficients de cette série, et cela, en nous servant de la forme générale de $F(x)$ décomposée en facteurs primaires, qui est la suivante :

$$F(x) = F(0)e^{G(x)}\prod_i\left(1 - \frac{x}{a_i}\right)e^{g_i(x)}, \tag{2}$$

où les fonctions $G(x)$ et $g_i(x)$, ... s'annulent avec x. Ces relations sont

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
A_1 &= \sum_i\left[g'_i(0) - \frac{1}{a_i}\right],\\
A_2 &= \sum_i\left[g''_i(0) - \frac{1}{a_i^2}\right] + \left\{\sum_i\left[g'_i(0) - \frac{1}{a_i}\right]\right\}^2,\\
A_3 &= \sum_i\left[g'''_i(0) - \frac{2}{a_i^3}\right]\\
&\quad + 3\sum_i\left[g'_i(0) - \frac{1}{a_i}\right]\sum_i\left[g''_i(0) - \frac{1}{a_i^2}\right]\\
&\quad + \left\{\sum_i\left[g'_i(0) - \frac{1}{a_i}\right]\right\}^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

(1) *Relations entre les zéros et les coefficients des fonctions entières* (*Nouvelles Annales*, janvier 1901).

lorsqu'il n'existe pas de facteur $e^{G(x)}$. Dans le cas contraire, il suffit d'ajouter à chacune des séries

$$\sum_i \left[g_i^{(n)}(0) - \frac{1.2\ldots(n-1)}{a_i^n} \right]$$

le terme correspondant

$$G^{(n)}(0).$$

Dans notre démonstration, nous avons simplement supposé, ce qui était nécessaire pour la décomposition de $F(x)$ en facteurs primaires, que les fonctions $g_i(x)$ étaient telles que la série

$$\sum_i \left[g'_i(x) + \frac{1}{x - a_i} \right]$$

fût convergente. Il convient d'examiner particulièrement la forme que MM. Weierstrass et Mittag-Leffler ont donnée à ces fonctions $g_i(x)$.

En supposant qu'il existe un nombre $\omega + 1$ tel que les séries

$$\sum_i \frac{1}{a_i^n} \qquad (n \geqq \omega + 1)$$

soient convergentes, tandis que les séries analogues où n est inférieur à $\omega + 1$ sont divergentes, M. Mittag-Leffler a démontré qu'on pouvait prendre pour les $g_i(x)$ les fonctions

$$g_i(x) = \frac{x}{a_i} + \frac{x^2}{2a_i^2} + \frac{x^3}{3a_i^3} + \ldots + \frac{x^\omega}{\omega a_i^\omega}.$$

Dans ce cas, les ω séries

$$\sum_i \left[g_i^{(n)}(0) - \frac{1.2\ldots(n-1)}{a_i^n} \right] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, \omega)$$

se réduisent identiquement à zéro. Quant aux autres,

$(n > \omega)$, elles deviennent simplement

$$\sum_i \left[- \frac{1.2\ldots(n-1)}{a_i^n} \right] \qquad (n > \omega).$$

Les coefficients de la série $F(x)$ sont alors, en supposant que le facteur $e^{G(x)}$ n'existe pas,

$$\begin{aligned}
A_1 &= 0,\\
A_2 &= 0,\\
&\ldots\ldots,\\
A_\omega &= 0,\\
A_{\omega+1} &= \frac{(-1)^{\omega+1}}{\omega+1\,!} S_{\omega+1},\\
A_{\omega+2} &= \frac{(-1)^{\omega+2}}{\omega+2\,!} S_{\omega+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

où $S_{\omega+1}$, $S_{\omega+2}$, ... désignent la somme des produits $\omega+1$ à $\omega+1$ des inverses $\frac{1}{a_i}$ des zéros, la somme de leurs produits $\omega+2$ à $\omega+2$, ... S'il existe un facteur $e^{G(x)}$ dans $F(x)$, les ω premiers coefficients ne sont plus nuls, mais ont pour valeurs

$$A_n = \left(\frac{d^n e^{G(x)}}{dx^n} \right)_{x=0} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \omega).$$

Pour obtenir les coefficients suivants, il conviendra de reprendre la forme générale (3), d'y annuler les quantités $g_i^{(n)}$, $(n > \omega)$, et d'ajouter à chacune des séries $\sum_i \left[- \frac{(n-1)!}{a_i^n} \right]$ le terme correspondant $G^{(n)}(0)$.

On obtient ainsi, sous forme de série, l'expression générale d'une fonction entière de genre ω.

Lorsque aucune des séries $\sum_i \frac{1}{a_i^n}$ n'est convergente, n étant fini, on prend pour $g_i(x)$ la même fonction que précédemment, mais on y fait $\omega = i - 1$ (Weierstrass).

Dans ce cas, les séries

$$\sum_i \left[g_i'(0) - \frac{1}{a_i}\right],$$

$$\sum_i \left[g_i''(0) - \frac{1}{a_i^2}\right],$$

$$\sum_i \left[g_i'''(0) - \frac{2}{a_i^3}\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum_i \left[g_i^{(n)}(0) - \frac{(n-1)!}{a_i^n}\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

se réduisent respectivement à

$$-\frac{1}{a_1}, \quad -\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2}, \quad -\frac{2}{a_1^3} - \frac{2}{a_2^3} - \frac{2}{a_3^3}, \quad \ldots,$$

$$-(n-1)!\left(\frac{1}{a_1^n} + \frac{1}{a_2^n} + \ldots + \frac{1}{a_n^n}\right), \quad \ldots.$$

Comme dans le cas précédent, il faut ajouter, à chacune de ces séries, le terme correspondant $G^{(n)}(0)$ pour former les coefficients A.

On peut observer, à l'égard de la formation des coefficients A, que la forme donnée par Weierstrass aux facteurs primaires convient non seulement au cas des fonctions de genre infini, mais *à tous les cas;* que, par conséquent, dans le cas où le genre est fini, on peut se servir des facteurs primaires de Weierstrass, au lieu de ceux de M. Mittag-Leffler; que ce changement, qui ne peut évidemment altérer la fonction $F(x)$ elle-même, produit simplement un changement dans la fonction $G(x)$, mais non pas dans les coefficients $A_1, A_2, \ldots$; qu'enfin, si MM. Weierstrass et Mittag-Leffler ont pu, dans l'hypothèse où a_n croît indéfiniment avec n, former des produits convergents dont les zéros $a_1, a_2, \ldots$,

a_n, ... sont donnés, au moyen de certaines exponentielles $e^{g_i(x)}$, il ne s'ensuit pas que ces fonctions $g_i(x)$, *suffisantes* pour assurer la convergence du produit, doivent être *nécessairement de la forme indiquée* par MM. Weierstrass et Mittag-Leffler [1]. On peut, au contraire, introduire arbitrairement dans ces exponentielles des facteurs tirés de $e^{G(x)}$, et l'on conçoit qu'on puisse considérer des produits convergents

$$\prod\left(1-\frac{x}{a_i}\right)e^{g_i(x)},$$

où les fonctions $g_i(x)$ sont telles que la série

$$\sum_i\left[g'_i(x)+\frac{1}{x-a_i}\right]$$

soit convergente, mais ne sont plus de la forme indiquée précédemment.

Nous pouvons dès lors énoncer le théorème général suivant :

Pour que la fonction entière $F(x)$ *donnée par la série* (1) *admette pour zéros les points* a_1, a_2, ..., a_i, ..., *et seulement ces points-là, il est nécessaire et suffisant que ses coefficients* A_1, A_2, ... *satisfassent aux rela-*

---

(1) Weierstrass a d'ailleurs fait lui-même une remarque analogue dans son Mémoire *Sur les fonctions analytiques uniformes*, où il a démontré la décomposition des fonctions entières en facteurs primaires (Traduction de M. Picard, *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. VIII).

On peut encore remarquer que la forme donnée jusqu'ici à l'exponentielle des facteurs primaires convient au cas où a_n croît indéfiniment avec n, mais ne conviendrait pas dans le cas contraire, cas qui peut cependant se présenter, par exemple, lorsque les quantités a_n dépendent d'un paramètre arbitraire, ou d'une variable autre que x; on peut alors concevoir des produits convergents de la forme considérée, mais où les $g_i(x)$ ne peuvent avoir la forme adoptée jusqu'ici.

tions (3), *dans lesquelles* $g'_i(0)$, $g''_i(0)$, ... *sont les valeurs des dérivées, pour* $x = 0$, *de certaines fonctions entières* $g_i(x)$ *qui rendent convergente la série*

$$\sum_i \left[g'_i(x) + \frac{1}{x - a_i} \right]$$

et qui ne sont d'ailleurs assujetties qu'à cette condition.

[On peut faire rentrer $G(x)$ dans les fonctions $g(x)$, puisque celles-ci n'ont plus une forme déterminée *à priori.*]

Si plusieurs des quantités a_i sont égales, rien n'est changé à cet énoncé. Si plusieurs de ces quantités sont nulles, soit n leur nombre; on considérera la fonction $\frac{F(x)}{x^n}$ et l'on rentrera dans le cas précédent.

Lorsque $\sum \frac{1}{a_i}$ est convergente, toutes les fonctions $g_i(x)$ se réduisent à une seule, $G(x)$; on peut d'ailleurs supprimer celle-ci, mais cette suppression n'est pas nécessaire.

2. Si l'on considère une fonction uniforme entière $F(x)$ décomposée en ses facteurs primaires

$$F(x) = F(0) e^{G(x)} \prod_i \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) e^{g_i(x)},$$

où les $g_i(x)$ rendent convergent le produit indiqué, on peut, en affectant d'exposants réels quelconques, mais finis, les facteurs primaires, obtenir de nouvelles fonctions décomposées en facteurs primaires, mais qui ne seront plus uniformes.

Soit, par exemple,

$$f(x) = f(0)e^{G_1(x)} \prod_i \left(1 - \frac{x}{a_i}\right)^{m_i} e^{m_i g_i(x)}.$$

La convergence du produit précédent ne dépend que de la convergence de la série

$$\sum_i m_i \left[g_i'(x) + \frac{1}{x - a_i} \right].$$

La série

$$\sum_i \left[g_i'(x) + \frac{1}{x - a_i} \right]$$

étant supposée convergente, la précédente l'est aussi, pourvu que tous les nombres m_i soient finis.

Si tous les nombres m_i sont commensurables entiers, on est ramené au cas précédemment étudié : $f(x)$ est une fonction uniforme entière.

Si, parmi les nombres commensurables m_i, il s'en trouve au moins un qui soit fractionnaire, la fonction $f(x)$ est une fonction multiforme *ponctale* (1).

Si, parmi les nombres m_i, il en est qui sont *incommensurables,* la fonction $f(x)$ est une fonction multiforme *improprement linéale* (2).

Or, les relations démontrées subsistent entre les zéros de $f(x)$ et les coefficients de cette fonction développée en série.

En effet, nous avons posé, pour démontrer ces relations,

$$f_i(x) = g_i(x) + \mathfrak{L}\left(1 - \frac{x}{a_i}\right),$$

---

(1), (2) Au sujet de ces expressions, *voir* notre Note : *Sur les notions de fonction complète et de fonction périodique* (*Nouvelles Annales*, 1901, p. 146-163).

en sorte que nous n'avons plus eu à développer en série qu'une exponentielle

$$e^{G(x)+\sum\limits_i f_i(x)}.$$

Or, si les facteurs primaires sont affectés d'exposants m_i, on a à développer en série la fonction

$$e^{G(x)+\sum\limits_i m_i f_i(x)}.$$

Les coefficients A_1, A_2, ... de la série seront donc les suivants, en supposant qu'on ait fait rentrer $G(x)$ dans les $g_i(x)$:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sum_i m_i\left[g'_i(0)-\frac{1}{a_i}\right],\\
A_2 &= \sum_i m_i\left[g''_i(0)-\frac{1}{a_i^2}\right]+\left\{\sum_i m_i\left[g'_i(0)+\frac{1}{a_i}\right]\right\}^2,\\
A_3 &= \sum_i m_i\left[g'''_i(0)-\frac{2}{a_i^3}\right]\\
&\quad+3\sum_i m_i\left[g'_i(0)-\frac{1}{a_i}\right]\sum_i m_i\left[g''_i(0)-\frac{1}{a_i^2}\right]\\
&\quad+\left\{\sum_i m_i\left[g'_i(0)-\frac{1}{a_i}\right]\right\}^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On pourrait encore considérer le cas d'exposants m_i imaginaires; les points a_i correspondants seraient alors des points singuliers essentiels de $f(x)$. Mais le cas que nous venons de traiter, où les exposants m_i sont réels et quelconques, nous suffit pour les applications que nous voulons tirer de ces relations.

De ce qui précède on peut conclure qu'*il existe des fonctions multiformes auxquelles la décomposition en* *facteurs primaires est applicable et dont les coefficients des développements en série satisfont aux relations indiquées précédemment.*

On pourra appeler *ordre d'un zéro* a_i le nombre m_i correspondant, qu'il soit entier, fractionnaire ou incommensurable, et alors on pourra énoncer cette loi générale :

Chaque terme d'une quelconque des séries $\sum_i$ *qui entrent dans la formule d'un coefficient quelconque* A_n *est multiplié par l'ordre* m_i *du zéro* a_i *relatif à ce terme.*

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

I. *Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les deux familles de lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de la développée d'une surface est que cette surface ait des rayons de courbure principaux dont la différence soit constante.*

II. *Démontrer que, pour que les rayons de courbure principaux d'une surface* S *soient fonctions l'un de l'autre, il faut et il suffit que, pour chaque point* M *de cette surface, le produit des quatre rayons de courbure principaux des deux nappes de la développée de* S, *aux centres de courbure principaux correspondant au point* M, *soit égal à la quatrième puissance de la distance de ces deux points.*

III. *Démontrer que, pour que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la développée d'une surface donnée, c'est-à-dire pour qu'à tout système conjugué tracé sur la première nappe corresponde un système conjugué de la seconde nappe, il faut que les deux* *rayons de courbure principaux de cette surface soient fonctions l'un de l'autre.*

Nota. — Dans les énoncés précédents, la correspondance entre les deux nappes de la développée a lieu entre les points de contact d'une même normale de la surface primitive avec ces deux nappes. (Toulouse, juillet 1901.)

I. *Démontrer que la connaissance d'un système cyclique équivaut à celle d'une enveloppe de sphères telle que les points focaux des cordes de contact soient conjugués harmoniques par rapport aux points de contact, et inversement.* (*On rappelle que les points de contact, avec leur enveloppe, des sphères dont il est question dans l'énoncé s'obtiennent en considérant les sphères de rayon nul passant par les cercles du système cyclique.*)

II. *Recherche des congruences formées de courbes planes identiques entre elles et normales à toutes les surfaces d'une famille.* (Toulouse, novembre 1901.)

La distance de deux points infiniment voisins d'une surface étant donnée par la formule

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(Au + Bv + C)^2},$$

on suppose que A, B, C *sont trois fonctions d'un paramètre t, ce paramètre étant lié aux variables u, v par la condition*

$$A'u + B'v + C' = 0 \tag{1}$$

(A', B', C' *désignant les dérivées de* A, B, C).

I. *On demande de calculer :*

1° *Les courbures géodésiques des lignes coordonnées;*

2° *Le produit des courbures principales en un point quelconque.*

II. *Démontrer que les lignes $t =$ const. forment une famille de cercles géodésiques. Trouver la propriété caractéristique de cette famille de cercles.*

III. *Déterminer les fonctions* A, B, C *de telle sorte que le ds^2 soit de la forme de Liouville.*

(Lille, novembre 1901.)

SOLUTION.

I. Les courbures géodésiques des lignes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sont

$$-A \quad \text{et} \quad +B.$$

La courbure totale en un point (u, v) est

$$\frac{(A'^2 + B'^2)(Au + Bv + C) + (A^2 + B^2)(A''u + B''v + C'')}{A''u + B''v + C''}.$$

II. Les lignes $t = \text{const.}$ ont pour équation différentielle

$$A'\,du + B'\,dv = 0;$$

soit i leur inclinaison sur les lignes (v); on a

$$A'\cos i + B'\sin i = 0.$$

La courbure géodésique de ces lignes est $\dfrac{AA' + BB'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$. Cette courbure, comme l'angle i, ne dépendent que de t et sont constants le long de la ligne $t = \text{const.}$ Par suite, les lignes $t = \text{const.}$ sont des cercles géodésiques dont chacun coupe sous un angle constant les lignes coordonnées.

III. Écrivons que $\dfrac{1}{(Au + Bv + C)^2}$ vérifie $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} = 0$, en considérant t comme une fonction de u et v définie par la relation (1). Il vient

$$A'B'(Au + Bv + C) + 3AB(A''u + B''v + C'') = 0,$$

relation qui ne saurait être distincte de (1), sans quoi u et v ne seraient pas indépendants. L'identification donne

$$\frac{A}{A'}(A'B' + 3A''B) = \frac{B}{B'}(A'B' + 3AB'') = \frac{1}{C'}(A'B'C + 3ABC'').$$

La relation différentielle entre A et B montre, par deux intégrations successives, qu'il existe une relation linéaire à coefficients constants entre $A^{\frac{2}{3}}$ et $B^{\frac{2}{3}}$.

Si cette relation ne contient pas de terme constant, elle entraîne

$$pA + qB = 0,$$

p et q étant constants. Donc $A = qf(t)$ et $B = -pf(t)$; t, donné par (1) ou

$$(qu + pv) f'(t) + C' = 0$$

sera une fonction de $qu + pv$, et il en sera de même de $Au + Bv + C$; le ds^2 aura donc la forme $F(qu - pv)(du^2 + dv^2)$ et ne sera de la forme de Liouville que si F est linéaire; d'où

$$\text{(I)} \qquad ds^2 = (qu - pv)(du^2 + dv^2).$$

Si la relation renferme un terme constant, écrivons-la

$$(\alpha) \qquad (pA)^{\frac{2}{3}} + (qB)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

A et B vérifiant (α), C sera donné par une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre dont les solutions $C = A$ et $C = B$ sont évidentes; C sera de la forme $\alpha A + \beta B$, α et β étant des constantes; si donc on change u et v en $u - \alpha$ et $v - \beta$, on sera ramené au cas où $C \equiv 0$. Cela étant, différentions la relation (α) en tenant compte de (1), qui devient

$$A'u + B'v = 0;$$

nous aurons une relation entre A et B qui, avec (α), donne

$$Au + Bv = \left(\frac{p^2}{u^2} + \frac{q^2}{v^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Le ds^2 prendra la forme

$$\text{(II)} \qquad ds^2 = \left(\frac{p^2}{u^2} + \frac{q^2}{v^2}\right)(du^2 + dv^2).$$

[On trouvera des développements sur cette question dans un Mémoire de M. Demartre inséré dans les *Travaux de l'Université de Lille*, 1901 (*Sur certaines familles de courbes orthogonales et isothermes*).]

CORRESPONDANCE.

M. **G. Painvin,** à Nantes. — Il me semble que la fin de la solution de la question 1857 (novembre 1901, p. 527) n'est pas exacte à partir des mots *Le lieu cherché,* etc.

Si, en effet, au lieu de considérer les deux cônes A^2 et B^2, on considère le cône C^2, qui évidemment contient aussi le lieu, il faut que ce cône passe par l'intersection des deux premiers, ce qui est impossible si la projection du lieu se compose de $C'K$ et $A'B'$, droites qui constituent le contour apparent du cône C^2 et ne peuvent, par suite, être la projection d'une courbe tracée sur sa surface, sauf dans le cas où ce cône C^2 se réduit à deux plans, cas particulier qui est l'objet du dernier paragraphe. Dans le cas général, on trouve des arcs de coniques comme projections sur le plan.

M. **d'Ocagne.** — *Sur l'expression du rayon de courbure en coordonnées parallèles* (à propos de la question 1920). — J'ai commis une inadvertance dans l'énoncé de la question 1920, qui doit être ainsi modifié à partir de la quatrième ligne : « compris entre le point de contact et l'une des asymptotes ». Voici la voie qui m'y avait conduit.

En formant l'équation du centre de courbure répondant à la tangente (u, v) en coordonnées parallèles ([1]) et écrivant ensuite que sa distance à cette tangente est égale au rayon de courbure R, on trouve

$$R = \frac{d^2 v\, du - d^2 u\, dv}{(dv - du)^3}\,\frac{[\delta^2 + (v-u)^2]^{\frac{3}{2}}}{\delta},$$

les axes de coordonnées Au et Bv étant supposés perpendiculaires à l'axe AB des origines et δ représentant la distance AB de ces origines.

Si l'on prend u comme variable indépendante, cette expres-

([1]) *Coordonnées parallèles et axiales.* Paris, Gauthier-Villars; 1885.

sion devient

$$R = \frac{v''_u}{(v'_u - 1)^3} \frac{[\delta^2 + (v-u)^2]^{\frac{3}{2}}}{\delta},$$

et l'on en peut donner l'interprétation géométrique que voici : si la tangente dont le point de contact est M coupe l'axe Au en T, on a

$$R = v''_u \frac{\overline{MT}^3}{AB}.$$

Soit, par exemple, une ellipse tangente en A et B à Au et Bv. Si l'on représente par $2a$ l'axe AB ou δ de cette ellipse, par $2b$ le second axe, l'équation de l'ellipse s'écrit

$$uv = b^2,$$

d'où

$$v''_u = \frac{2b^2}{v^3} = \frac{2b^2}{\overline{AT}^3},$$

et la formule précédente devient

$$R = \frac{b^2}{a} \frac{\overline{MT}^3}{\overline{AT}^3}.$$

Or, si du centre O de l'ellipse on abaisse sur la tangente MT la perpendiculaire $OH = h$, on a [1]

$$MT . h = AT . a.$$

Par suite,

$$Rh^3 = a^2 b^2,$$

égalité qui se traduit par l'énoncé de la question 1919 [2].

On déduit de là

$$Rh = \frac{a^2 b^2}{h^2} = \frac{a^2 b^2}{\rho^2 \sin^2 \omega},$$

en appelant ρ le demi-diamètre OM et ω l'angle de ce diamètre

---

(1) Il suffit, pour établir cette relation, de remarquer que les triangles OMT et OTA sont équivalents comme projections de triangles égaux dans le plan du triangle principal.

(2) *Nouvelles Annales*, 4e série, t. II, p. 48.

avec la tangente MT, ou, en appelant ρ' le demi-diamètre conjugué et appliquant le second théorème d'Apollonius

$$Rh = \rho'^2.$$

Dans le cas de l'hyperbole, il suffit, dans ce qui précède, de changer b^2 en $-b^2$. Le demi-diamètre ρ' figurant dans cette dernière égalité doit alors être pris dans l'hyperbole conjuguée. Mais, pour n'avoir pas à faire intervenir celle-ci, il suffit de remarquer que ce demi-diamètre est égal au segment de la tangente MT, compris entre le point de contact et l'une des asymptotes. De là l'énoncé rectifié de la question 1920 (1), qui conduit à cette construction du centre de courbure :

Si le centre O *de l'hyperbole se projette en* I *sur la normale en* M, *et si la tangente en* M *coupe l'une des asymptotes en* R, *la perpendiculaire élevée en* R *à* IR *passe par le centre de courbure situé sur la normale* MI.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1893.

(1900, p. 574.)

On donne une parabole P *représentée par* $y^2 - 2px = 0$; *on considère les paraboles* Q *qui touchent* XO *en* O *et dont les directrices sont tangentes à* P.

1° *Former l'équation générale des paraboles* Q, *démontrer que par chaque point du plan il passe trois de ces paraboles, déterminer la région où sont situés les points tels que deux des trois paraboles qui y passent soient confondues;*

2° *Former l'équation de l'axe d'une parabole* Q, *en déduire qu'il passe trois axes par chaque point du plan, trouver le lieu des points tels que deux axes correspondants soient rectangulaires;*

(1) *Nouvelles Annales*, 4e série, t. II, p. 48 et 240.

3° *Trouver le lieu des foyers des paraboles* Q;
4° *Former l'enveloppe des tangentes au sommet.*

(Ch. Bioche.)

SOLUTION

Par M. E.-N. Barisien.

1. Soient

F le foyer d'une parabole Q;
F' le symétrique de F par rapport à OX;
α et β les coordonnées de F;
θ l'angle de l'axe de Q avec OX;
$OF = OF' = q$.

L'équation de la directrice de Q est

$$(1)\qquad x\cos\theta + y\sin\theta + q = 0.$$

Les coordonnées de F sont

$$(2)\qquad \alpha = -q\cos\theta,\qquad \beta = q\sin\theta.$$

De sorte que l'équation générale des paraboles tangentes en O à OX est

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta + q)^2$$

ou

$$(x + q\cos\theta)^2 + (y - q\sin\theta)^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta + q)^2,$$

qui se réduit à

$$(x\sin\theta - y\cos\theta)^2 - 4qy\sin\theta = 0.$$

Reste à exprimer que la droite (1) est tangente à la parabole $y^2 - 2px = 0$.

En portant $x = \dfrac{y^2}{2p}$ dans (1), on a

$$y^2\cos\theta + 2py\sin\theta + 2pq = 0.$$

Cette équation en y aura ses racines égales pour

$$q = \frac{p\sin^2\theta}{2\cos\theta};$$

par conséquent l'équation générale des paraboles Q est, en fonction du paramètre variable θ,

$$(3) \qquad (x \sin\theta - y\cos\theta)^2 - \frac{2py \sin^3\theta}{\cos\theta} = 0.$$

En posant $\tang\theta = m$, et ordonnant par rapport à m, cette équation devient

$$(4) \qquad 2pym^3 - m^2x^2 + 2mxy - y^2 = 0.$$

Cette équation en m est du troisième degré : il passe donc, par chaque point (x, y) du plan, trois paraboles Q. Si deux de ces paraboles sont confondues, c'est que l'équation (4) a une racine commune avec sa dérivée par rapport à m, c'est-à-dire

$$(5) \qquad 3pym^2 - mx^2 + xy = 0.$$

En multipliant (5) par $2m$ et en retranchant (4) multipliée par 3, on a

$$(6) \qquad m^2x^2 - 4mxy + 3y^2 = 0.$$

On est donc ramené à éliminer m entre (5) et (6), ce qui donne

$$y^2[(x^3 - 9py^2)^2 - x^2(x^4 - 12pxy^2)] = 0$$

ou

$$y^4(27py^2 - 2x^3) = 0.$$

Le lieu cherché est donc la *parabole semi-cubique*

$$(7) \qquad y^2 = \frac{2x^3}{27p},$$

qui est la *développée de la parabole*

$$y^2 = 8p(x + 4p).$$

La courbe (7) est aussi l'enveloppe de la parabole (3)

2. L'équation de l'axe de la parabole Q est

$$y - \beta = (x - \alpha)\tang\theta$$

ou

$$(y - q\sin\theta)\cos\theta = (x + q\cos\theta)\sin\theta.$$
$$x\sin\theta - y\cos\theta + 2q\sin\theta\cos\theta = 0.$$

ou enfin

$$x \sin\theta - y \cos\theta + p \sin^3\theta = 0. \tag{8}$$

En posant $\operatorname{tang}\theta = m$, cette équation devient

$$(x+p)m^3 - ym^2 + xm - y = 0. \tag{9}$$

Donc, par un point (x, y) du plan il passe trois axes dont les coefficients angulaires m_1, m_2, m_3 satisfont à l'équation (9). Par conséquent

$$m_1 + m_2 + m_3 = \frac{y}{x+p}, \tag{10}$$

$$m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 = \frac{x}{x+p}, \tag{11}$$

$$m_1 m_2 m_3 = \frac{y}{x+p}. \tag{12}$$

Si deux des axes sont rectangulaires, on a en outre

$$m_2 m_3 = -1. \tag{13}$$

Il faut donc éliminer m_1, m_2, m_3 entre les équations (10), (11), (12) et (13); (12) donne

$$m_1 = -\frac{y}{x+p}. \tag{14}$$

(10) et (11) deviennent, en tenant compte de (13) et (14),

$$m_2 + m_3 = \frac{2y}{x+p},$$

$$m_2 + m_3 = -\frac{(2x+p)}{y}.$$

De sorte que, en égalant ces deux valeurs de $(m_2 + m_3)$, on obtient, pour l'équation du lieu tel que deux axes soient rectangulaires,

$$(2x+p)(x+p) + 2y^2 = 0,$$

$$2(x^2+y^2) + 3px + p^2 = 0.$$

Ce lieu est donc le *cercle*

$$\left(x + \frac{3p}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{16}. \tag{15}$$

3. Les coordonnées de F s'écrivent

$$(16) \qquad \alpha = -\frac{p\sin^2\theta}{2}, \qquad \beta = \frac{p\sin^3\theta}{2\cos\theta}.$$

L'élimination de θ entre ces deux équations donne

$$(17) \qquad \alpha(\alpha^2+\beta^2)+\frac{p\beta^2}{2}=0.$$

C'est une *cissoïde droite* ayant son point de rebroussement en O, et pour asymptote la directrice de la parabole P. L'équation polaire de cette cissoïde est d'ailleurs immédiatement donnée par la valeur de q

$$q = \frac{p\sin^2\theta}{2\cos\theta},$$

l'axe polaire étant dirigé suivant OX'.

On sait d'ailleurs que le lieu de F', symétrique de F par rapport à OX, est le lieu de la projection de O sur la directrice de Q, et, par conséquent, la podaire de la parabole P par rapport à son sommet; et ce lieu est précisément la cissoïde (17).

4. L'équation de la tangente au sommet de la parabole Q qui passe par la projection de F sur OX est

$$y = -(x-\alpha)\cot\theta, \qquad (x+q\cos\theta)\cos\theta+y\sin\theta=0$$

ou

$$(18) \qquad x\cos\theta+y\sin\theta = -\frac{p}{2}\sin^2\theta\cos\theta.$$

La dérivée de cette équation par rapport à θ est

$$(19) \qquad -x\sin\theta+y\cos\theta = -\frac{p}{2}(2\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta).$$

En résolvant ces deux équations par rapport à x et y, on trouve pour les coordonnées d'un point de l'enveloppe de la tangente au sommet

$$(20) \qquad x = \frac{p}{2}\sin^2\theta\cos 2\theta,$$

$$(21) \qquad y = -\frac{p}{2}\cos^2\theta\sin 2\theta.$$

On reconnaît sous cette forme que les coordonnées (20) et (21) sont celles d'une *hypocycloïde triangulaire* rapportée à une tangente de rebroussement et à sa tangente perpendiculaire.

Les trois points de rebroussement ont pour coordonnées

$$\left(-\frac{p}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{p}{16}, \frac{3p\sqrt{3}}{16}\right), \quad \left(\frac{p}{16}, -\frac{3p\sqrt{3}}{16}\right).$$

L'hypocycloïde passe aussi par le point O et par les points $\left(0, \pm\frac{p}{4}\right)$.

Le rayon du cercle qui passe par les trois points de rebroussement est $\frac{3p}{8}$, et l'aire de l'hypocycloïde est $\frac{\pi p^2}{16}$.

Remarques. — Voici un certain nombre d'autres lieux géométriques ou enveloppes relatives à la même figure, et dignes d'être consignés.

1° *L'enveloppe de l'axe de la parabole* Q *est une courbe ayant pour aire* $\frac{5\pi p^2}{4}$;

2° *Le lieu de la projection de* O *sur la tangente au sommet est la courbe en coordonnées polaires*

$$r = -\frac{p}{2}\cos\theta\sin^2\theta,$$

dont l'aire est $\frac{\pi p^2}{64}$;

3° *Le lieu de la projection de* O *sur l'axe de* Q *est la courbe*

$$r = -p\cos^3\theta,$$

dont l'aire est $\frac{5\pi p^2}{16}$;

4° *Le lieu de la projection de* O *sur la corde focale principale de* Q *est la courbe*

$$r = -\frac{p\sin^2\theta\cos 2\theta}{2\cos\theta},$$

dont l'équation cartésienne est

$$(x^2+y^2)^2 x - \frac{p}{2}y^2(x^2-y^2) = 0.$$

C'est une courbe du cinquième degré.

1899.

(1900, p. 575.)

On donne un point A *et une droite* D *située à une distance d du point* A. *Une longueur* $BC = \frac{2d}{\sqrt{3}}$ *se déplace sur* D. *Montrer que la droite d'Euler du triangle* ABC *enveloppe une parabole.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Prenons D pour axe des x, la perpendiculaire menée par A pour axe des y et posons $\overline{OB} = \lambda$, $\overline{BC} = a$: les coordonnées du barycentre G du triangle ABC étant

$$x = \frac{2\lambda + a}{3}, \qquad y = \frac{d}{3},$$

et celles du centre du cercle circonscrit M

$$x = \frac{2\lambda + a}{2}, \qquad y = \frac{d^2 + (a+\lambda)\lambda}{2d},$$

l'équation de la droite GM est

$$\begin{aligned}&(2\lambda + a)(a + \lambda)\lambda \\ &\quad - x(d^2 + 3a\lambda + 3\lambda^2) + y.d(2\lambda + a) = 0;\end{aligned}$$

en particulier, si $a = \frac{2d}{\sqrt{3}}$, elle devient, après suppression du facteur $(d + \lambda\sqrt{3})$,

$$2\lambda^2 + (2a - 3x)\lambda + d(2y - x\sqrt{3}) = 0,$$

dont l'enveloppe est

$$\left(3x - \frac{4d}{\sqrt{3}}\right)^2 - 8d(2y - x\sqrt{3}) = 0.$$

En transportant les axes au point $\left(o, \frac{d}{3}\right)$, l'équation de cette parabole prend la forme $9x^2 = 16d.y$.

Autre solution de M. Lez.

NÉCROLOGIE.

XAVIER ANTOMARI.

Au moment où allait paraître ce numéro, j'apprenais la mort d'Antomari, survenue le 9 juin. Mon collaborateur M. E. Duporcq m'excusera si je tiens personnellement à annoncer aux lecteurs des *Nouvelles Annales* le deuil qui les atteint en même temps que nous.

S'il perd un professeur aimé, dont il a été le collègue après avoir été l'élève, je perds un ami personnel dont j'ai pu apprécier la valeur morale, l'admirable conscience et les brillantes qualités intellectuelles.

Lorsque, en 1896, j'ai été appelé à la direction des *Nouvelles Annales*, c'est moi qui ai fait appel au concours d'Antomari. Je pensais qu'il fallait assurer la continuité de la Rédaction, en y appelant l'un des plus éminents professeurs de la jeune génération. Je me trompais, hélas! puisque c'est lui qui nous quitte.

Il meurt à 46 ans, après une cruelle maladie de plusieurs mois, dont le germe remontait à plusieurs années. N'a-t-il pas, au cours de sa carrière, donné plus que ne le lui permettaient ses forces physiques? Je serais tenté de le croire, après avoir vu de mes yeux quelle somme d'énergie il apportait à l'accomplissement de sa tâche de professeur et à ses travaux scientifiques.

Le temps et la place me manquent ici pour dire ce que fut le savant, pour indiquer les principales étapes de cette existence trop courte. Mais je dois proclamer les mérites de l'homme privé, et déclarer à son admirable famille, à sa veuve, à ses chers enfants, qu'à leur douleur s'associent du plus profond de leur âme les rédacteurs des *Nouvelles Annales*.

C.-A. LAISANT.

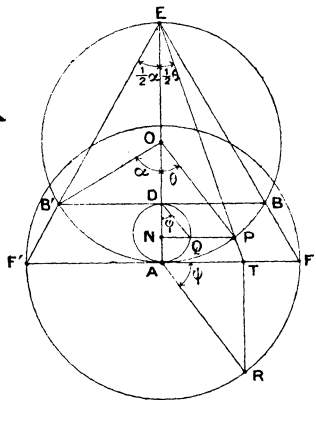
[R7f]

LE PENDULE SIMPLE SANS APPROXIMATIONS;

PAR M. GREENHILL.

La théorie du pendule simple est demandée dans certains programmes de Dynamique élémentaire. La méthode suivante est présentée dans le but d'éviter les approximations, qui n'apportent pas toujours la conviction dans l'esprit de l'élève et qui sont ordinairement employées quand on se borne au cas des petites oscillations.

Soit P l'extrémité d'un pendule simple de longueur $OP = l$, oscillant entre B et B' sur l'arc BAB', 2α désignant l'amplitude des oscillations; au mouve-



ment du point P comparons celui du point Q qui se déplace, en restant à la même hauteur verticale, sur le cercle AQD.

Les composantes verticales des vitesses de P et de Q sont égales, c'est-à-dire que

$$(1)\qquad (\text{vit. de Q})\sin 2\varphi = (\text{vit. de P})\sin\theta,$$

d'où

$$(2)\qquad \left(\frac{\text{vit. de Q}}{\text{vit. de P}}\right)^2 = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2 2\varphi} = \frac{\dfrac{\text{NP}^2}{\frac{1}{4}\text{AE}^2}}{\dfrac{\text{NQ}^2}{\frac{1}{4}\text{AD}^2}} = \frac{\text{AD}^2}{\text{AE}^2}\,\frac{\text{AN.NE}}{\text{AN.ND}} = \frac{\text{AD}^2}{\text{AE}^2}\,\frac{\text{NE}}{\text{ND}}.$$

A ces résultats géométriques joignons la formule dynamique

$$(3)\qquad (\text{vit. de P})^2 = 2g\,\text{ND},$$

de sorte que

$$(4)\qquad (\text{vit. de Q})^2 = 2g\,\frac{\text{AD}^2}{\text{AE}^2}\,\text{NE} = \frac{g}{l}\,\text{AD}^2\,\frac{\text{NE}}{\text{AE}} = \frac{g}{l}\,\text{AD}^2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta,$$

θ étant l'inclinaison du fil sur la verticale.

$\cos\frac{1}{2}\theta$ variant entre un maximum 1 et un minimum $\cos\frac{1}{2}\alpha$, on a

$$(5)\qquad \sqrt{\frac{g}{l}}\,\text{AD} > \text{vit. de Q} > \sqrt{\frac{g}{l}}\,\text{AD}\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

Le point Q décrit la circonférence πAD du cercle AQD pendant que le point P oscille de B à B'; par suite

$$(6)\qquad \pi\sqrt{\frac{l}{g}} < \text{durée de l'oscillation} < \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Si α est faible, séc $\frac{1}{2}\alpha$ est très voisin de l'unité, de sorte que la durée d'une petite oscillation est très voisine de $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Dans le cas où la durée de l'oscillation est un peu plus grande, si on lui attribue comme valeur la moyenne géométrique des limites, on a

$$(7)\qquad \text{durée de l'oscillation} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\text{séc}\,\tfrac{1}{2}\alpha};$$

nous obtenons alors comme correction circulaire

$$(8)\qquad \sqrt{\text{séc}\,\tfrac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{2}\alpha}} \approx 1+\tfrac{1}{3}\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha,$$

correction d'environ $25\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ pour 100 :

Angle d'oscillation..		2α	30°	45°	60°
Correction.........	séc $\frac{1}{2}\alpha$		1,0086	1,0196	1,0353
	pour 100		0,43	$0,98 \approx 1$	$1,76 < 2$

Au lieu d'observer le mouvement du pendule dans son plan vertical, on le regarde en général latéralement, de manière à examiner ses déplacements latéraux. Pour cela, projetons stéréographiquement le point P du point E qui est le plus élevé sur le cercle BAB′; nous examinons ainsi le mouvement de son ombre T projetée sur la tangente horizontale AT par un point lumineux placé en E : elle oscille entre F et F′. Considérons alors le mouvement du point R du cercle horizontal FRF′, qui accompagne T, de sorte que TR reste constamment perpendiculaire à AT (ce cercle horizontal est représenté sur la figure comme rabattu sur le plan vertical). On a

$$(9)\qquad \frac{\text{vit. de T}}{\text{vit. de R}} = \frac{\text{TR}}{\text{AR}},\qquad \frac{\text{vit. de P}}{\text{vit. de T}} = \frac{\text{EP}}{\text{ET}},$$

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}\left(\frac{\text{vit. de P}}{\text{vit. de R}}\right)^2 &= \frac{\text{TR}^2}{\text{AR}^2}\,\frac{\text{EP}^2}{\text{ET}^2}\\ &= \frac{\text{EF}^2-\text{ET}^2}{\text{AF}^2}\,\frac{\text{EP}^2}{\text{ET}^2}\\ &= \left(\frac{\text{EF}^2}{\text{ET}^2}-1\right)\frac{\text{EP}^2}{\text{AF}^2}\\ &= \left(\frac{\text{EP}^2}{\text{EB}^2}-1\right)\frac{\text{EP}^2}{\text{AF}^2}\\ &= \frac{\text{EP}^2-\text{EB}^2}{\text{AF}^2}\,\frac{\text{EP}^2}{\text{EB}^2}\\ &= \frac{\text{AE}.\text{ND}}{\text{AF}^2}\,\frac{\text{EF}^2}{\text{ET}^2};\end{aligned}\right.$$

on a, comme tout à l'heure,

$$(3)\qquad (\text{vit. de P})^2 = 2g.\text{ND},$$

de sorte que, en posant $\frac{g}{l} = n^2$,

$$(11)\qquad (\text{vit. de R})^2 = \frac{2g}{\text{AE}}\text{AF}^2\frac{\text{ET}^2}{\text{EF}^2} = n^2\text{AF}^2\frac{\text{séc}^2\frac{1}{2}\theta}{\text{séc}^2\frac{1}{2}\alpha};$$

par suite, la vitesse de R reste comprise entre un maximum nAF, et un minimum $n\text{AF}\cos\frac{1}{2}\alpha$, et la période de la rotation de R sur la circonférence 2πAF reste comprise entre les limites

$$(12)\qquad \frac{2\pi}{n} \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{n}\,\text{séc}\,\frac{1}{2}\alpha,$$

d'où

$$(13)\qquad \begin{cases} 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} < \text{période d'oscillation double} \\ \qquad < 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}\,\text{séc}\,\frac{1}{2}\alpha, \end{cases}$$

comme tout à l'heure.

Si R était l'extrémité d'un pendule conique attaché en O, sa période serait

$$(14)\qquad \frac{2\pi}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{OA}}{g}},$$

et le pendule conique de période $\frac{2\pi}{n}\,\text{séc}\,\frac{1}{2}\alpha$ aurait une longueur

$$(15)\qquad l\,\text{séc}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{2l}{1+\cos\alpha},$$

de sorte qu'il devrait être attaché au point O′ tel que

$$(16)\qquad \text{OO}' = l\,\text{tang}^2\frac{1}{2}\alpha.$$

Dans la méthode précédente, un mouvement oscillatoire a été remplacé par un mouvement continu sur un cercle, de sorte que sa vitesse varie dans un faible intervalle, et l'on en déduit une limite supérieure et inférieure de la périodicité.

Les fonctions elliptiques qui donnent les solutions exactes s'introduisent par les transformations précédentes.

En effet, dans le cercle AQD, on a, d'après (4),

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = n\cos\tfrac{1}{2}\theta = n\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AE}}} \\ \quad = n\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AE}}\,\dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AD}}} = n\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi} = n\,\Delta\varphi, \end{cases}$$

en posant

$$(18)\qquad \varkappa^2 = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AE}} = \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha,$$

de sorte que $\frac{1}{2}\alpha$ est l'angle modulaire; par suite

$$(19)\qquad nt+\varepsilon = \int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \mathrm{F}(\varphi,\varkappa),$$

dans la notation de Legendre, ou

$$(20)\qquad \varphi = \mathrm{am}(nt+\varepsilon,\varkappa),$$

dans la notation de Jacobi.

Dans la notation du Gudermann, en posant

$$nt+\varepsilon = u,$$

$$(21)\quad \begin{cases} \cos\tfrac{1}{2}\theta = \mathrm{dn}\,u, & \sin\tfrac{1}{2}\theta = \varkappa\,\mathrm{sn}\,u, \\ \mathrm{AP} \quad = \mathrm{AB}\,\mathrm{sn}\,u, & \mathrm{EP} \quad = \mathrm{AE}\,\mathrm{dn}\,u, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

La période T du pendule est donnée par

$$(22)\qquad n\mathrm{T} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 4\mathrm{K},\qquad \mathrm{T} = 4\mathrm{K}\sqrt{\frac{l}{g}};$$

de sorte que les limites (6) donnant

$$(23)\qquad \frac{\pi}{2} < \mathrm{K} < \frac{\pi}{2\varkappa'},$$

et, en prenant la moyenne géométrique des limites,

$$(24)\qquad K \approx \frac{\pi}{2\sqrt{\varkappa'}}.$$

Cette formule est exacte à moins de 1 pour 100 ou de 3 pour 100 des angles modulaires ($\frac{1}{2}\alpha$) égaux à 45° ou 60°.

Dans le cercle FRF′, en désignant par ψ l'angle EAR, on a, d'après (11)

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= n\frac{\mathrm{ET}}{\mathrm{EF}} = n\sqrt{1-\frac{\mathrm{TR}^2}{\mathrm{EF}^2}} \\ &= n\sqrt{1-\frac{\mathrm{AF}^2}{\mathrm{EF}^2}\sin^2\psi} = n\,\Delta\psi. \end{aligned}\right.$$

Par suite

$$(26)\qquad nt+\varepsilon' = \mathrm{F}(\psi,\varkappa), \qquad \psi = \mathrm{am}(nt+\varepsilon',\varkappa),$$

$$(27)\qquad \mathrm{AT} = \mathrm{AE}\tan\frac{\theta}{2} = \mathrm{AF}\cos\psi,$$

$$(28)\qquad \operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cn}\,v, \qquad v = nt+\varepsilon'.$$

Comme les arguments $u = nt+\varepsilon$ et $v = nt+\varepsilon'$ diffèrent de K, on peut employer les relations qui unissent les fonctions elliptiques dont la différence de phase est K :

$$(29)\qquad \mathrm{cn}\,v = \frac{k\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, \qquad \mathrm{sn}\,v = \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, \qquad \cdots\cdot$$

M. Appell a ainsi utilisé le mouvement du pendule pour mettre en évidence la double périodicité des fonctions elliptiques.

Supposons que la pesanteur soit tout à coup changée de sens quand P est en B (ce qui peut être réalisé dans un pendule matériel, par l'addition ou la suppression d'un poids puisque le pendule reste un instant en repos); P oscillera alors sur l'arc BEB' et donnera lieu à des fonctions elliptiques du module complémentaire $\varkappa'$, donné, d'accord avec (23), par

$$(30)\qquad \cot\frac{\theta}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cn}(v, k').$$

Mais un changement de signe de g dans (28) changera m en ni et v en vi, de sorte que, sur l'arc BEB',

$$(31)\qquad \mathrm{tang}\frac{\theta}{2} = \mathrm{tang}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cn}(vi, k);$$

donc

$$\mathrm{cn}(vi, k)\,\mathrm{cn}(v, k') = 1,$$

relation fondamentale pour le changement de l'argument réel en argument imaginaire du module complémentaire.

De cette manière la double périodicité apparaît en intégrant le long d'un cercle, au lieu de le faire sur le contour d'un parallélogramme de périodes.

[P6e]

SUR LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT DANS LE PLAN;

PAR M. ERNEST DUPORCQ.

Le but de cette Note n'est pas d'exposer des résultats originaux, mais de montrer comment la notion des transformations de contact mérite, par suite de sa portée et de sa simplicité, d'être introduite dans l'enseignement de la Géométrie analytique. Nous nous bornerons, pour simplifier, au cas du plan.

1. Soit, en coordonnées cartésiennes,

$$(1)\qquad f(x, y, \alpha, \beta) = 0$$

l'équation d'une courbe A dépendant de deux paramètres α, β. Ceux-ci peuvent être considérés comme les coordonnées d'un point a, de sorte qu'à tout point a du plan correspond ainsi une courbe A. Si a décrit une courbe (a), A aura une enveloppe (A), dont l'équation s'obtiendrait en éliminant α et β entre l'équation (1), l'équation

$$(2)\qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

de la courbe A, et enfin la relation

$$(3)\qquad \frac{f'_\alpha}{\varphi'_\alpha} = \frac{f'_\beta}{\varphi'_\beta}.$$

La courbe représentée par l'équation (3) coupe la courbe A aux points où celle-ci touche son enveloppe. Or cette équation (3) n'est pas modifiée si l'on remplace la courbe (a) par une autre la touchant au point a, car φ'_α et φ'_β varient alors proportionnellement. La courbe A continuera donc à toucher son enveloppe aux mêmes points; par suite, les diverses courbes (A), qui correspondent à des courbes (a) tangentes entre elles au point a, se toucheront entre elles aux points où elles touchent la courbe A.

En résumé, la transformation qui associe les courbes (A) aux courbes (a) conserve les contacts : c'est une *transformation de contact*. On la définit en faisant correspondre une courbe à tout point du plan, d'une manière quelconque.

2. On peut interpréter autrement les équations précédentes. Considérons x, y comme les coordonnées d'un point fixe b et α, β comme des coordonnées courantes : l'équation

$$f(x, y, \alpha, \beta) = 0 \tag{1}$$

représente alors une courbe B, et, en éliminant α, β entre les équations (1), (2) et (3), on exprime que B touche la courbe (a) définie par l'équation (2). La transformation de contact qui, à tout point b, associe la courbe B est la transformation *inverse* de la précédente, et la courbe (A) peut encore être définie comme le lieu des points b tels que les courbes B correspondantes touchent la courbe (a).

3. On peut encore définir une transformation de contact en partant de deux équations arbitraires

$$f(x, y, \alpha, \beta) = 0,$$
$$\varphi(x, y, \alpha, \beta) = 0,$$

dépendant chacune des deux paramètres α et β. Pour chaque couple de valeurs de α, β on a les équations de deux courbes A et B, correspondantes. On a bien ainsi une transformation de contact : considérons, en effet, α et β comme les coordonnées d'un point m, la transformation $[A, m]$, qui associe le point m à la courbe A, est une transformation de contact, d'après le précédent paragraphe; et il en est de même de la transformation $[m, B]$, en vertu du premier paragraphe. La transformation $[A, B]$ s'obtient donc comme le produit de deux transformations de contact : elle est donc visiblement aussi de contact. En résumé :

On peut définir une transformation de contact dans le plan, en associant deux à deux des courbes dépendant chacune de deux paramètres.

4. On peut généraliser encore. Considérons maintenant deux courbes, A_1 et A_2, définies par les équations

$$f_1(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0,$$
$$f_2(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

dépendant de trois paramètres : à chaque couple ainsi obtenu faisons correspondre une courbe B, dont l'équation

$$\varphi(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0$$

contient les mêmes paramètres.

Assujettissons maintenant les courbes A_1 et A_2 à toucher respectivement deux courbes fixes (A_1) et (A_2), ce qui revient à lier les paramètres α, β, γ par deux relations. Les courbes B auront une enveloppe (B).

Soient A_1^0, A_2^0, B^0 trois positions correspondantes des courbes A_1, A_2 et B. Nous allons voir que, si l'on remplace (A_1) et (A_2) par deux autres courbes touchant respectivement aux mêmes points les courbes A_1^0 et A_2^0, la courbe (B) sera remplacée par une autre qui touchera aussi B^0 aux mêmes points. Il suffit évidemment, pour cela, de voir qu'il en est bien ainsi si l'on modifie seulement la courbe (A_1) : or, dans ce cas, puisque A_2 doit toucher (A_2), les paramètres α, β, γ sont déjà liés par une relation fixe, de sorte que A_1 et B ne dépendent plus que de deux paramètres. On se trouve donc ramené au cas du paragraphe précédent.

5. Le raisonnement qui précède pourrait évidemment s'étendre au cas où l'on considérerait n courbes dépendant de n paramètres arbitraires. On verrait alors que :

Un ensemble de n courbes dépendant de n paramètres, si l'on assujettit $(n-1)$ d'entre elles à toucher des courbes fixes, la $n^{\text{ième}}$ touchera son enveloppe en des points qui ne dépendront que des points de contact des $(n-1)$ autres.

Rien n'empêche, évidemment, de supposer qu'un certain nombre des n courbes envisagées soient confondues : si, par exemple, p d'entre elles sont confondues en une seule courbe, il suffira d'assujettir celle-ci à toucher p courbes fixes. Remarquons d'ailleurs que certaines courbes peuvent être des cercles de rayon nul : on assujettit alors des points à décrire des courbes fixes.

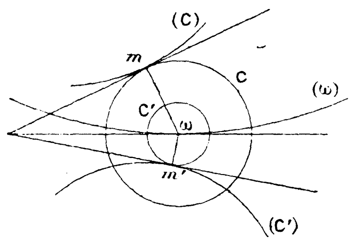
6. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la transformation du n° 1, à laquelle peut évidemment être ramenée toute transformation des contacts, conserve l'*ordre des contacts*. Il sera facile d'en déduire la généralisation de tous les résultats précédents, en tenant compte de l'ordre des contacts.

7. Nous terminerons par quelques applications : la première nous fournira, relativement aux anticaustiques par réfraction, des résultats bien connus, mais qui sont loin d'être aussi intuitifs que certains Ouvrages de Physique semblent l'admettre.

A cet effet, considérons, comme ensemble de trois courbes dépendant de trois paramètres, trois cercles concentriques, ω, C et C', le premier ayant un rayon nul, et les autres des rayons r et r' tels que

$$r' = \mathrm{K}r \qquad (\mathrm{K}\ \text{const.}).$$

Si le point ω décrit une courbe (ω) et si le cercle C a une enveloppe (C), le cercle C′ aura une enveloppe (C′); d'après ce que nous avons dit au n° 4, les points m' où C′ touchera cette enveloppe ne dépendront que de la tangente en ω à la courbe (ω) et de la tangente à (C) au point m où cette enveloppe touche C. Or, si l'on rem-



place (ω) et (C) par leurs tangentes en ω et en m, l'enveloppe de C′ est évidemment une droite passant par le point commun à ces tangentes. On obtient ainsi le point m', et l'on retombe sur la construction d'Huygens, qui se trouve ainsi établie, dans la théorie des ondulations, pour le cas général où la courbe dirimante et l'onde incidente ne sont pas des droites, cas auquel on se borne généralement pour démontrer la construction du rayon réfracté, que l'on étend ensuite, sans en montrer la raison, au cas général, comme si l'on admettait l'existence effective des rayons lumineux.

8. Comme seconde application considérons, plus généralement, n cercles concentriques, $C_1, C_2, \ldots, C_n$, dont les rayons $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont liés par une relation

$$f(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0.$$

L'ensemble de ces n cercles dépend de $n+1$ paramètres. En leur adjoignant leur centre commun ω (cercle de rayon nul), on a bien $n+1$ courbes dépendant de $n+1$ paramètres. Si les cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$ touchent des courbes données $(C_1), (C_2), \ldots, (C_n)$, le point ω décrit le lieu des points dont les distances normales à ces courbes sont liées par la relation donnée : la tangente à ce lieu ne sera pas modifiée si l'on remplace les courbes $(C_1), (C_2), \ldots$ par leurs tangentes aux points de contact. Soit

$$D_i = x\cos\varphi_i + y\sin\varphi_i - p_i = 0$$

l'équation d'une de ces tangentes ; le lieu de ω est alors

$$f(D_1, D_2, \ldots, D_n) = 0;$$

les paramètres directeurs de la normale en ω sont donc

$$\sum_1^n \cos\varphi_i f'_{D_i}$$

et

$$\sum_1^n \sin\varphi_i f'_{D_i}.$$

On voit ainsi que la direction de la normale est bien la résultante de vecteurs portés sur les n normales aux courbes (C_i), issues de ω, ces vecteurs étant respectivement proportionnels aux n dérivées partielles de la fonction $f(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Ce résultat est d'ailleurs bien connu.

On pourrait multiplier les applications de ce genre : nous espérons avoir fait suffisamment apparaître la fécondité de la méthode.

[K2c]

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE FEUERBACH;

PAR M. V. HIOUX.

En associant, au cercle inscrit dans un triangle ABC, un quelconque des trois cercles ex-inscrits, le théorème de Feuerbach peut être démontré comme il suit :

1° Soit S le point de rencontre de la bissectrice intérieure de l'angle A et du côté BC; si du point S on mène la seconde tangente au cercle inscrit, elle sera parallèle à la tangente AT en A au cercle circonscrit.

En effet, dans l'angle ATB, à cause de

$$\mathrm{TB} \times \mathrm{TC} = \overline{\mathrm{TA}}^2,$$

les droites AB et AC sont antiparallèles, d'où résulte l'égalité des angles TAS et AST, puisque chacun d'eux est égal à $\left(\mathrm{B} + \frac{\mathrm{A}}{2}\right)$.

Soit ST′ la seconde tangente au cercle O menée de S : elle est symétrique de la première ST par rapport à SA et l'on a

$$\widehat{\mathrm{T'SA}} = \widehat{\mathrm{TAS}}.$$

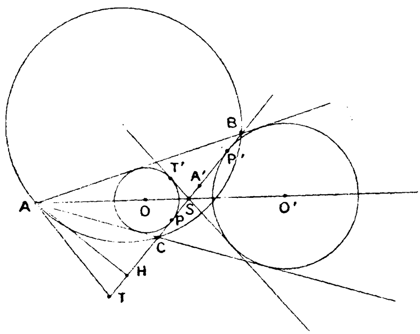
Les deux droites AT et ST′ font donc avec AS des angles alternes-internes égaux et sont donc parallèles.

2° Au cercle inscrit O associons le cercle O′, ex-inscrit dans l'angle A, et menons la perpendiculaire AH à BC.

Sur la droite AS les centres O et O′ et les centres de similitude A et S des cercles O et O′ forment une division harmonique; il en est par suite de même de leurs projections sur le côté BC. Ainsi P′, P, S et H forment une division harmonique. On voit que le milieu A′ de BC est aussi le milieu du segment PP′ et l'on a donc la relation

$$A'S \times A'H = \overline{A'P}^2.$$

Le cercle des neuf points du triangle ABC passe par A′ et par H. Si, par conséquent, en prenant A′ pour origine et $\overline{A'P}^2$ pour puissance d'inversion, on forme la figure inverse des cercles O et O′ et du cercle des



neuf points, les deux premiers se transforment en eux-mêmes, puisque A′P est tangente au premier et

$$A'P' = A'P,$$

tangente au second. Quant au cercle des neuf points, il a pour inverse une droite passant par S; cette droite est parallèle à la tangente en A′ à ce cercle. Mais cette tangente est parallèle à AT, puisque A et A′ sont les sommets homologues de deux triangles homothétiques.

La droite en question coïncide par conséquent avec la seconde tangente commune T′S aux cercles O et O′.

Donc le cercle des neuf points est tangent à chacun des cercles O et O′.

Les points de contact se déterminent facilement.

[I3a]

SUR LES CONGRUENCES IDENTIQUES;

PAR M. MICHAEL BAUER, à Budapest.

D'après les éléments de la théorie des nombres, on sait que les nombres relatifs premiers avec n forment les racines de la congruence

$$(1) \qquad x^{\varphi(n)} - 1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, n).$$

Si l'on désigne ces racines par les lettres

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_{\varphi(n)} \qquad (\mathrm{mod}\, n),$$

il est évident que ces nombres forment aussi les racines de la congruence

$$(2) \qquad \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, n).$$

Ainsi les congruences (1) et (2) ont les mêmes racines et le même degré. Enfin on sait que, si n est un nombre premier, on a

$$x^{p-1} - 1 \equiv \prod_{i=1}^{p-1} (x - r_i) \qquad (\mathrm{mod}\, p).$$

On peut se demander *pour quels modules on a la* *congruence identique*

$$x^{\varphi(n)} - 1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \qquad (\operatorname{mod} n).$$

Cette question a été traitée par M. Gruber (1). Dans la présente Note, je donne une forme *explicite* de l'expression

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \qquad (\operatorname{mod} n)$$

et j'en tire quelques conséquences. Mes résultats sont les suivants :

Si p est un nombre premier impair et

$$n = p^\pi m \qquad (m, p = 1),$$

on a la congruence identique

$$\text{(I)} \qquad \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \equiv (x^{p-1} - 1)^{\frac{\varphi(n)}{p-1}} \qquad (\operatorname{mod} p^\pi).$$

Si $\beta > 1$ et

$$n = 2^\beta m, \qquad m \equiv 1 \qquad (\operatorname{mod} 2),$$

on a la congruence identique

$$(\mathrm{II}_a) \qquad \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \equiv (x^2 - 1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \qquad (\operatorname{mod} 2^\beta).$$

Cette dernière congruence peut être complétée par la suivante, qui est vraie pour tout module pair et dont la

---

(1) *Math. und naturwiss. Berichte aus Ungarn,* Bd XIII, p. 413-417.

vérité est évidente :

$$(\mathrm{II}_b) \qquad \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \equiv (x-1)^{\varphi(n)} \pmod 2$$

J'emploirai ces identités pour résoudre la question suivante :

d étant un diviseur de n, pour quelles valeurs de d et de n a-t-on la congruence identique

$$x^{\varphi(n)} - 1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \pmod d ?$$

La Table suivante donne la réponse ; dans cette Table p désigne un nombre premier impair, q un nombre premier de la forme $2^k + 1$:

d	n
p	p^α, $2p^\alpha$,
2	2^α, $2^\alpha \prod_s q_s$ (les facteurs q_s sont différents),
4	4,
$2q$	$2q$.

I.

1° Soient

$$t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_{(\varphi n)},$$

les nombres relatifs premiers avec n, qui sont $< n$, et introduisons l'expression

$$\mathrm{F}_n(x) = \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - t_i).$$

D'abord il est évident qu'on a

$$
(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&F_n(x) \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \qquad (\mathrm{mod}\, n),\\
&F_p(x) = x^{p-1} - 1 + p\,\Phi(x),\\
&F_2(x) = x - 1,\\
&F_4(x) = (x-1)(x-3), \qquad F_4(x) \equiv x^2 - 1 \qquad (\mathrm{mod}\, 4),\\
&F_n(x) \equiv (x-1)^{\varphi(n)} \qquad (\mathrm{mod}\, 2), \qquad\quad n \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, 2).
\end{aligned}\right.
$$

2° Nous démontrerons que

$$
(4)\qquad F_{p^\alpha}(x) \equiv (x^{p-1} - 1)^{p^{\alpha-1}} \qquad (\mathrm{mod}\, p^\alpha).
$$

Avant tout nous prouverons l'identité

$$
(5)\qquad F_{p^{\beta+1}}(x) \equiv [F_{p^\beta}(x)]^p \qquad (\mathrm{mod}\, p^\beta).
$$

Soient les nombres relatifs premiers avec p^β et $< p^\beta$

$$
\tau_1, \quad \tau_2, \quad \ldots, \quad \tau_{\varphi(p^\beta)},
$$

alors on a

$$
F_{p^{\beta+1}}(x) = \prod_{m=0}^{p=1} (x - \tau_1 - mp^\beta)(x - \tau_2 - mp^\beta)\ldots(x - \tau_{\varphi(p^\beta)} - mp^\beta).
$$

Cependant

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{\varphi(p^\beta)} (x - \tau_i - mp^\beta) &\equiv F_{p^\beta}(x) - mp^\beta \sum_i \frac{F_{p^\beta}(x)}{x - \tau_i}\\
&\equiv F_{p^\beta}(x) - mp^\beta\, G(x) \qquad (\mathrm{mod}\, p^{\beta+1}),
\end{aligned}
$$

et ainsi

$$
\begin{aligned}
F_{p^{\beta+1}}(x) &\equiv \prod_{m=0}^{p-1} [F_{p^\beta}(x) - mp^\beta\, G(x)]\\
&\equiv [F_{p^\beta}(x)]^p - p^\beta\, G(x)\, [F_{p^\beta}(x)]^{p-1} \sum_{m=0}^{p-1} m\\
&\qquad (\mathrm{mod}\, p^{\beta+1}),
\end{aligned}
$$

d'où vient, puisque

$$\sum_{m=0}^{p-1} m = \frac{p(p-1)}{2}$$

que

$$(5) \qquad F_{p^{\beta+1}}(x) \equiv [F_{p^\beta}(x)]^p \qquad (\bmod p^{\beta+1}).$$

Cette identité donne d'abord

$$Fp^2(x) \equiv [F_p(x)]^p \equiv [(x^{p-1}-1)+p\,\Phi(x)]^p \equiv (x^{p-1}-1)^p \quad (\bmod p^2).$$

Supposons maintenant qu'on ait

$$F_{p^{\alpha-1}}(x) \equiv (x^{p-1}-1)^{p^{\alpha-2}} \qquad (\bmod p^{\alpha-1}),$$

c'est-à-dire

$$F_{p^{\alpha-1}}(x) = (x^{p-1}-1)^{p^{\alpha-2}} + p^{\alpha-1}\,\Phi_{\alpha-1}(x).$$

Alors on a, d'après (5)

$$F_{p^\alpha}(x) \equiv [F_{p^{\alpha-1}}(x)]^p \qquad (\bmod p^\alpha),$$

et ainsi

$$(4) \qquad F_{p^\alpha}(x) \equiv (x^{p-1}-1)^{p^{\alpha-1}} \qquad (\bmod p^\alpha). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

3° Si $\beta > 1$, on a

$$(6) \qquad F_{2^\beta}(x) \equiv (x^2-1)^{2^{\beta-2}} \qquad (\bmod 2^\beta).$$

Les nombres relatifs premiers avec $2^{\beta+1}$ sont

$$\begin{matrix} 1, & 3, & 5, & \ldots, & (2^\beta-1) \\ -1, & -3, & -5, & \ldots, & -(2^\beta-1) \end{matrix} \qquad (\bmod 2^{\beta+1}).$$

De cette remarque suit immédiatement la congruence

$$(7) \qquad F_{2^{\beta+1}}(x) \equiv F_{2^\beta}(x)\,F_{2^\beta}(-x) \qquad (\bmod 2^{\beta+1}).$$

Cependant

$$F_4(x) \equiv (x^2-1) \qquad (\bmod 4)$$

et ainsi

$$F_{2^3}(x) \equiv [x^2 - 1 + 4\,\Psi(x)]\,[x^2 - 1 + 4\,\Psi(-x)] \equiv (x^2 - 1)^2 \pmod{2^3},$$

Il est évident que de cette manière on a généralement

$$(6) \qquad F_{2^\beta}(x) \equiv (x^2 - 1)^{2^{\beta-2}} \pmod{2^\beta}.$$

4° Si d est un diviseur du nombre n, on a

$$(8) \qquad F_n(x) \equiv [F_d(x)]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}} \pmod{d}.$$

Pour la démonstration, il suffit de remarquer que les nombres relatifs premiers avec n se trouvent dans les suites

$$dz + v_i,$$

où

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_{\varphi(d)}$$

désignent les nombres relatifs premiers avec d, qui sont $< d$. Chaque suite contient $\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}$ nombres (n), qui sont relatifs premiers avec n. L'identité (8) donne, avec les précédentes, les formules (I), (II_a), (II_b).

II.

1° Soit d un diviseur de n ; *quand a-t-on la congruence identique*

$$(a) \qquad x^{\varphi(n)} - 1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \pmod{d}?$$

Si la congruence (a) est vraie pour un module d, elle est aussi vraie pour chaque diviseur de d.

Examinons donc la congruence identique

$$(b) \qquad x^{\varphi(n)} - 1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \pmod{p}.$$

Cette congruence est équivalente d'après (I) à la congruence

$$(b') \qquad (x^{p-1} - 1)^{\frac{\varphi(n)}{p-1}} \equiv x^{\varphi(n)} - 1 \qquad (\mathrm{mod}\, p)$$

et ainsi, il faut qu'on ait

$$(-1)^{\frac{\varphi(n)}{p-1}} \equiv -1 \qquad (\mathrm{mod}\, p),$$

d'où résulte

$$n = \begin{cases} p^{\alpha}, \\ 2p^{\alpha}. \end{cases}$$

D'autre part, si n prend ces valeurs, il est évident qu'on a la congruence (b).

2° On n'a jamais la congruence identique

$$(c) \qquad x^{\varphi(n)} - 1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \qquad (\mathrm{mod}\, p^2).$$

Les valeurs de n, que nous avons trouvées possibles, sont $n = \begin{cases} p^{\alpha} \\ 2p^{\alpha} \end{cases}$; on a dans ces cas

$$(d) \qquad \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \equiv (x^{p-1} - 1)^{p^{\alpha-1}} \qquad (\mathrm{mod}\, p^{\alpha}).$$

Or $\alpha < 1$ et ainsi

$$(x^{p-1} - 1)^{p^{\alpha-2}} = x^{p^{\alpha-2}(p-1)} - 1 + p\, f(x),$$

d'où vient

$$(x^{p-1} - 1)^{p^{\alpha-1}} \equiv (x^{p^{\alpha-2}(p-1)} - 1)^{p} \qquad (\mathrm{mod}\, p^2).$$

Donc $\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i)$ n'est pas congru avec l'expression

$$x^{p^{\alpha-1}(p-1)} - 1 \qquad (\mathrm{mod}\, p^2).$$

3° Examinons la congruence identique

$$(e) \qquad x^{\varphi(n)} - 1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \equiv (x-1)^{\varphi(n)} \qquad (\text{mod}\, 2).$$

Soit

$$\varphi(n) = 2^h l, \qquad l \equiv 1 \qquad (\text{mod}\, 2).$$

Nous verrons que la congruence (e) n'est vraie que dans le cas où $l = 1$. D'une induction totale suit d'abord

$$(x-1)^{2^h} \equiv (x^{2^h} - 1) \qquad (\text{mod}\, 2),$$

et si l'on pose

$$x^{2^h} = y,$$

la congruence (e) est équivalente à celle-ci :

$$(y-1)^l \equiv y^l - 1 \qquad (\text{mod}\, 2), \qquad l \equiv 1 \qquad (\text{mod}\, 2),$$

qui est seulement vraie dans le cas où $l = 1$. Ainsi nous avons $\varphi(n) = 2^h$, d'où résulte

$$n = \begin{cases} 2^\alpha, \\ 2^\alpha \prod_s q_s \qquad (\text{les facteurs } q_s \text{ sont différents}). \end{cases}$$

4° La congruence identique

$$(f) \qquad x^{\varphi(n)} - 1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \qquad (\text{mod}\, 4)$$

est seulement vraie dans le cas où $n = 4$. Les valeurs n, que nous avons trouvées possibles, peuvent être classées de la manière suivante :

$$n = \begin{cases} 4, \\ 2^\beta & (\beta > 2), \\ 2^\beta \prod_s q_s & (\beta \geqq 2). \end{cases}$$

On a dans le premier cas

$$x^2 - 1 \equiv (x-1)(x-3) \qquad (\bmod 4).$$

On a dans les autres cas

$$\varphi(n) = 2^h \qquad (h > 1),$$

en conséquence

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \equiv (x^2 - 1)^{2^{h-1}} \qquad [(\bmod 4),\ h - 1 > 0].$$

Or

$$(x^2 - 1)^{2^{h-2}} = x^{2^{h-1}} - 1 + 2\, g(x),$$

et ainsi

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \equiv (x^{2^{h-1}} - 1)^2 \qquad (\bmod 4).$$

Donc $\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i)$ n'est pas congru avec l'expression

$$x^{2^h} - 1 \qquad (\bmod 4).$$

5° Il reste encore à discuter le cas $d = 2p$. On voit d'après les précédents que la congruence identique

$$x^{\varphi(n)} - 1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r_i) \qquad (\bmod 2p)$$

ne peut être vraie que pour

$$p = q, \qquad n = 2q,$$

et que, dans ce cas, on a véritablement

$$x^{\varphi(2q)} - 1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(2q)} (x - r_i) \qquad (\bmod 2q).$$

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1901). SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

1. L'équation générale des paraboloïdes P (1) qui sont elliptiques, puisque la section par le plan zOx est une ellipse, est de la forme

$$A''z^2 + (\alpha x + \beta y)^2 + 2Cx = 0.$$

La section par le plan zOx doit être l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - \frac{2x}{a} = 0 \qquad \text{ou} \qquad b^2x^2 + a^2z^2 - 2ab^2x = 0.$$

Cette section étant la conique représentée par l'équation

$$\alpha^2x^2 + A''z^2 + 2Cx = 0,$$

on aura

$$\frac{\alpha^2}{b^2} = \frac{A''}{a^2} = \frac{C}{-ab^2},$$

d'où

$$\alpha^2 = \frac{-C}{a}, \qquad A'' = \frac{-Ca}{b^2},$$

et l'équation des paraboloïdes P s'écrit

$$-\frac{Ca}{b^2}z^2 - \frac{C}{a}\left(x + \frac{\beta}{\alpha}y\right)^2 + 2Cx = 0$$

ou, en supprimant le facteur C et posant $\frac{\beta}{\alpha} = m$,

$$(1) \qquad a^2z^2 + b^2(x + my)^2 - 2ab^2x = 0.$$

L'équation tangentielle des paraboloïdes P se déduit

(1) *Voir* l'énoncé dans le Tome précédent, p. 516.

de l'équation ponctuelle en développant un déterminant connu, ou encore, ce qui est aussi simple ici, en éliminant x, y, z entre les équations

$$\frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{w} = \frac{f'_t}{1}, \qquad ux + vy + wz + 1 = 0.$$

On a

$$\frac{b^2(x+my) - ab^2}{u}$$
$$= \frac{b^2 m(x+my)}{v} = \frac{a^2 z}{w} = \frac{-ab^2 x}{1} = \frac{-ab^2 m}{mu - v},$$

d'où

$$x = \frac{m}{mu - v}, \qquad z = \frac{-b^2 mw}{a(mu - v)},$$
$$x + my = \frac{-av}{mu - v}, \qquad y = \frac{-(av + m)}{m(mu - v)}.$$

L'équation tangentielle est donc

$$mu - \frac{v}{m}(av + m) - \frac{b^2}{a} mw^2 + mu - v = 0$$

ou

$$(1)' \qquad a^2 v^2 + b^2 m^2 w^2 - 2am^2 u + 2amv = 0.$$

2. Les focales demandées sont les coniques du faisceau

$$a^2 v^2 + b^2 m^2 w^2 - 2am^2 ur + 2amvr + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

ou

$$\lambda u^2 + (a^2 + \lambda) v^2 + (b^2 m^2 + \lambda) w^2 - 2am^2 ur + 2amvr = 0.$$

L'équation en λ, qui les donne, s'obtient en égalant à zéro le discriminant de cette équation homogène en u, v, w, r.

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & -am^2 \\ 0 & a^2 + \lambda & 0 & am \\ 0 & 0 & b^2 m^2 + \lambda & 0 \\ -am^2 & am & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$-\lambda a^2 m^2 (b^2 m^2 + \lambda) - a^2 m^4 (a^2 + \lambda)(b^2 m^2 + \lambda) = 0,$$

d'où

$$b^2 m^2 + \lambda = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = -b^2 m^2$$

et

$$m^2 (a^2 + \lambda) + \lambda = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = -\frac{a^2 m^2}{1 + m^2}.$$

Par suite, les équations tangentielles des focales sont :

$$-b^2 m^2 u^2 + (a^2 - b^2 m^2) v^2 - 2am^2 ur + 2amvr = 0$$

ou

$$(\mathrm{F}) \quad b^2 m^2 u^2 + (b^2 m^2 - a^2) v^2 + 2am^2 ur - 2amvr = 0$$

et

$$\begin{aligned} -a^2 m^2 u^2 + a^2 v^2 + [b^2 m^2 (1 + m^2) - a^2 m^2]\, w^2 \\ - 2am^2 (1 + m^2) ur + 2am (1 + m^2) vr = 0 \end{aligned}$$

ou

$$(\Phi) \quad \left\{ \begin{aligned} & a^2 m^2 u^2 - a^2 v^2 + (a^2 - b^2 - b^2 m^2) m^2 w^2 \\ & \qquad + 2am^2 (1 + m^2) ur - 2am (1 + m^2) vr = 0. \end{aligned} \right.$$

La parabole F est située dans le plan des xOy ; c'est l'enveloppe du plan

$$ux + vy + rt = 0.$$

La parabole Φ, qui a même axe que F, est située dans un plan perpendiculaire à xOy ; on trouve les coordonnées de ce plan en résolvant les équations

$$\frac{1}{2}\Phi'_u = 0, \qquad \frac{1}{2}\Phi'_v = 0, \qquad \frac{1}{2}\Phi'_w = 0, \qquad \frac{1}{2}\Phi'_r = 0 ;$$

mais il est plus simple de remarquer que l'axe commun des paraboles F et Φ est aussi l'axe de la parabole

$$(x + my)^2 - 2ax = 0,$$

section du paraboloïde P par le plan xOy.

Les cordes perpendiculaires à l'axe de cette parabole ayant pour coefficient angulaire m, l'axe a pour équation

$$x + my - a + m(x + my)m = 0$$

ou

$$(1 + m^2)(x + my) - a = 0;$$

c'est aussi l'équation du plan de la focale Φ.

Les équations tangentielles du cône ayant pour sommet l'origine des coordonnées et pour directrice Φ sont :

$$r = 0,$$

$$a^2 m^2 u^2 - a^2 v^2 + (c^2 - b^2 m^2) m^2 w^2 = 0.$$

L'équation ponctuelle de ce cône est

$$\frac{x^2}{a^2 m^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{m^2(c^2 - b^2 m^2)} = 0$$

ou

$$(c^2 - b^2 m^2)(x^2 - m^2 y^2) + a^2 z^2 = 0.$$

On peut dire que les équations ponctuelles de la focale Φ sont :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{c} (1 + m^2)(x + my) - a = 0, \\ (c^2 - b^2 m^2)(x^2 - m^2 y^2) + a^2 z^2 = 0. \end{array} \right.$$

3. L'équation tangentielle de F s'écrit

$$(\mathrm{F}) \qquad (b^2 u^2 + b^2 v^2 + 2aur) m^2 - 2avrm - a^2 v^2 = 0.$$

Son enveloppe, quand m varie, a pour équation tangentielle

$$a^2 v^2 r^2 + a^2 v^2 (b^2 u^2 + b^2 v^2 + 2aur) = 0$$

ou

$$(3) \qquad b^2(u^2 + v^2) + r(2au + r) = 0,$$

c'est-à-dire une conique ayant pour foyers les extrémités du grand axe de l'ellipse donnée. Pour trouver les sommets de cette conique située sur Ox, faisons $v = 0$ dans l'équation précédente, ce qui donne

$$b^2 u^2 + 2aur + r^2 = 0.$$

En remplaçant u par $-\frac{1}{x}$ et r par 1, on a l'équation

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0$$

définissant les abscisses des sommets, savoir $x = a \pm c$, foyers de l'ellipse donnée E. Ainsi l'enveloppe de la focale F se compose déjà de l'hyperbole H, focale de l'ellipse E. Il faut observer, en outre, que l'équation de F est satisfaite, quel que soit m, si l'on a

$$v = 0,$$

$$b^2 u^2 + b^2 v^2 + 2aur = 0$$

ou

$$v = 0,$$

$$u(b^2 u + 2ar) = 0,$$

et par suite

$$v = 0, \qquad u = 0, \qquad r \neq 0,$$

$$v = 0, \qquad u = -\frac{2a}{b^2}, \qquad r = 1,$$

ce qui montre que la parabole F est tangente à la droite de l'infini, résultat bien connu, et à la droite Δ du plan xOy, représentée par l'équation

$$x = \frac{b^2}{2a}.$$

Le pôle de Oy, par rapport à H, est un point O_1 de Ox ayant pour abscisse $\frac{b^2}{a}$; la droite Δ est donc la perpendiculaire au milieu de OO_1.

En retranchant membre à membre les équations (F) et (3) multipliée par m^2, on obtient

$$(mr + av)^2 = 0.$$

ce qui prouve que F et H sont bitangentes, le pôle P_1 de la corde des contacts ayant pour équation

$$av + mr = 0.$$

Quand m varie, le point P_1 décrit Oy; par suite la corde des contacts passe par un point fixe O_1, pôle de Oy par rapport à H; mais le pôle de Oy par rapport à une parabole F est aussi O_1; la parallèle à Oy menée par le milieu de OO_1 est une droite fixe tangente à F; on retrouve ainsi la droite Δ. (Cette remarque géométrique m'a été communiquée, sous une autre forme, par M. E. Duporcq.)

Ainsi, en faisant abstraction de la droite de l'infini, l'enveloppe de la focale F se compose de l'hyperbole H, focale de E, et de la droite Δ.

4. L'axe de Φ a pour équation, d'après ce qui précède,

$$(1 + m^2)(x + my) - a = 0.$$

Ses coordonnées sont :

$$u = \frac{1 + m^2}{-a}, \qquad v = \frac{m(1 + m^2)}{-a}.$$

En éliminant m entre ces équations, on obtient l'équation tangentielle de l'enveloppe de l'axe de Φ

$$1 + \frac{v^2}{u^2} + au = 0$$

ou

$$au^3 + u^2 + v^2 = 0.$$

On reconnaît l'équation tangentielle d'une hypocycloïde à trois rebroussements ayant pour axe Ox.

En coordonnées ponctuelles, l'hypocycloïde est définie par les équations

$$x + my - \frac{a}{1+m^2} = 0,$$

$$y + \frac{2am}{(1+m^2)^2} = 0,$$

ou

$$x = \frac{a}{1+m^2} + \frac{2am^2}{(1+m^2)^2} = \frac{a(1+3m^2)}{(1+m^2)^2},$$

$$y = \frac{-2am}{(1+m^2)^2},$$

formules qui représentent une courbe unicursale du quatrième ordre.

On trouve aisément, en dérivant,

$$x'_m = \frac{2am(1-3m^2)}{(1+m^2)^3},$$

$$y'_m = \frac{-2a(1-3m^2)}{(1+m^2)^3},$$

$$y'_x = \frac{y'_m}{x'_m} = -\frac{1}{m}.$$

Il suffit de faire croître m de 0 à $+\infty$ pour obtenir la moitié de la courbe qui admet Ox pour axe de symétrie. Les points de rebroussement sont donnés par les trois valeurs de m qui rendent indéterminées les valeurs de x'_m et y'_m, savoir $m = \infty$ et $m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Pour $m = \infty$,

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad y'_x = 0, \qquad \text{point O,}$$

pour $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

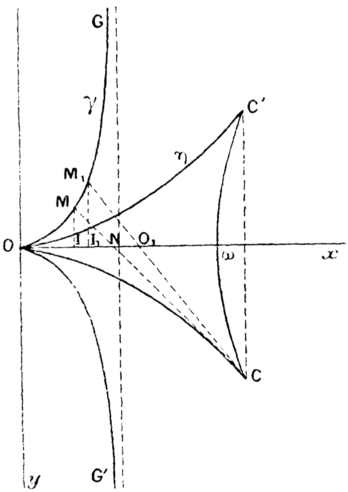
$$x = \frac{9a}{8}, \qquad y = -\frac{9a}{8\sqrt{3}}, \qquad y'_x = -\sqrt{3}, \qquad \text{point C}',$$

pour $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$x = \frac{9a}{8}, \qquad y = \frac{9a}{8\sqrt{3}}, \qquad y'_x = \sqrt{3}, \qquad \text{point C.}$$

Quand m croît de o à $\frac{1}{\sqrt{3}}$, x croît de a à $\frac{9a}{8}$ et y décroît de o à $-\frac{9a}{8\sqrt{3}}$; m croissant de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ à $+\infty$, x décroît de $\frac{9a}{8}$ à o, et y croît de $-\frac{9a}{8\sqrt{3}}$ à O. Ainsi m croissant de o à $+\infty$, on a la moitié de la courbe ωC′O; par symétrie, on a l'autre moitié ωCO (*fig.* 1).

Fig. 1.



Un plan perpendiculaire à l'axe de Φ a une équation de la forme

$$mx - y + r = 0.$$

Il sera tangent au sommet de Φ si ses coordonnées homogènes m, -1, o, r satisfont à l'équation (Φ), ce qui donne

$$a^2 m^4 - a^2 + 2am(1+m^2)^2 r = 0$$

ou

$$r = \frac{a(1-m^2)}{2m(1+m^2)},$$

de sorte que le sommet de Φ est défini par les équations

$$x + my - \frac{a}{1+m^2} = 0,$$

$$mx - y + \frac{a(1-m^2)}{2m(1+m^2)} = 0.$$

En les résolvant par rapport à x et y, on obtient

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a}{2(1+m^2)}, \\ y = \dfrac{a}{2m(1+m^2)}. \end{cases}$$

Ces équations représentent une cubique unicursale, d'axe Ox, ayant un point de rebroussement à l'origine et une asymptote $x - \frac{a}{2} = 0$ correspondant à la valeur O du paramètre m. Cette cubique est une cissoïde (*fig.* 1) dont le cercle directeur a pour diamètre $\frac{a}{2}$; son équation ponctuelle est

$$2x - \frac{a}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2x(x^2+y^2) - ay^2 = 0$$

ou

$$y = \pm x \sqrt{\frac{2x}{a - 2x}}.$$

5. Les paraboles F et Φ, focales l'une de l'autre, sont telles que le sommet de l'une coïncide avec le foyer de l'autre, et inversement; par suite, le demi-paramètre de la focale Φ est égal à la distance des sommets de F

et Φ. D'après ce qui précède, le plan tangent au sommet de Φ et perpendiculaire à son axe a pour équation

$$mx - y + \frac{a(1 - m^2)}{2m(1 + m^2)} = 0.$$

De même, à l'aide de l'équation (F), on obtient

$$mx - y + \frac{a^2 - b^2 m^2 (1 + m^2)}{2am(1 + m^2)} = 0,$$

pour l'équation du plan tangent au sommet de F et perpendiculaire à l'axe commun de F et Φ. La distance de ces deux plans représente, en valeur absolue, le demi-paramètre $\frac{p}{2}$ de la parabole Φ; donc

$$\left|\frac{p}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}\left[\frac{a^2 - b^2 m^2 (1 + m^2)}{2am(1 + m^2)} - \frac{a(1 - m^2)}{2m(1 + m^2)}\right],$$

$$\left|\frac{p}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}\left[\frac{a^2 m^2 - b^2 m^2 (1 + m^2)}{2am(1 + m^2)}\right].$$

D'où, en élevant au carré,

$$p^2 = \frac{[a^2 - b^2(1 + m^2)]^2 m^2}{a^2(1 + m^2)^3}.$$

Le coefficient angulaire λ de l'axe de la parabole Φ est $-\frac{1}{m}$; alors $m = -\frac{1}{\lambda}$, et l'expression de p^2 s'écrit

$$p^2 = \frac{[a^2\lambda^2 - b^2(1 + \lambda^2)]^2}{a^2(1 + \lambda^2)^3}$$

ou

$$p^2 = \frac{a^2}{1 + \lambda^2}\left(\frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} - \frac{b^2}{a^2}\right)^2 \tag{5}$$

ou, en posant

$$\lambda = \operatorname{tang} \omega,$$

$$p^2 = a^2 \cos^2 \omega \left(\sin^2 \omega - \frac{b^2}{a^2}\right)^2 = a^2 \cos^2 \omega \left(\frac{c^2}{a^2} - \cos^2 \omega\right)^2;$$

par suite

$$|p| = a\cos\omega\left(\frac{c^2}{a^2} - \cos^2\omega\right).$$

La dérivée de p, par rapport à ω, est, en valeur absolue,

$$|p'_\omega| = -a\sin\omega\left(\frac{c^2}{a^2} - \cos^2\omega\right) + 2a\cos^2\omega\sin\omega,$$

$$|p'_\omega| = \quad a\sin\omega\left(3\cos^2\omega - \frac{c^2}{a^2}\right).$$

Adoptons la formule

$$p = a\cos\omega\left(\frac{c^2}{a^2} - \cos^2\omega\right)$$

et faisons croître ω de o à $\frac{\pi}{2}$. La dérivée s'annule en changeant de signe pour $\omega = 0$ et $\cos\omega = \frac{c}{a\sqrt{3}}$ ou $\omega = \beta$. Pour $\omega = 0$ on a le minimum

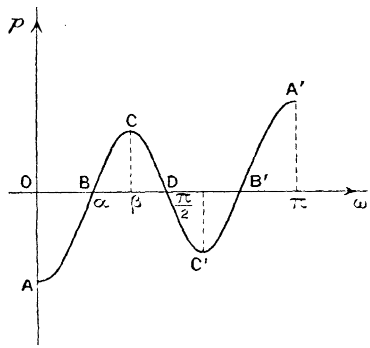
$$p = -\frac{b^2}{a},$$

pour $\omega = \beta$ on a le maximum

$$p = \frac{c}{\sqrt{3}}\left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2}{3a^2}\right) = \frac{2c^3}{3a^2\sqrt{3}}.$$

La valeur de p est nulle pour $\omega = \frac{\pi}{2}$ et pour $\cos\omega = \frac{c}{a}$ ou $\omega = \alpha$ avec $\alpha < \beta$. D'où la courbe représentant les variations de p quand ω croît de o à $\frac{\pi}{2}$. On remarque ensuite que, pour les valeurs supplémentaires de ω égales à $\frac{\pi}{2} - \omega_1$ et $\frac{\pi}{2} + \omega_1$, p prend des valeurs égales et de signes contraires. D'où la courbe DC'B'A' symétrique de ABCD par rapport au point D, représentant les variations de p quand ω croît de $\frac{\pi}{2}$ à π (*fig.* 2).

Fig. 2.



D'ailleurs il suffit de faire varier ω de o à π pour obtenir toutes les valeurs du coefficient angulaire λ et, par suite, de p.

6. La surface Σ engendrée par la focale Φ est définie par les équations (2) de cette focale dans lesquelles on regardera m comme variable, c'est-à-dire par les équations

$$(\Sigma)\qquad \left\{\begin{aligned} &x + my - \frac{a}{1+m^2} = 0, \\ &(c^2 - b^2 m^2)(x^2 - m^2 y^2) + a^2 z^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

qu'on peut écrire

$$x + my = \frac{a}{1+m^2},$$

$$x - my = \frac{-a(1+m^2)z^2}{c^2 - b^2 m^2}.$$

En résolvant ces équations par rapport à x et y, on obtient

$$(6)\quad \begin{cases} x = \dfrac{a[c^2 - b^2m^2 - (1+m^2)^2z^2]}{2(1+m^2)(c^2-b^2m^2)}, \\ y = \dfrac{a[c^2 - b^2m^2 + (1+m^2)^2z^2]}{2m(1+m^2)(c^2-b^2m^2)}. \end{cases}$$

On voit que Σ est une surface unicursale admettant pour plan de symétrie xOy et zOx. La relation entre m et z définissant la section de Σ par le plan zOx s'obtient en faisant $y = 0$ dans les équations (6) [ou (Σ)]. Cette relation se décompose en

$$m = \infty \qquad \text{et} \qquad c^2 - b^2m^2 + (1+m^2)^2z^2 = 0.$$

De la première on déduit, en faisant $m = \infty$ dans l'expression de x,

$$x = \frac{-az^2}{-2b^2}$$

ou

$$(\Phi_1)\qquad z^2 - \frac{2b^2}{a}x = 0;$$

c'est l'équation de la focale Φ située dans le plan zOx; ce résultat pouvait se trouver directement en remarquant que l'on connaît les coordonnées du sommet de Φ et l'expression de son paramètre en fonction de m; en y faisant $m = \infty$ on obtient pour sommet l'origine O et pour paramètre $\frac{b^2}{a}$, c'est-à-dire la parabole $z^2 - \frac{2b^2}{a}x = 0$ du plan zOx. On obtient le reste de la section par le plan zOx en éliminant m entre les équations

$$c^2 - b^2m^2 + (1+m^2)^2z^2 = 0,$$

$$x = \frac{a[c^2 - b^2m^2 - (1+m^2)^2z^2]}{2(1+m^2)(c^2-b^2m^2)},$$

d'où

$$x = \frac{a}{1+m^2}, \qquad m^2 = \frac{a}{x} - 1,$$

$$c^2 - b^2\left(\frac{a}{x} - 1\right) + \frac{a^2}{x^2}z^2 = 0, \qquad a^2 - \frac{ab^2}{x} + \frac{a^2}{x^2}z^2 = 0$$

ou

$$(C_1) \qquad a(x^2+z^2)-b^2x=0,$$

équation d'un cercle C_1 tangent au sommet O de l'ellipse E ayant pour diamètre $OO_1=\frac{b^2}{a}$.

La section de Σ par le plan zOx se compose donc de la parabole Φ_1 et du cercle C_1.

Maintenant pour avoir une idée de la surface engendrée par la focale Φ nous nous servirons de la cissoïde γ, lieu de son sommet, de l'hypocycloïde η enveloppe de son axe, de son paramètre p et du cercle C_1. Nous représentons sur une même figure γ et η.

Si l'on considère un point M de la demi-cissoïde OG, la droite OM a pour équation $\frac{y}{x}=\frac{1}{m}$; l'axe MT de la focale Φ ayant son sommet en M est une tangente à η et a pour direction $y=-\frac{1}{m}x$; elle coupe donc Ox en un point N tel que le triangle OMN est isoscèle. Tant que le point N sera compris entre O et O_1, le foyer φ de la parabole Φ sera sur la direction MN, car Φ et C_1 se coupent. On a

$$OO_1=\frac{b^2}{a}<b<a,$$

et le milieu de OO_1, soit I_1, est tel que $OI_1<\frac{a}{2}$; alors le point M_1 de γ, d'abscisse OI_1, est tel que la focale Φ correspondante se réduit à une droite double du plan xOy; en effet

$$OO_1=\frac{b^2}{a}=\frac{a}{1+m^2},$$

d'où

$$m^2=\frac{a^2}{b^2}-1=\frac{c^2}{b^2}, \qquad \operatorname{tang}^2\omega=\lambda^2=\frac{1}{m^2}=\frac{b^2}{c^2},$$

$$\cos^2\omega=\frac{c^2}{a^2};$$

$\omega = \alpha$, $p = 0$, et le paramètre change de signe; cela signifie que pour $\omega > \alpha$ le foyer de Φ se trouve sur la direction opposée à MN; la concavité de la parabole Φ change donc de sens, par rapport à la direction MN, quand cette parabole devient une droite double $M_1 O_1$ de coefficient angulaire $\frac{b}{c}$.

Quand le point mobile M arrive à l'infini vers G, $\lambda = +\infty$, $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Il est maintenant facile de suivre le mouvement et la déformation de la parabole Φ.

Quand ω croît de 0 à α, p décroît de $\frac{b^2}{a}$ à 0, et la concavité de Φ est dirigée suivant MN; quand ω croît de α à β, p croît de 0 à $\frac{2c^3}{3a^2\sqrt{3}}$; puis p décroît de $\frac{2c^3}{3a^2\sqrt{3}}$ à 0 quand ω croît de β à $\frac{\pi}{2}$; de plus, de $\omega = \alpha$ à $\omega = \frac{\pi}{2}$ la concavité de Φ est dirigée dans le sens contraire à MN.

Ensuite, quand ω croît de $\frac{\pi}{2}$ à π, le point M se déplace sur la demi-cissoïde G′O de G′ vers O; on a les mêmes résultats en sens inverse; ce qui se voit d'ailleurs immédiatement en remarquant que zOx est un plan de symétrie pour Σ.

C'est géométriquement, à l'aide du cercle C_1, que nous avons précisé le sens de la concavité de Φ. On peut établir le même résultat analytiquement en calculant les coordonnées (x_0, y_0) de φ, c'est-à-dire du sommet de F. On trouve aisément (d'après 5)

$$x_0 = \frac{a^2 + b^2 m^2(1+m^2)}{2a(1+m^2)^2}.$$

D'autre part, pour le point $M(x, y)$, on a trouvé

$$x = \frac{a}{2(1+m^2)},$$

par suite

$$x - x_0 = \frac{a^2(1+m^2) - a^2 - b^2 m^2 (1+m^2)}{2a(1+m^2)^2} = \frac{m^2(c^2 - b^2 m^2)}{2a(1+m^2)^2}.$$

La différence $x - x_0$ s'annule pour $m^2 = \frac{c^2}{b^2}$ $(\omega = \alpha)$; elle est négative pour $m^2 > \frac{c^2}{b^2}$ ou $\lambda^2 < \frac{b^2}{c^2}$ ou $\omega < \alpha$ et positive pour $\omega > \alpha$, en considérant seulement l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pour ω, ce qui est suffisant. Donc, quand le point M se déplace sur γ de O en M_1, le foyer φ de Φ est sur la direction MN; quand il se déplace de M_1 vers G, φ est sur la direction opposée à MN.

CORRESPONDANCE.

M. **d'Ocagne**. — *Sur les faisceaux ponctuels de coniques.* — Le théorème que j'ai rencontré précédemment et qu'un élève de Mathématiques spéciales, M. Georges Halley des Fontaines, vient d'utiliser de façon fort ingénieuse pour construire les tangentes aux cubiques planes [1], peut donner lieu aux remarques géométriques que voici :

Soient O le centre, I un point double d'une involution située sur une droite et dans laquelle A et B sont des points correspondants.

L'égalité de définition

$$\overline{\mathrm{OI}}^2 = \mathrm{OA}.\mathrm{OB}$$

peut s'écrire

$$(\mathrm{OA} + \mathrm{AI})(\mathrm{OB} - \mathrm{IB}) = \mathrm{OA}.\mathrm{OB}$$

[1] Même Tome, p. 132. La méthode de M. des Fontaines s'applique particulièrement bien à la cubique qui se rencontre dans le problème d'admission à l'École Polytechnique en 1901.

ou

$$OA.IB = AI(OB - IB) = AI.OI.$$

Élevant au carré et remplaçant $\overline{OI}^2$ par sa valeur ci-dessus, on a

$$\frac{OA}{OB} = \left(\frac{IA}{IB}\right)^2,$$

égalité susceptible de diverses applications. Combinée avec le théorème de Ménélaüs, elle montre immédiatement que *si, sur chaque côté d'un triangle, on considère une involution dans laquelle les sommets se correspondent, et si les centres de ces trois involutions sont en ligne droite, les points doubles de ces involutions sont aussi trois à trois en ligne droite,* et réciproquement.

Considérons, en particulier, un faisceau ponctuel de coniques

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + B_1yz + B_2zx + B_3xy \\ + \lambda(C_1yz + C_2zx + C_3xy) = 0,$$

dont fasse partie une conique

$$C_1yz + C_2zx + C_3xy = 0$$

circonscrite au triangle ABC pris pour triangle de référence. Si nous coupons par l'un des côtés de ce triangle, $z = 0$ par exemple, nous avons l'involution donnée par l'équation

$$A_1x^2 + (B_3 + \lambda C_3)xy + A_2y^2 = 0,$$

dont le centre est défini par la condition que son correspondant est sur la droite de l'infini

$$ax + by + cz = 0,$$

a, b, c étant les côtés du triangle ABC. Le point à l'infini sur AB satisfaisant aux équations

$$z = 0, \qquad ax + by = 0,$$

on tire de l'équation ci-dessus, pour son correspondant, centre de l'involution

$$z = 0, \qquad \frac{A_1x}{a} + \frac{A_1y}{b} = 0.$$

De même, les centres sur BC et CA sont donnés respectivement par

$$x = 0, \qquad \frac{A_2 y}{b} + \frac{A_3 z}{c} = 0$$

et

$$y = 0, \qquad \frac{A_3 z}{c} + \frac{A_1 x}{a} = 0.$$

Et l'on voit immédiatement que ces trois points sont alignés sur la droite

$$\frac{A_1 x}{a} + \frac{A_2 y}{b} + \frac{A_3 z}{c} = 0.$$

Il en résulte, en vertu du théorème ci-dessus, que les points doubles des trois involutions sont aussi trois à trois en ligne droite. C'est le théorème qui se trouve appliqué dans la Note rappelée plus haut.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1902.

Composition de Mathématiques spéciales.

Soient Γ et Γ_1 les traces d'un ellipsoïde (E) et de son cône asymptote sur le plan Π qui passe par les extrémités A, B, C de trois diamètres conjugués, ωA, ωB, ωC, de cet ellipsoïde. On sait que ces traces sont des coniques concentriques et homothétiques.

1° Démontrer que le rapport de similitude de Γ et Γ_1 ne change pas quand on fait varier soit les trois diamètres conjugués ωA, ωB, ωC, soit l'ellipsoïde (E).

2° Cela étant, on donne trois points A, B, C, non en ligne droite, et l'on considère tous les ellipsoïdes (E) ayant A, B, C comme extrémités de trois diamètres conjugués. Montrer que ces ellipsoïdes et leurs cônes asymptotes sont coupés par le plan Π suivant des coniques fixes Γ et Γ_1. Soient 2α et 2β les axes de Γ.

3° On prend ces axes comme axes de coordonnées, ainsi que la perpendiculaire Oz au plan ABC. Équation de celui des ellipsoïdes (E) qui a pour centre un point donné, ω, de coordonnées x, y, z.

4° Soient P, Q, R les traces sur le plan ABC des axes de symétrie de l'ellipsoïde (E) de centre ω : le triangle PQR est conjugué à Γ_1. Déterminer le cercle C_1 conjugué au même triangle.

5° Montrer que les points P, Q, R peuvent dès lors être obtenus par l'intersection d'un cercle C_2 et d'une hyperbole équilatère, H, ayant ses asymptotes parallèles aux axes de symétrie de la conique Γ_1.

6° Le cercle C_2 coupe l'hyperbole équilatère H en un quatrième point, S, que l'on construira. Déterminer les puissances par rapport au cercle C_2 de l'origine O des coordonnées et de l'orthocentre du triangle PQR. Contruire le cercle C_2.

7° Cas particulier où Γ est un cercle.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1902.

Physique et Chimie.

Physique. — I. Télescope de Newton.

II. Détermination du poids spécifique d'un corps solide par la méthode du flacon. Corrections à faire aux mesures.

Chimie. — Préparation du formène (CH^4) et de l'éthylène (C^2H^4). Analyse de ces deux corps. Indiquer les propriétés qui permettent de les distinguer l'un de l'autre.

Calcul trigonométrique.

Dans un triangle, on donne deux côtés et l'angle compris, savoir :

$$b = 548^{m},55, \qquad c = 315^{m},84,$$

$$A = 59^{\circ}58'56'' = 66^{\text{grades}},6469.$$

I. Calculer a, B et C, ainsi que la surface S à l'aide des formules

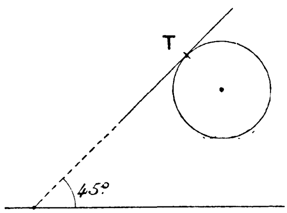
$$\operatorname{tang}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2},\qquad a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}},$$

$$S=\tfrac{1}{2}bc\sin A.$$

II. Calculer le rayon du cercle inscrit.

Épure.

La ligne de terre étant tracée à 22^{cm} au-dessus du bord inférieur de la feuille, on donne une sphère de 4^{cm} de rayon et dont le centre, ayant ses projections à 11^{cm} du bord de droite de la feuille, est à 10^{cm} au-dessus du plan horizontal et à 8^{cm} en avant du plan vertical de projection. Une seconde sphère, de 3^{cm} de rayon, est tangente intérieurement à la première, au plus haut des deux points de son contour apparent



vertical, où la tangente T est inclinée à 45° sur la ligne de terre, comme l'indique la figure ci-dessus.

I. Représenter par ses projections la courbe d'intersection de la première sphère avec le cylindre circonscrit à la seconde, et dont les génératrices sont de front et parallèles à la tangente T.

On déterminera : un point quelconque (qui sera désigné par m) de la courbe, et la tangente en ce point (qu'on désignera par t); les points ($m_1, m_2, \ldots$) sur les contours apparents verticaux et les tangentes (t_1, t_2, ...) en ces points; les points sur le contour apparent horizontal du cylindre et les tangentes à la projection verticale de la courbe aux projections verticales de ces points.

Les points sur le contour apparent horizontal de la sphère seront déduits du tracé de la projection verticale de la courbe. On indiquera la ligne des points doubles apparents en projection horizontale.

II. On supposera ensuite que la sphère, entaillée par le cylindre, soit éclairée par des rayons lumineux parallèles aux génératrices du cylindre, et l'on figurera par des hachures l'ombre portée sur le plan horizontal par la sphère pleine ainsi trouée.

Pour la détermination des parties vues (en traits pleins noirs) et cachées (points ronds noirs), on supposera que les deux corps existent; la seconde sphère sera considérée comme auxiliaire et sera représentée en traits rouges, ainsi que toutes les constructions. Le cylindre sera prolongé dans les deux sens un peu au delà de la première sphère.

N. B. — Les candidats pourront indiquer dans une courte légende, en un coin de la feuille, les méthodes qu'ils emploieront.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1798 et 1803.

(1898, p. 244 et 340; résolues 1900, p. 377; 1901, p. 473 et 474.)

Par un point m d'une conique on fait passer un cercle qui coupe cette courbe aux points a, b, c. Démontrer que, quel que soit ce cercle, la droite de Simson de m, par rapport au triangle a, b, c, passe par un point fixe.

(MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. MANNHEIM.

Pour arriver à cette propriété, transformons par polaires réciproques le théorème suivant :

Lorsqu'un triangle est circonscrit à une parabole P, *le cercle qui lui est circonscrit passe par le foyer f de* P.

Prenons un cercle directeur de centre *m*. La parabole P a pour polaire une conique E qui passe par *m*, le triangle circonscrit à P se transforme en un triangle inscrit dans E. Le cercle C a pour polaire une conique inscrite dans ce dernier triangle et qui a m pour foyer. Quel que soit le triangle inscrit dans E, les coniques, telles que celle-ci, sont tangentes à une même droite F polaire de f, par rapport au cercle directeur. Au lieu de parler de cette conique de foyer m et qui est tangente à quatre droites, introduisons le cercle qui passe par les pieds des perpendiculaires abaissées de m sur ces tangentes et nous avons cette propriété :

Les pieds des perpendiculaires, abaissées d'un point m d'une conique sur les côtés d'un triangle inscrit dans cette courbe, appartiennent à un cercle qui passe par un point fixe quel que soit le triangle.

Ce point fixe est le pied de la perpendiculaire abaissée de m sur F; mais, par rapport à la parabole P, le foyer f est le pôle du lieu des sommets des angles droits circonscrits à cette courbe, donc F, et le point g enveloppe des cordes de E vues de m sous un angle droit, sont polaire et pôle par rapport à E. Le point g est le point de Frégier pour le point m; on peut donc dire : *Le point fixe de l'énoncé précédent est le pied de la perpendiculaire abaissée de m, sur la polaire, par rapport à* E, *du point de Frégier relatif à m.*

Prenons les symétriques m', m'' de m par rapport aux axes de E. Le point de Frégier g et le point p, où sa polaire rencontre $m'm''$, sont harmoniques conjugués par rapport à m', m''. Les droites mp, mm', mg, mm'' forment un faisceau harmonique, et comme l'angle $m''mm'$ est droit, les droites mp, mg sont également inclinées sur mm'; mais mg est perpendiculaire à la tangente en m à E, donc mp est perpendiculaire à la tangente en m' à cette courbe. Ainsi la polaire de g passe par p et, puisqu'elle est parallèle à la tangente en m', le point p est le pied de la perpendiculaire abaissée de m sur la polaire de g; c'est donc le point fixe, et l'on peut ajouter : *Le point fixe est, sur le diamètre de* E *qui passe par le point de Frégier g relatif à m, l'harmonique conjugué de g par rapport aux extrémités de ce diamètre.*

Tout cela s'applique à la question 1798, qui n'est qu'un cas particulier de celle qui vient d'être traitée.

Par le point m menons la droite mn normale en n à E. Le cercle décrit sur mn comme diamètre coupe encore E en un point q. Ce point et les deux points de ce cercle confondus en n sont les sommets d'un triangle inscrit dans E pour lesquels la droite de Simson relative à m est la droite nq. Cette droite passe donc par le point fixe p. Mais nq et nm sont également inclinées sur les axes de E; on a donc cette propriété :

Une conique est donnée. On prend les normales à cette courbe issues de l'un de ses points. Pour chaque normale on mène de son pied la droite qui lui est symétrique par rapport aux axes de la conique : les quatre droites ainsi obtenues passent par un même point.

C'est l'énoncé de la question 1803.

QUESTIONS.

1926. Les parallèles aux normales d'un paraboloïde, menées par les projections de leurs pieds sur le plan tangent au sommet, forment une congruence linéaire dont les directions sont les axes de courbure des sections principales répondant au sommet.

(Ce théorème permet d'obtenir simplement la direction de la normale en un point donné et, réciproquement, le point où la normale a une direction donnée.) (M. d'Ocagne.)

1927. On considère six points A, B, C, D, E, F tels que chacun des quatre couples de plans

(EFA, BCD), (EFB, CDA), (EFC, DAB), (EAB, FCD)

est formé de deux plans rectangulaires.

1° Démontrer que toutes les quadriques passant par ces six points sont des hyperboloïdes équilatères, de sorte que, en particulier, le plan de trois quelconques des six points est perpendiculaire au plan des trois autres; un tel système de six points peut être dit *orthogonal*.

2° Démontrer que le système de cinq quelconques des six points a une sphère conjuguée dont le centre est le sixième point du système. (On dit qu'une sphère est conjuguée à un système de cinq points lorsque le pôle du plan de trois quelconques des cinq points est sur la droite qui joint les deux autres.)

3° Réciproquement, si un système de cinq points joints admet une sphère conjuguée, les cinq points et le centre de la sphère forment un système orthogonal de six points.

(G. FONTENÉ.)

1928. Soit

$$N = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots l^\lambda m^\mu n^\nu \qquad (\alpha \geqq \beta \geqq \gamma \geqq \ldots \geqq \lambda \geqq \mu \geqq \nu)$$

le plus petit nombre qui a un nombre donné de diviseurs : 1° $\nu + 1$ est un nombre premier; 2° $\mu + 1$ est un nombre premier, sauf l'exception suivante : le plus petit nombre ayant huit diviseurs est $2^3 \times 3$. (G. FONTENÉ.)

1929. Étant donnés deux points fixes F, A et une droite Δ :

1° On considère les paraboles de foyer F qui passent par A. Lieu des pôles des droites qui joignent A aux points où ces paraboles coupent Δ.

2° On considère les cercles passant par F et tangents à Δ. Enveloppe des droites qui joignent les points de contact de Δ aux points de contact des tangentes issues de A.

(ALPHA.)

1930. x_1 étant une racine de l'équation

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0,$$

$2 - x_1^2$ en est une autre. (A. PELLET.)

1931. Lieu des centres des coniques inscrites à un triangle et tangentes à une conique fixe. (ALPHA.)

ERRATUM.

Page 48, l'énoncé de la question 1920 doit être ainsi modifié à partir de la quatrième ligne : « compris entre le point de contact et l'une des asymptotes ».

[O6a]

SUR LES NORMALES D'UN HÉLICOÏDE;

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI, à Parme.

1.

Soient

Σ le lieu d'une suite de droites $g(\cos A, \cos B, \cos C)$ menées par les points d'une ligne $L(x, y, z)$;
$\Lambda(\xi, \eta, \zeta)$ une ligne quelconque tracée sur Σ;
T les segments des droites g compris entre L et Λ;
s l'arc de L;
θ l'inclinaison des droites g sur la ligne L.

En donnant à la figure un mouvement hélicoïdal autour de l'axe des z, la ligne Λ engendre un hélicoïde H, dont un point quelconque a pour coordonnées :

$$X = \xi \cos v - \eta \sin v, \qquad Y = \xi \sin v + \eta \cos v, \qquad Z = \zeta + pv,$$

p étant une constante (*paramètre de l'hélicoïde*), et ξ, η, ζ étant définies par les équations

$$\xi = x - T\cos A, \qquad \eta = y - T\cos B, \qquad \zeta = z - T\cos C.$$

Les conditions

$$\sum \frac{\partial X}{\partial v}\cos A = 0, \qquad \sum \frac{\partial X}{\partial s}\cos A = 0$$

(exprimant l'orthogonalité des droites g et de l'hélicoïde H), appliquées à l'instant initial ($v = 0$), donnent

$$(1) \qquad x\cos B - y\cos A + p\cos C = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{dT}{ds} = \cos\theta,$$

et, comme l'équation (2) exprime que la ligne A est une des trajectoires orthogonales des génératrices de Σ, on a :

La condition nécessaire et suffisante pour que la surface réglée Σ *soit le lieu d'un système de normales de l'hélicoïde* H, *est exprimée par l'équation* (1).

L'égalité (1) se réduit à une identité, quand $x = 0$, $y = 0$, $p = 0$. Conséquemment :

Une surface réglée à directrice rectiligne est toujours le lieu d'un système de normales d'une surface de révolution.

Il s'ensuit qu'*une ligne* A, *trajectoire orthogonale des génératrices d'une surface du deuxième degré, tournant successivement autour de chaque génératrice de l'autre système, engendre une infinité de surfaces de révolution tangentes entre elles le long de* A.

La condition (1) est tout à fait indépendante de z. Par conséquent :

Si l'on déplace un système de normales d'un hélicoïde, d'une quantité arbitraire, suivant la direction de l'axe de l'hélicoïde, ces droites, dans la nouvelle position, constituent un système de normales d'un autre hélicoïde.

En posant

$$\cos A = \sin C \cos\varphi, \qquad \cos B = \sin C \sin\varphi,$$

l'angle φ peut être déterminé par la condition (1). Les équations

$$\cos A = \frac{py\cos C \pm x\sqrt{(x^2+y^2+p^2)\sin^2 C - p^2}}{x^2+y^2},$$

$$\cos B = \frac{px\cos C \mp y\sqrt{(x^2+y^2+p^2)\sin^2 C - p^2}}{x^2+y^2}$$

que l'on obtient, démontrent que *par une ligne quelconque on peut faire passer une infinité de surfaces réglées, chacune constituant un système de normales d'un hélicoïde d'axe donné.* Nous désignerons par Σ les surfaces réglées ainsi obtenues pour l'axe des z.

Quand L est une droite, supposons que l'on donne à la ligne Λ (trajectoire orthogonale des génératrices d'une des surfaces réglées Σ passant par L) un mouvement de rotation autour de L, et ensuite le mouvement hélicoïdal qui lui correspond autour de l'axe des z. Les surfaces engendrées S, H ont les mêmes normales le long de la ligne Λ, considérée dans la position initiale. Par conséquent :

Quand on fixe deux droites d'une façon arbitraire, il y a une double infinité de lignes Λ, dont chacune peut être regardée comme la ligne de contact d'un hélicoïde et d'une surface de révolution ayant pour axes les droites données; le lieu des lignes Λ est un système de surfaces réglées.

D étant une droite perpendiculaire à l'axe des x et inclinée de l'angle ε sur l'axe de l'hélicoïde, exprimons la condition d'orthogonalité entre la droite D et les génératrices de Σ. On a

$$\cos A = \sqrt{\sin^2 C - \cos^2 C \cot^2 \varepsilon}, \qquad \cos B = -\cos C \cot \varepsilon,$$

c'est-à-dire [en déterminant C à l'aide de la condition (1)]

$$\cos A = \frac{p \sin \varepsilon - x \cos \varepsilon}{\sqrt{(p \sin \varepsilon - x \cos \varepsilon)^2 + y^2}},$$

$$\cos B = \frac{-y \cos \varepsilon}{\sqrt{(p \sin \varepsilon - x \cos \varepsilon)^2 + y^2}},$$

$$\cos C = \frac{y \sin \varepsilon}{\sqrt{(p \sin \varepsilon - x \cos \varepsilon)^2 + y^2}}.$$

On en conclut que *par une ligne quelconque on peut faire passer une seule surface réglée à plan directeur donné, lieu d'un système de normales d'un hélicoïde (d'axe donné)*.

Soient L, L_1 deux lignes quelconques et

$$x(t),\quad y(t),\quad z(t);\qquad x_1(\tau),\quad y_1(\tau),\quad z_1(\tau)$$

(fonctions de deux paramètres t, τ) les coordonnées de deux points P, P_1 de ces lignes. Si l'on prend les droites PP_1 pour génératrices g, on a

$$\frac{\cos A}{x-x_1}=\frac{\cos B}{y-y_1}=\frac{\cos C}{z-z_1},$$

et la condition (1) se réduit à

$$x_1 y - x y_1 + p(z-z_1)=0,$$

constituant, au fond, une relation connue entre les paramètres t, τ. On établit ainsi une correspondance entre les points des lignes L, L_1, ce qui suffit pour la construction de la surface réglée Σ lieu des droites PP_1. Conséquemment :

Par deux lignes quelconques L, L_1 *on peut faire passer une seule surface réglée, lieu d'un système de normales d'un hélicoïde d'axe donné, ou un nombre fini de telles surfaces.*

En particulier, quand une des lignes L, L_1 est une droite, *par une ligne quelconque on peut faire passer une seule surface réglée à directrice rectiligne donnée, lieu d'un système de normales d'un hélicoïde d'axe donné, ou un nombre fini de telles surfaces.*

Quand L, L_1 sont deux droites, les coordonnées de leurs points peuvent être considérées comme des fonctions linéaires des paramètres t, τ. Il n'y a donc qu'une seule surface Σ passant par ces droites. Si Λ est une trajectoire orthogonale des génératrices de Σ, donnons successivement à cette ligne deux mouvements de rotation autour des droites L, L_1 et un mouvement hélicoïdal autour de l'axe des z. Les surfaces engendrées S, S_1, H ont en commun les normales le long de la ligne Λ, considérée dans la position initiale.

Il s'ensuit que, *si l'on fixe trois droites* L, L_1, Oz *d'une façon arbitraire dans l'espace, il y a une simple infinité de lignes* Λ, *dont chacune peut être regardée comme la ligne de contact entre deux surfaces de révolution et un hélicoïde, ayant pour axes respectivement les droites* (L, L_1) *et* Oz; *le lieu de ces lignes* Λ *est une surface réglée ayant pour directrices les droites* L, L_1.

Quand on connaît la direction des génératrices g de la surface réglée Σ, on peut écrire

$$\cos A = f(x, y, z),$$
$$\cos B = \varphi(x, y, z),$$
$$\cos C = \sqrt{1 - f^2(x, y, z) - \varphi^2(x, y, z)},$$

f et φ étant deux fonctions des coordonnées x, y, z.

La condition (1) donne la relation

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &x\,\varphi(x, y, z) - y\,f(x, y, z) \\ &\quad + p\sqrt{1 - f^2(x, y, z) - \varphi^2(x, y, z)} = 0, \end{aligned}\right.$$

d'où le théorème :

Quand on fixe la direction des génératrices rectilignes, il y a une infinité de surfaces réglées, chacune constituant un système de normales d'un hélicoïde d'axe Oz; *la seule condition à vérifier est que la ligne* L *soit tracée sur la surface* (3).

Ainsi, par exemple, si cos A, cos B sont inversement proportionnels à la distance des points de la ligne L du plan $z = 0$, on peut prendre

$$\cos A = \frac{a}{z}, \qquad \cos B = \frac{b}{z},$$

et *la ligne* L *doit satisfaire à la seule condition d'être placée sur la surface du deuxième degré*

$$p^2 z^2 - (bx - ay)^2 = p^2(a^2 - b^2).$$

II.

En supposant que les droites g qu'on mène par les points de la ligne L soient successivement les tangentes, les normales principales et les binormales de cette ligne, on a respectivement :

$$\cos A = \frac{dx}{ds},$$

$$\cos A = \rho \frac{d^2 x}{ds^2},$$

$$\cos A = \rho \left(\frac{dy}{ds} \frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} \right),$$

. . . .

(ρ étant le rayon de courbure de L).

La condition (1) se réduit respectivement aux autres :

$$(4) \qquad x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} + p \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$(5) \qquad x \frac{d^2 y}{ds^2} - y \frac{d^2 x}{ds^2} + p \frac{d^2 z}{ds^2} = 0,$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & x \left(\frac{dx}{ds} \frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d^2 x}{ds^2} \right) + y \left(\frac{dy}{ds} \frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} \right) \\ & \quad = p \left(\frac{dx}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2 x}{ds^2} \right). \end{aligned} \right.$$

Celles-ci sont les équations différentielles des trajectoires orthogonales des hélices, des lignes géodésiques *et des lignes asymptotiques d'un hélicoïde d'axe* Oz *et de paramètre* p.

L'équation (5) donne par intégration

$$x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}+p\frac{dz}{ds}=k, \tag{7}$$

k étant une constante arbitraire. Et comme l'équation (7) se réduit à l'équation (4) pour $k=0$, on voit que les *trajectoires orthogonales des hélices d'un hélicoïde sont des géodésiques sur cette surface* (nous les appelons les *géodésiques principales*).

Si l'on remarque que $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, on peut mettre l'équation (7) sous la forme :

$$\left\{\begin{aligned}&(p^2-k^2)z'^2-2p(yx'-xy')z'\\&\qquad+(yx'-xy')^2-k^2(x'^2+y'^2)=0.\end{aligned}\right. \tag{8}$$

On voit alors que la *variable indépendante peut être quelconque*.

L'équation (6) peut s'écrire

$$(xx'+yy')z''-(xx''+yy'')z'=p(x'y''-y'x''), \tag{9}$$

et, ainsi que le démontre un calcul très simple, *sa forme reste toujours la même, quelle que soit la variable indépendante*.

Une ligne L de l'espace peut être représentée par les équations

$$x=R\cos u,\qquad y=R\sin u,\qquad z=U \tag{10}$$

(R et U étant des fonctions de u), ou par les autres

$$\left\{\begin{aligned}x&=R\cos\int\frac{\sqrt{1-R'^2}}{R}\,d\sigma,\\ y&=R\sin\int\frac{\sqrt{1-R'^2}}{R}\,d\sigma,\\ z&=\varphi(\sigma)\end{aligned}\right. \tag{11}$$

(σ étant l'arc de la projection sur le plan $z = 0$, R et φ des fonctions de σ).

Si alors on applique les équations différentielles (8), (9) aux lignes (10), (11), *on peut déterminer les fonctions* U, φ *par des quadratures*. En effet :

1° Dans le cas de l'équation différentielle (8), on a

$$(12)\quad \begin{cases} \mathrm{U} = \dfrac{1}{p^2 - k^2}\displaystyle\int\left[-p\mathrm{R}^2 \pm k\sqrt{\mathrm{R}^4 + (p^2 - k^2)(\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2)}\right] du \\ \qquad\qquad (\text{quand } k \gtrless p), \\ \mathrm{U} = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int \frac{p^2(\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2) - \mathrm{R}^4}{\mathrm{R}^2}\, du \qquad (\text{quand } k = p), \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} \varphi(\sigma) = \dfrac{1}{p^2 - k^2}\displaystyle\int\left[-p\mathrm{R}\sqrt{1 - \mathrm{R}'^2} \pm k\sqrt{\mathrm{R}^2(1 - \mathrm{R}'^2) + (p^2 - k^2)}\right] d\sigma \\ \qquad\qquad (\text{quand } k \gtrless p), \\ \varphi(\sigma) = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int \frac{p^2 - (1 - \mathrm{R}'^2)\mathrm{R}^2}{\sqrt{1 - \mathrm{R}'^2}\,\mathrm{R}}\, d\sigma \qquad (\text{quand } k = p); \end{cases}$$

2° Dans le cas de l'équation différentielle (9), on a

$$(14)\quad \begin{cases} \mathrm{U} = \displaystyle\int\left[a + p\int \frac{\mathrm{R}(\mathrm{R} - \mathrm{R}'') + 2\mathrm{R}'^2}{\mathrm{R}\mathrm{R}'}\, e^{-\int \frac{\mathrm{R}'' - \mathrm{R}}{\mathrm{R}'} du}\, du\right] e^{\int \frac{\mathrm{R}'' - \mathrm{R}}{\mathrm{R}'} du}\, du \\ \quad = \displaystyle\int\left(a + 2p\int e^{\int \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'} du}\, \frac{du}{\mathrm{R}}\right) e^{-\int \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'} du}\, \mathrm{R}'\, du + pu. \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} \varphi(\sigma) = \displaystyle\int\left(b - p\int \frac{\mathrm{R}\mathrm{R}'' + \mathrm{R}'^2 - 1}{\mathrm{R}'\sqrt{1 - \mathrm{R}'^2}}\, \frac{1}{\mathrm{R}^2}\, e^{-\int \frac{\mathrm{R}\mathrm{R}'' + \mathrm{R}'^2 - 1}{\mathrm{R}\mathrm{R}'} d\sigma}\, d\sigma\right) \\ \qquad\qquad \times\, e^{\int \frac{\mathrm{R}\mathrm{R}'' + \mathrm{R}'^2 - 1}{\mathrm{R}\mathrm{R}'} d\sigma}\, d\sigma \\ \quad = \displaystyle\int\left(b - p\int \frac{\mathrm{R}\mathrm{R}'' + \mathrm{R}'^2 - 1}{\mathrm{R}'^2\sqrt{1 - \mathrm{R}'^2}}\, \frac{1}{\mathrm{R}^3}\, e^{\int \frac{d\sigma}{\mathrm{R}\mathrm{R}'}}\, d\sigma\right) e^{-\int \frac{d\sigma}{\mathrm{R}\mathrm{R}'}}\, \mathrm{R}\mathrm{R}'\, d\sigma. \end{cases}$$

On parvient ainsi au théorème :

Si l'on donne un mouvement hélicoïdal de paramètre p autour de l'axe des z, à la ligne représentée *par les équations* (10) *ou* (11), *dans lesquelles* U *et* φ *sont définies par les équations* $\left\{\begin{matrix}(12)\ et\ (13)\\(14)\ et\ (15)\end{matrix}\right\}$, *la ligne est, dans toutes ses positions, une* $\left\{\begin{matrix}\textit{géodésique}\\\textit{asymptotique}\end{matrix}\right\}$ *sur l'hélicoïde engendré, quelles que soient les valeurs des constantes* k, a, b.

En considérant la ligne (10) comme la génératrice d'un hélicoïde H dont l'axe coïncide avec l'axe des z, le profil méridien placé sur le plan $y = 0$ est représenté par les équations

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{R} = \mathrm{R}(u), \qquad \zeta = \mathrm{U} - pu,$$

p étant le paramètre.

Si l'on applique les équations différentielles (8), (9) à une ligne

$$\text{(17)} \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{R}\cos\psi(u),\\ y &= \mathrm{R}\sin\psi(u),\\ z &= \mathrm{U} + p[\psi(u) - u] = \zeta + p\,\psi(u)\end{aligned}\right.$$

placée d'une façon arbitraire sur l'hélicoïde H, la fonction $\psi(u)$ est déterminée par une quadrature.

En effet :

1° Quand

$$\text{(18)} \qquad \zeta = f(\mathrm{R}),$$

on a

$$\text{(19)} \quad \psi(u) = \int \frac{-p(p^2 - k^2 + \mathrm{R}^2)f'(\mathrm{R}) \pm k\sqrt{\left\{\begin{matrix}(p^2 - k^2 + \mathrm{R}^2)\\ \times[p^2 + \mathrm{R}^2 + \mathrm{R}^2 f'^2(\mathrm{R})]\end{matrix}\right\}}}{(p^2 - k^2 + \mathrm{R}^2)(p^2 + \mathrm{R}^2)}\,d\mathrm{R},$$

$$\text{(20)} \quad \psi(u) = \int \frac{p \pm \sqrt{p^2 - f'(\mathrm{R})f''(\mathrm{R})\mathrm{R}^3}}{\mathrm{R}^2 f'(\mathrm{R})}\,d\mathrm{R};$$

2° Quand

$$(21)\qquad R = F(\zeta),$$

on a

$$(22)\qquad \psi(u) = \int \frac{\left\{ \begin{array}{l} -p[p^2 - k^2 + F^2(\zeta)] \\ \pm k\sqrt{\left\{ \begin{array}{l} [p^2 - k^2 + F^2(\zeta)] \\ \times [F'^2(\zeta) F^2(\zeta) + F^2(\zeta) + p^2 F'^2(\zeta)] \end{array} \right\}} \end{array} \right\}}{[p^2 - k^2 + F^2(\zeta)][p^2 + F^2(\zeta)]} d\zeta,$$

$$(23)\qquad \psi(u) = \int \frac{p F'^2(\zeta) \pm \sqrt{p^2 F'^4(\zeta) + F^3(\zeta) F''(\zeta)}}{F^2(\zeta)} d\zeta.$$

Il suit le théorème général :

Sur un hélicoïde donné d'avance, les lignes $\left\{ \begin{array}{l} \textit{géo-} \\ \textit{asym-} \end{array} \right.$ $\left. \begin{array}{l} \textit{désiques} \\ \textit{ptotiques} \end{array} \right\}$ *sont représentées par les équations* (17), *pourvu :*

1° *Que l'on remplace* ζ *et* ψ *par leurs valeurs* (18) *et* $\left\{ \begin{array}{l} (19) \\ (20) \end{array} \right\}$, *quand le profil méridien est représenté par l'équation* (18);

2° *Que l'on remplace* R *et* ψ *par leurs valeurs* (21) *et* $\left\{ \begin{array}{l} (22) \\ (23) \end{array} \right\}$, *quand le profil méridien de l'hélicoïde est représenté par l'équation* (21).

III.

Soient

A le *profil méridien* d'un hélicoïde H;

L une ligne tracée sur H;

L_0 la *projection équatoriale* de L (projection de L sur le plan $z = 0$);

l la *transformée plane* de L (ligne à laquelle se réduit L en étalant sur le plan le cylindre projetant L sur le plan coordonné $z = 0$).

Quand L *est une géodésique ou une asymptotique de* H :

A. *La détermination de la projection équatoriale* L_0 *et de la transformée plane* l, *quand on donne le profil méridien* Λ *est ramenée à des quadratures.*

B. *La détermination du profil méridien* Λ *et de la transformée plane* l, *quand on donne la projection équatoriale* L_0, *est ramenée à des quadratures.*

C. *La détermination du profil méridien* Λ *et de la projection équatoriale* L_0, *quand on donne la transformée plane* l, *est ramenée à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre ou du deuxième ordre, suivant que la ligne* L *est une géodésique ou une asymptotique de l'hélicoïde.*

Cas A. — 1° Si le profil de l'hélicoïde est la ligne représentée par l'équation (18), on déduit des équations (19), (20)

$$(24)\quad u = \int \frac{-p(p^2 - k^2 + R^2)f'(R) \pm k\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(p^2 - k^2 + R^2)\\ \times[p^2 + R^2 + R^2 f'^2(R)]\end{array}\right\}}}{(p^2 - k^2 + R^2)(p^2 + R^2)}\,dR,$$

$$(25)\quad u = \int \frac{p \pm \sqrt{p^2 - f'(R)f''(R)R^3}}{R^2 f'(R)}\,dR.$$

Celles-ci sont respectivement l'équation de la projection équatoriale L_0 *d'une géodésique et d'une asymptotique d'un hélicoïde, en coordonnées polaires* (R, u).

2° En ayant recours aux équations (22), (23), et en remarquant de plus que

$$d\sigma^2 = dR^2 + R^2\,du^2 = F'^2(\zeta)\,d\zeta^2 + F^2(\zeta)\,du^2,$$

dans l'hypothèse que le profil de l'hélicoïde soit représenté par l'équation (21), on déduit

$$(26)\quad \sigma = \int \sqrt{F'^2(\zeta) + F^2(\zeta)\left\{\frac{\left\{\begin{array}{l} -p[p^2 - k^2 + F^2(\zeta)] \\ \pm k\sqrt{\left\{\begin{array}{l}[p^2 - k^2 + F^2(\zeta)] \\ \times[F^2(\zeta) + F^2(\zeta)F'^2(\zeta) + p^2 F'^2(\zeta)]\end{array}\right\}}\end{array}\right\}}{[p^2 - k^2 + F^2(\zeta)]\,[p^2 + F^2(\zeta)]}\right\}^2}\, d\zeta.$$

$$(27)\quad \sigma = \int \sqrt{F'^2(\zeta) + \left[\frac{p F'^2(\zeta) \pm \sqrt{p^2 F'^4(\zeta) + F^3(\zeta)\, F''(\zeta)}}{F(\zeta)}\right]^2}\, d\zeta.$$

Celles-ci sont respectivement l'équation de la transformée plane l d'une géodésique et d'une asymptotique d'un hélicoïde, en coordonnées cartésiennes (σ, ζ).

Cas B. — 1° Soit la projection équatoriale L_0 représentée par l'équation polaire

$$(28)\qquad u = \lambda(R).$$

Il suffit de calculer $f(R)$ par l'intégration des équations qu'on déduit en comparant l'équation (28) aux équations (24), (25), pour voir que le *profil méridien de l'hélicoïde est la courbe représentée par l'équation cartésienne*

$$(29)\quad \zeta = \int \frac{\left\{\begin{array}{l} -p(p^2 + R^2)(p^2 - k^2 + R^2)\lambda'(R) \\ \pm k\sqrt{\left\{\begin{array}{l} R^2(p^2 + R^2)^2(p^2 - k^2 + R^2)\lambda'^2(R) \\ + (p^2 + R^2)[p^2(p^2 - k^2 + R^2) - k^2 R^2]\end{array}\right\}}\end{array}\right\}}{p^2(p^2 - k^2 + R^2) - k^2 R^2}\, dR$$

ou par l'autre

$$(30)\quad \zeta = \int\left[a + 2p\int \frac{\lambda'(R)}{R}\, e^{\int R\lambda'^2(R)\, dR}\, dR\right] e^{-\int R\lambda'^2(R)\, dR}\, dR$$

(a = const. arbitraire) *suivant qu'il s'agit d'une géodésique ou d'une asymptotique.*

2° En supposant que la projection équatoriale L_0 soit représentée par l'équation

$$R = R(\sigma),$$

la transformée plane l d'une géodésique ou d'une asymptotique est représentée par l'équation cartésienne

$$(31) \qquad \zeta = \varphi(\sigma),$$

$\varphi(\sigma)$ *étant donnée respectivement par les équations* (13), (15).

Cas C. — 1° Quand la transformée plane l d'une géodésique ou d'une asymptotique est représentée par l'équation cartésienne

$$(32) \qquad \sigma = \Phi(\zeta),$$

le profil méridien de l'hélicoïde est représenté par l'équation (21), $F(\zeta)$ étant la fonction définie par l'équation différentielle qu'on déduit par l'élimination de σ entre l'équation (32) et les équations (26), (27) respectivement.

2° Quand l est définie par l'équation cartésienne (31), la projection équatoriale L_0 est représentée par l'équation différentielle (13) ou (15), suivant qu'il s'agit d'une géodésique ou d'une asymptotique.

Cas particuliers. — Pour avoir les formules relatives aux *géodésiques principales d'un hélicoïde,* aux *géodésiques* et aux *asymptotiques d'une surface de révolution,* il suffit de faire respectivement : $k = 0$, dans les équations (24), (26), (29), (13); $p = 0$, dans les mêmes équations; $p = 0$ dans les équations (25), (27), (30), (15). On obtient ainsi les formules suivantes :

$$(33)\quad \begin{cases} u = -p\displaystyle\int \frac{f'(R)}{p^2+R^2}\,dR, \\ \sigma = \displaystyle\int \sqrt{\frac{p^2\,F^2(\zeta)}{[p^2+F^2(\zeta)]^2} + F'^2(\zeta)}\,d\zeta, \end{cases}$$

$$(34)\quad \begin{cases} \zeta = -\dfrac{1}{p}\displaystyle\int (p^2+R^2)\lambda'(R)\,dR, \\ \zeta = -\dfrac{1}{p}\displaystyle\int R\sqrt{1-R'^2}\,d\sigma, \end{cases}$$

$$(35)\quad \begin{cases} u = k\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+f'^2(R)}{R^2-k^2}}\,\frac{dR}{R}, \\ \sigma = \displaystyle\int \sqrt{\frac{F^2(\zeta)\,F'^2(\zeta)+k^2}{F^2(\zeta)-k^2}}\,d\zeta, \end{cases}$$

$$(36)\quad \begin{cases} \zeta = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int \sqrt{R^2(R^2-k^2)\lambda'^2(R)-k^2}\,dR, \\ \zeta = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int \sqrt{R^2(1-R'^2)-k^2}\,d\sigma, \end{cases}$$

$$(37)\quad \begin{cases} u = \displaystyle\int \sqrt{-\frac{f''(R)}{f'(R)}\,\frac{1}{R}}\,dR, \\ \sigma = \displaystyle\int \sqrt{F''(\zeta)\,F(\zeta)+F'^2(\zeta)}\,d\zeta, \end{cases}$$

$$(38)\quad \begin{cases} \zeta = a\displaystyle\int e^{-\int R\lambda'^2(R)\,dR}\,dR, \\ \zeta = b\displaystyle\int e^{-\int \frac{d\sigma}{RR'}}\,RR'\,d\sigma. \end{cases}$$

Les équations $\left\{\begin{matrix}(33)\\(35)\\(37)\end{matrix}\right\}$ *définissent (d'une seule manière) la projection équatoriale et la transformée plane* $\left\{\begin{matrix}\textit{des géodésiques principales d'un hélicoïde}\\ \textit{des géodésiques d'une surface de révolution}\\ \textit{des asymptotiques d'une surface de révolution}\end{matrix}\right\}$

$$\textit{quand on en donne} \left\{\begin{array}{l}\textit{le profil méridien}\\ \textit{la ligne méridienne}\\ \textit{la ligne méridienne}\end{array}\right\} [\zeta = f(\mathrm{R}),$$

$\mathrm{R} = \mathrm{F}(\zeta)]$.

$$\textit{Les équations} \left\{\begin{array}{l}(34)\\ (36)\\ (38)\end{array}\right\} \textit{définissent} \left\{\begin{array}{l}\textit{(d'une seule ma-}\\ \textit{(d'une seule ma-}\\ \textit{(d'une infinité de}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\textit{nière) le profil méridien}\\ \textit{nière) la ligne méridienne}\\ \textit{manières) la ligne méridienne}\end{array}\right\} \textit{et la transformée}$$

$$\textit{plane} \left\{\begin{array}{l}\textit{des géodésiques principales d'un hélicoïde}\\ \textit{des géodésiques d'une surface de révolution}\\ \textit{des asymptotiques d'une surface de révolution}\end{array}\right\}$$

quand on donne la projection équatoriale de ces lignes $[u = \lambda(\mathrm{R}),\ \mathrm{R} = \mathrm{R}(\sigma)]$.

Que l'on fasse $p = 0$ dans les équations (27), (15), et ensuite que l'on compare les équations qu'on va obtenir aux relations (32), (31) respectivement. On déduit ainsi les équations différentielles

$$\mathrm{F}(\zeta)\,\mathrm{F}''(\zeta) + \mathrm{F}'^2(\zeta) = \Phi'^2(\zeta), \qquad a\mathrm{RR}'e^{-\int \frac{d\sigma}{\mathrm{RR}'}} = \varphi'(\sigma),$$

dont l'intégration conduit aux résultats suivants :

Quand la transformée plane l *d'une asymptotique d'une surface de révolution est représentée par l'équation* (32), *ou par l'équation* (31),

1° *La ligne méridienne de la surface est une des courbes définies par l'équation*

$$\mathrm{R} = \sqrt{2\iint \Phi'^2(\zeta)\,d\zeta^2 + a\zeta + b};$$

2° *La projection équatoriale* L_0 *de la ligne est une des courbes définies (en coordonnées* R, σ*) par l'équa-*

tion

$$R = \sqrt{2m\,\varphi(\sigma) + 2\int \varphi'(\sigma)\left[\int \frac{d\sigma}{\varphi'(\sigma)}\right] d\sigma + n}$$

(*a, b, m, n étant des constantes arbitraires*).

IV.

Applications. — A. En faisant successivement $k = 0$, $p = 0$ dans l'équation (12), on trouve respectivement :

$$(39)\qquad z = -\frac{1}{p}\int R^2\,du, \qquad z = \frac{1}{k}\int \sqrt{R^4 - k^2(R^2 + R'^2)}\,du.$$

Et si, dans la dernière hypothèse, on calcule l'arc s de la ligne à l'aide des équations (10), on a

$$s = \frac{1}{k}\int R^2\,du.$$

Ces égalités démontrent les propriétés :

1° *En altérant, dans un rapport constant arbitraire, les hauteurs relatives aux points d'une géodésique principale d'un hélicoïde, on obtient une géodésique principale d'un autre hélicoïde;*

2° *Les géodésiques de deux surfaces de révolution ayant même projection équatoriale ont leurs arcs proportionnels;*

3° *Si, sur les génératrices du cylindre projetant une géodésique d'une surface de révolution sur le plan de l'équateur, on prend, à partir de ce plan, des distances proportionnelles à l'arc de la géodésique, le lieu des extrémités est une géodésique principale d'un hélicoïde ayant même axe que la surface de révolution.*

B. En supposant

$$\zeta = f(R) = R\cot\varepsilon \qquad \text{et} \qquad R(\sigma) = \sigma\cos\varepsilon,$$

la première équation (33) et la deuxième équation (34) donnent respectivement :

$$R = -p \operatorname{tang}(u \operatorname{tang} \varepsilon), \qquad \zeta = -\frac{\sin \varepsilon \cos \varepsilon}{2p} \sigma^2.$$

Ces égalités démontrent les propriétés :

1° *Les géodésiques principales des hélicoïdes réglés, dont les génératrices coupent l'axe sous un même angle, ont pour projections équatoriales des lignes semblables ;*

2° *Quand une géodésique principale d'un hélicoïde a pour projection équatoriale une spirale logarithmique avec le pôle sur l'axe, la transformée plane de la géodésique est une parabole.*

C. Quand la ligne (10) est sur une sphère de rayon a, on a

$$z = \sqrt{a^2 - R^2}. \tag{40}$$

Quand la ligne (10) coupe sous l'angle constant ε les méridiennes de la surface engendrée par cette ligne dans la rotation autour de l'axe des z, on a

$$z = \int \sqrt{R^2 \cot^2 \varepsilon - R'^2}\, du. \tag{41}$$

Si donc la ligne L vérifie à la fois les conditions [(39), (40)], [(39), (41)], [(40), (41)], R est déterminé respectivement par les équations différentielles

$$p^2 R'^2 = R^2(a^2 - R^2), \qquad p^2 R'^2 = R^2(p^2 \cot^2 \varepsilon - R^2),$$
$$a^2 \operatorname{tang}^2 \varepsilon\, R'^2 = R^2(a^2 - R^2).$$

Celles-ci, pour

$$a = \pm p \cot \varepsilon, \tag{42}$$

reviennent l'une à l'autre. Et comme on déduit après l'intégration

$$\log\left(\frac{p\cot\varepsilon + \sqrt{p^2\cot^2\varepsilon - R^2}}{R}\right) = -\,u\cot\varepsilon,$$

et conséquemment

$$R = \frac{p\cot\varepsilon}{\cosh(u\cot\varepsilon)}, \qquad z = U = -p\cot\varepsilon\,\mathrm{tangh}(u\cot\varepsilon),$$

on trouve, à l'aide des équations (16), que le profil méridien de l'hélicoïde est la ligne

$$(43)\quad \left\{ \begin{aligned} \zeta = &-\sqrt{p^2\cot^2\varepsilon - R^2} \\ &+ p\,\mathrm{tang}\,\varepsilon\log\left(\frac{p\cot\varepsilon + \sqrt{p^2\cot^2\varepsilon - R^2}}{R}\right). \end{aligned} \right.$$

Cette analyse démontre le théorème :

Quand une ligne de l'espace jouit de deux des propriétés suivantes :

1° *D'être une géodésique principale d'un hélicoïde* H ;
2° *D'être une loxodromie d'une surface de révolution* S, *ayant même axe que* H ;
3° *D'être placée sur une sphère dont le centre est sur l'axe de* H *et* S ; *elle jouit aussi de la troisième.*

Le paramètre p, *le rayon* a *de la sphère et l'inclinaison* ε *sont liés par la relation* (42). *Le profil méridien de l'hélicoïde* H *est la ligne* (43).

Comme la ligne (43) se réduit à une *tractrice* pour $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$, on a :

Dans l'hélicoïde à courbure constante négative, les trajectoires orthogonales des hélices sont des loxo-

dromies sphériques coupant les méridiennes sous l'angle $\frac{\pi}{4}$. Les sphères contenant ces trajectoires ont les centres sur l'axe, et leurs rayons sont égaux au paramètre de l'hélicoïde.

D. Si l'on donne un mouvement hélicoïdal de paramètre p, autour de l'axe des z, à la ligne L représentée par les équations (11), on trouve :

$$\sqrt{R^2+p^2}\sin\theta = \frac{R\sqrt{1-R'^2}+p\,\varphi'(\sigma)}{\sqrt{1+\varphi'^2(\sigma)}}, \tag{44}$$

$\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ étant l'angle sous lequel la ligne L coupe les hélices de l'hélicoïde engendré H.

En supposant que L soit une géodésique de l'hélicoïde H, on a, en vertu de l'équation (7),

$$\begin{aligned} k &= \left(x\frac{dy}{d\sigma} - y\frac{dx}{d\sigma} + p\frac{dz}{d\sigma}\right)\frac{d\sigma}{ds} \\ &= \left[R\sqrt{1-R'^2}+p\,\varphi'(\sigma)\right]\frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2(\sigma)}}. \end{aligned}$$

Celle-ci, comparée à l'égalité (44), démontre le théorème :

Tout le long d'une géodésique quelconque d'un hélicoïde, la distance R *entre un point de la courbe et l'axe de la surface est liée à l'inclinaison* θ *de la géodésique sur la géodésique principale correspondante, par la relation*

$$\sqrt{R^2+p^2}\sin\theta = k.$$

Cette équation donne la signification géométrique de la constante k paraissant dans les formules précédentes.

Pour $p = 0$, elle exprime le théorème de Clairaut, relatif à une géodésique d'une surface de révolution.

E. Si l'on fait respectivement

$$R = F(\zeta) = \sqrt{2a\zeta},$$
$$\zeta = f(R) = \sqrt{a^2 - R^2} - a \log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - R^2}}{R}\right),$$

dans la deuxième équation (35) et dans la première équation (35), on obtient

$$\sigma = \frac{\sqrt{a^2 + k^2}}{a}\sqrt{2a\zeta - k^2}, \qquad u = \frac{a\sqrt{R^2 - k^2}}{kR},$$

d'où il suit

$$\zeta = \frac{k^2}{2a} + \frac{a\sigma^2}{2(a^2 + k^2)}, \qquad R = \frac{ak}{\sqrt{a^2 - k^2u^2}}.$$

On a donc les théorèmes :

1° *La transformée plane d'une géodésique quelconque d'un paraboloïde de révolution est une parabole;*

2° *La projection équatoriale d'une géodésique quelconque de la pseudo-sphère de rayon a est (par rapport au cercle de rayon $\sqrt{ak}$) l'inverse de la projection équatoriale de la ligne, suivant laquelle l'hélicoïde réglé à plan directeur et à directrice rectiligne, de paramètre k, est coupé par une sphère de rayon a dont le centre est sur l'axe.*

F. Soient L_1, L_2, L_3 les asymptotiques de trois hélicoïdes, correspondant aux valeurs a_1, a_2, a_3 de la constante arbitraire b dans l'équation (15). En désignant par p_1, p_2, p_3 les paramètres correspondants, on a, par l'application de l'équation (15),

$$p_1 z_2 - p_2 z_1 = (a_2 p_1 - a_1 p_2) \int \mathrm{RR}' e^{-\int \frac{d\sigma}{\mathrm{RR}'}} d\sigma,$$

$$p_2 z_3 - p_3 z_2 = (a_3 p_2 - a_2 p_3) \int \mathrm{RR}' e^{-\int \frac{d\sigma}{\mathrm{RR}'}} d\sigma.$$

En divisant ces équations entre elles, on parvient au théorème :

Les hauteurs correspondantes z_1, z_2, z_3 *relatives aux points des asymptotiques de trois hélicoïdes* L_1, L_2, L_3, *ayant même projection équatoriale, sont liées entre elles par la relation linéaire*

$$(45) \qquad \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on pose

$$(46) \qquad z_3 = m z_1 + n z_2,$$

m et n étant des constantes, on obtient, en identifiant les équations (45), (46),

$$a_3 = m a_1 + n a_2, \qquad p_3 = m p_1 + n p_2.$$

On voit d'ici que *la transformation* (46), *appliquée aux asymptotiques de deux hélicoïdes tracés sur même cylindre donne une asymptotique d'un autre hélicoïde tracé aussi sur même cylindre, quelles que soient les constantes* m, n.

Quand $p_1 = p_2 = p_3$, l'équation (45) se réduit à l'autre,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_2},$$

exprimant le théorème :

Quand les asymptotiques de trois hélicoïdes sont *tracées sur un même cylindre, une d'entre elles coupe les portions des génératrices du cylindre comprises entre les autres, en deux parties ayant un rapport constant.*

L_1, L_2, L_3, L_4 étant les asymptotiques de quatre hélicoïdes placés sur un même cylindre, on déduit des relations précédentes

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}:\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}=\frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}:\frac{a_4-a_1}{a_4-a_2}.$$

Donc :

Les asymptotiques de quatre hélicoïdes, tracées sur même cylindre, coupent les génératrices de celui-ci suivant des groupes de quatre points, dont le rapport anharmonique est constant.

G. En supposant $p=0$ dans l'équation (14), on déduit :

En altérant, dans un rapport constant arbitraire, les hauteurs relatives aux points d'une surface de révolution, on obtient une asymptotique d'une autre surface de révolution.

H. Si la projection équatoriale d'une asymptotique d'une surface de révolution est une spirale logarithmique ayant le pôle sur l'axe et coupant les rayons vecteurs issus du pôle sous l'angle ε, on a

$$\lambda(R)=\operatorname{tang}\varepsilon\log\left(\frac{R}{m}\right),\qquad R(\sigma)=\cos\varepsilon.\sigma$$

(m étant une constante). Dans cette hypothèse, les équations (38) donnent

$$\zeta=\frac{a}{1-\operatorname{tang}^2\varepsilon}R^{1-\operatorname{tang}^2\varepsilon},\qquad \zeta=\frac{b\cos^2\varepsilon}{1-\operatorname{tang}^2\varepsilon}\sigma^{1-\operatorname{tang}^2\varepsilon}.$$

D'ailleurs, en supposant successivement

$$f(\mathrm{R}) = \alpha \mathrm{R}^m, \qquad \mathrm{F}(\zeta) = \beta\zeta^n,$$

les équations (37) donnent

$$u = \sqrt{1-m}\log\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{C}}\right), \qquad \sigma = \frac{\sqrt{n(2n-1)}}{n}\beta\zeta^n$$

(C étant une constante). Cette analyse démontre les propriétés :

1° *Quand une ligne asymptotique d'une surface de révolution a pour projection équatoriale une spirale logarithmique avec le pôle sur l'axe, la ligne méridienne de la surface et la transformée plane de l'asymptotique sont des paraboles générales du même ordre;*

2° *Quand la ligne méridienne d'une surface de révolution est une parabole générale, la projection équatoriale d'une asymptotique quelconque est une spirale logarithmique ayant le pôle sur l'axe, et la transformée plane de l'asymptotique est une parabole générale, du même ordre que la ligne méridienne.*

Pour $\cot\varepsilon = \sqrt{2}$ les paraboles générales se réduisent à des paraboles ordinaires.

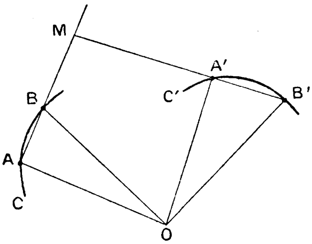
[P1e]

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. J. RÉVEILLE,
Professeur d'Hydrographie.

Soient deux figures semblables ayant pour centre de similitude le point O; et C, C′ deux courbes homologues appartenant à ces deux figures. Je me propose de trouver le lieu géométrique du point d'intersection des tangentes en deux points homologues A et A′ de ces deux courbes.

Soient deux autres points homologues B et B′; les



droites homologues AB, A′B′ forment un angle égal à celui de deux vecteurs homologues quelconques tels que OA et OA′, OB et OB′; donc les quadrilatères AOA′M, BOB′M sont inscriptibles, et le point M est à l'intersection des cercles circonscrits aux triangles AOA′, BOB′.

Si le point B est infiniment voisin de A, le point M appartient au lieu cherché, et c'est aussi un point de l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle AOA′ formé par le point O et deux points homologues.

Ce triangle se déplace en restant semblable à lui-même; le centre du cercle circonscrit décrit donc une courbe semblable à C et C′. On sait aussi que l'enveloppe d'un cercle qui passe par un point fixe est homothétique à la podaire du lieu de son centre, relative au point fixe. Ainsi le lieu cherché est la podaire, relative au point O, d'une courbe semblable à C et à C′.

On déduit de là immédiatement des lieux de sommets d'angles constants dont les côtés sont tangents à certaines courbes semblables. Ainsi, pour deux cercles, quelle que soit la valeur de l'angle, le lieu est un limaçon de Pascal.

J'énoncerai simplement les résultats suivants relatifs au cas où l'angle est droit :

Le lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont respectivement tangents à deux paraboles ayant leurs axes perpendiculaires est une droite si les paraboles ont même foyer; une cissoïde, si elles ont même sommet; une strophoïde droite, si l'axe de chacune d'elles est la directrice de l'autre.

Si les côtés d'un angle droit sont respectivement tangents à deux hyperboles équilatères conjuguées, le lieu du sommet est une lemniscate.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1902. COMPOSITION MATHÉMATIQUE.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

On donne, relativement à un système de trois axes rectangulaires $Oxyz$, *un point* P, *de coordonnées* a, b, c, *et un cercle* [C] *défini par les équations*

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0, \qquad z = 0.$$

1° *Former l'équation du lieu des projections orthogonales du point* P *sur les droites qui rencontrent à la fois le cercle* [C] *et l'axe* Oz. *Reconnaître que ce lieu se compose d'une sphère et d'une surface du quatrième degré* [S].

2° *Trouver les sections de la surface* [S] *par les plans contenant* Oz, *et le lieu des centres de ces sections.*

3° *Déterminer les limites entre lesquelles sont compris les plans parallèles à* xOy *qui coupent la surface* [S] *en des points réels. Trouver les sections de* *cette surface par le plan xOy et par le plan, parallèle à ce dernier, qui contient le point* P.

N. B. — Il sera tenu compte aux candidats des explications géométriques qu'ils pourront fournir des résultats trouvés par le calcul.

SOLUTION ANALYTIQUE.

I. Il est évident que toutes les droites passant par l'origine répondent à la question et que le lieu des projections du point P sur ces droites est la sphère Σ de diamètre OP.

Laissant de côté cette solution singulière, nous allons chercher le lieu des projections de P sur les droites rencontrant l'axe Oz et le cercle [C] en des points A et B *distincts*. Soient les points

$$(A) \qquad x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = h,$$

$$(B) \qquad x = \frac{2R}{1+m^2}, \qquad y = \frac{2mR}{1+m^2}, \qquad z = 0.$$

Les équations de la droite AB sont

$$\frac{x}{2R} = \frac{y}{2mR} = \frac{h-z}{h(1+m^2)}.$$

Celle du plan mené par P perpendiculairement à AB est

$$2R(x-a) + 2mR(y-b) - h(1+m^2)(z-c) = 0.$$

L'élimination de m et h entre ces trois équations donne celle du lieu cherché

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(x^2+y^2-ax-by)(x^2+y^2-2Rx) \\ &\qquad\qquad + (x^2+y^2)z(z-c) = 0, \end{aligned} \right.$$

surface [S] du quatrième ordre évidemment fermée puisque l'ensemble des termes du degré le plus élevé $(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)$ définit le cône isotrope de sommet O et les plans isotropes passant par Oz, mais admettant toutefois cet axe comme droite double.

L'équation (1) met, en outre, immédiatement en évidence que la surface [S] a pour plan de symétrie le plan $z = \frac{c}{2}$.

II. Si l'on coupe par le plan $y = mx$, on trouve, pour l'équation de la projection sur le plan Oxy, en outre de la solution $x^2 = 0$, déjà remarquée, l'ellipse

$$\begin{aligned}(1 + m^2)^2 x^2 + (1 + m^2) z^2 \\ - (1 + m^2)(a + bm + 2R)x \\ - (1 + m^2) cz + 2R(a + bm) = 0.\end{aligned}$$

Pour avoir l'équation de cette section dans son plan (désigné par OXz), il suffit de remplacer x par $\frac{X}{\sqrt{1 + m^2}}$, ce qui donne

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & (1 + m^2)(X^2 + z^2) \\ & \quad - \sqrt{1 + m^2}(a + bm + 2R)X \\ & \quad - (1 + m^2)cz + 2R(a + bm) = 0, \end{aligned} \right.$$

équation d'un cercle.

Revenant au premier système d'axes, on voit que le centre de ce cercle est défini par les équations

$$\begin{gathered} y = mx, \\ 2(1 + m^2)x - (a + bm + 2R) = 0, \\ 2z - c = 0. \end{gathered}$$

L'élimination de m entre ces équations donne, pour le lieu de ce point,

$$z = \frac{c}{2}, \qquad x^2 + y^2 - \left(\frac{a}{2} + R\right)x - \frac{b}{2}y = 0,$$

cercle du plan $z = \frac{c}{2}$, rencontrant Oz et ayant pour centre le milieu de la droite qui joint le centre C du cercle [C] au milieu D de la perpendiculaire abaissée de P sur Oz.

III. L'équation (1), où z reçoit une valeur particulière, représente la section de la surface par un plan parallèle à Oxy. C'est une quartique bicirculaire qui présente un point double sur Oz; elle deviendra imaginaire lorsque toute droite issue de ce point ne la rencontrera (en dehors du point double sur Oz devenant alors un point isolé) qu'en deux points imaginaires.

Les abscisses de ces deux points, situés sur la droite

$$y = mx,$$

sont données par l'équation

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &(1+m^2)^2x^2 - (1+m^2)(a+bm+2R)x \\ &\quad + (1+m^2)z^2 - (1+m^2)cz + 2R(a+bm) = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation a ses racines imaginaires si

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &[b^2 - 4z(z-c)]m^2 \\ &\quad + 2(a-2R)bm + (a-2R)^2 - 4z(z-c) < 0. \end{aligned} \right.$$

Pour que cette inégalité ait lieu *quel que soit* m, il faut que le trinome en m ait ses racines imaginaires, c'est-à-dire que

$$(5)\qquad 4z(z-c)[(a-2R)^2 + b^2 - 4z(z-c)] < 0$$

et que le coefficient du terme en m^2 soit négatif ou

$$(6)\qquad b^2 - 4z(z-c) < 0.$$

Ces deux inégalités se ramènent à une seule qui est

$$(7)\qquad (a-2R)^2 + b^2 - 4z(z-c) < 0.$$

En effet, si elle a lieu, la précédente (6) a lieu *a fortiori;* elle entraîne d'ailleurs nécessairement

$$z(z-c) > 0,$$

et, par suite, l'inégalité (5). L'inégalité (7) peut d'ailleurs s'écrire

$$4z^2 - 4cz - [(a-2R)^2 + b^2] > 0.$$

La section sera donc imaginaire lorsque z sera en dehors des racines de ce trinome, et, par suite, *réelle lorsque z sera compris entre ces racines,* ce qui donne

$$\frac{c}{2} - \frac{\sqrt{(a-2R)^2+b^2+c^2}}{2} < z < \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{(a-2R)^2+b^2+c^2}}{2}.$$

Nous avons ainsi les z des plans limites dont on trouvera plus loin la détermination géométrique.

Quant aux sections de [S] par les plans $z = 0$ et $z = c$, elles se confondent, d'après l'équation (1), avec les sections par les mêmes plans des cylindres

$$x^2 - y^2 - 2Rx = 0, \qquad x^2 + y^2 - ax - by = 0,$$

parallèles à Oz et ayant pour sections droites : l'un, le cercle [C], l'autre, le cercle qui a pour diamètre la perpendiculaire abaissée de P sur Oz.

Il était d'ailleurs évident que la section parallèle à Oxy, qui est toujours une quartique bicirculaire, devait, en se décomposant, donner un système de deux cercles, et que les systèmes de cercles obtenus dans les plans $z = 0$ et $z = c$ devaient être identiques en raison de la symétrie remarquée plus haut de la surface par rapport au plan $z = \frac{c}{2}$.

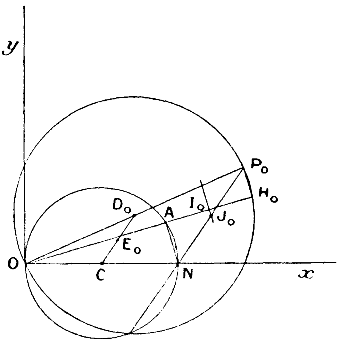
SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

I. Pour déterminer l'ordre de la surface [S], remarquons d'abord que l'axe Oz est une droite double de cette surface, puisque, par chaque point B de cet axe passent deux droites (réelles ou imaginaires) perpendiculaires à PB et rencontrant le cercle [C].

Si maintenant nous coupons par un plan OAz contenant Oz, nous voyons que la section obtenue en dehors de cet axe est le lieu des projections de P sur les droites passant par le point A, où le plan considéré rencontre le cercle [C]. Ce lieu est le cercle qui a pour diamètre la distance du point A à la projection H du point P sur le plan O$A z$.

Toute section par un plan OAz comprenant une droite double et un cercle, *la surface* [S] *est du quatrième ordre.*

II. Nous venons de voir que les *sections de* [S] *par les plans* OAz *sont des cercles.* Cherchons le lieu des centres de ces cercles. Le centre I de l'un d'eux



est le milieu de AH. Or, le point H est situé dans le plan $z = c$. Le point I reste donc dans le plan $z = \frac{c}{2}$, et la courbe qu'il décrit se projette en vraie grandeur sur le plan Oxy (où nous représentons les projections des divers points par la même lettre avec l'indice o). Or le point I_0, étant la projection sur AH_0 du milieu J_0 de NP_0, décrit le cercle de diamètre OJ_0, c'est-à-dire celui qui, passant par O, a pour centre le milieu de la droite joignant le centre C au milieu D_0 de OP_0.

Ce cercle transporté parallèlement à Oz *de* $\frac{c}{2}$ (de façon que son centre vienne au milieu E de CD) *donne donc le lieu cherché du centre* I.

III. Toutes les sections circulaires, contenues dans les plans OAz, ayant leurs centres I dans le plan $z = \frac{c}{2}$, ce plan est de symétrie pour la surface [S], et les plans limites en seront à une distance égale au rayon de la plus grande de ces sections circulaires.

Or, le rayon IA de l'une d'elles est égal à la projection de la moitié JN de NP sur le plan OAz. Ce rayon sera donc maximum lorsque, le plan OAz devenant parallèle à NP, la projection se fera en vraie grandeur.

La distance des plans limites au plan $z = \frac{c}{2}$ *est donc égale au segment* JN *de l'espace.*

Autrement dit : *Un plan parallèle à* Oxy *donne à la fois une section réelle ou une section imaginaire* (abstraction faite du point isolé situé sur Oz) *dans la surface* [S] *et dans la sphère de diamètre* NP.

On voit en outre que la surface contient le cercle [C], sa projection $[C_1]$ sur le plan $z = c$, le cercle [D] contenu dans ce plan et ayant pour diamètre la distance de P à Oz, et sa projection $[D_0]$ sur Oxy.

On obtient, en effet, chacun d'eux selon que l'on prend, en chaque point A du cercle [C] :

1° La droite perpendiculaire à PA qui rencontre Oz;

2° La parallèle à Oz;

3° La droite passant par la projection H de P sur le plan OAz;

4° La droite OA.

Remarque complémentaire. — La surface [S] admet un quadruple mode de génération conforme à celui que définit l'énoncé. Il suffit d'associer à l'un quelconque des quatre cercles [C], $[C_1]$, [D] et $[D_0]$ le point diamétralement opposé à celui situé sur Oz dans celui des trois autres cercles qui n'est, avec le premier, ni dans un même plan, ni sur un même cylindre de révolution. On s'en convainc aisément en remarquant que les sections circulaires obtenues dans les plans passant par Oz sont les mêmes dans les quatre cas.

CORRESPONDANCE.

M. **G. Fouret.** — Voulez-vous me permettre d'attirer un instant l'attention des lecteurs de votre Journal sur quelques remarques qui concernent le sujet de la Composition mathématique proposée cette année aux candidats à l'École Polytechnique et qui, en raison de cette circonstance, offrent peut-être quelque intérêt d'actualité?

Soient, par rapport à un système de trois axes de coordonnées rectangulaires OXYZ, un point P de coordonnées a, b, c et une courbe quelconque (C) du plan XOY dont nous représentons l'équation dans ce plan, rendue homogène, par

$$F(x, y, t) = 0.$$

Un calcul facile fournit, pour l'équation de la surface [S], lieu des projections orthogonales du point P sur les droites qui rencontrent à la fois OZ et la courbe (C),

$$F\left(x, y, \frac{x^2+y^2-ax-by}{x^2+y^2+z^2-ax-by-cz}\right) = 0. \tag{1}$$

Si la courbe (C) est du $n^{\text{ième}}$ ordre, et admet l'origine O comme point multiple d'ordre p, on voit immédiatement sur l'équation (1) que la surface [S] est d'ordre $3n-2p$ et admet OZ comme droite au $n^{\text{ième}}$ ordre de multiplicité, abstraction faite de la sphère

$$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz = 0$$

décrite sur OP comme diamètre, qui compte p fois dans le lieu complet [1].

---

[1] La plupart des remarques suggérées par l'équation de la surface s'expliquent géométriquement sans aucune difficulté.

On voit encore immédiatement sur l'équation (1) que la surface [S] a $n-p$ nappes passant par l'ombilicale et contient le point P comme point multiple d'ordre $n-p$. Un calcul très simple montre en outre que tout plan passant par OZ coupe [S] suivant $n-p$ cercles.

Transportons l'origine des coordonnées au point

$$\left(x=0,\ y=0,\ z=\frac{c}{2}\right)$$

sans changer la direction des axes. L'équation de [S] devient

$$(2)\qquad F\left(x, y, \frac{x^2+y^2-ax-by}{x^2+y^2+z^2-ax-by-\frac{c^2}{4}}\right)=0.$$

Cette équation ne renfermant z qu'à des puissances paires, on en conclut que le nouveau plan des XY est plan de symétrie de la surface. De là il résulte que dans le mode de génération donné de la surface [S] on peut substituer respectivement au point P et à la courbe (C) leurs symétriques par rapport au plan de symétrie trouvé.

Supposons que la courbe (C) soit le cercle

$$x^2+y^2-\alpha x-\beta y=0;$$

la surface [S] est alors la surface du quatrième ordre qui faisait l'objet de la composition pour l'admission à l'École Polytechnique, et l'on retrouve, comme cas particuliers des remarques qui viennent d'être faites, les principales propriétés de cette surface.

L'équation (2) de [S] peut d'ailleurs s'écrire, dans ce cas spécial,

$$(x^2+y^2)\left(z^2-\frac{c^2}{4}\right)$$
$$+(x^2+y^2-ax-by)(x^2+y^2-\alpha x-\beta y)=0.$$

Cette équation n'est pas altérée par l'échange de a et de α, de b et de β. De là cette conséquence, assez digne de remarque, que la surface du quatrième ordre [S] peut être engendrée à l'aide de l'un des points $\left(\alpha, \beta, \pm\frac{c}{2}\right)$ et du cercle correspondant

$$z=\mp\frac{c}{2},\qquad x^2+y^2-ax-by=0,$$

de la même façon qu'au moyen de l'un des points $\left(a, b, \pm\frac{c}{2}\right)$ et du cercle correspondant

$$z = \mp\frac{c}{2}, \qquad x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0.$$

CERTIFICATS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE.

I. *On considère l'équation du quatrième degré* $f(x) = 0$ *et les fonctions des racines*

$$\varphi_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4, \qquad \varphi_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4, \qquad \varphi_3 = x_1 x_4 + x_2 x_3 ;$$

on forme la fonction

$$\omega_1 = \varphi_2 - \varphi_3 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4).$$

1° *Déterminer le groupe auquel appartient* ω_1, *et les valeurs dont est susceptible cette fonction pour toutes les substitutions.*

2° *Calculer la somme des carrés des valeurs de* ω_1, *et montrer que, si elle est nulle, l'invariant* S *est nul et les racines sont liées par la relation*

$$(x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2 + (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4) = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(x_3 - x_4)^2 = \frac{f'(x_1) f'(x_2)}{(x_1 - x_2)^4}.$$

II. *Démontrer les égalités*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & p(u+v) + p(u-v) \\ & \qquad = \frac{2(pu\,pv - \frac{1}{4}g_2)(pu + pv) - g_3}{(pu - pv)^2}, \\ & p(u+v) - p(u-v) = \frac{-p'u\,p'v}{(pu - pv)^2}. \end{aligned} \right.$$

III. *On considère la cubique* (C) *définie par les formules*

$$x = p(u \mid \omega, \omega'), \qquad y = p(u \mid \omega, \omega'),$$

et l'on suppose que la période 2ω *est réelle, la période* $2\omega'$ *purement imaginaire.*

1° *Déterminer les arguments des points d'inflexion; montrer que la droite qui joint deux des points d'inflexion va passer par un troisième.*

2° *En partant de l'équation de la cubique* (C)

$$y^2 = 4x^3 - g^2x - g_3,$$

et en égalant à zéro la dérivée seconde de y *par rapport à* x *on obtient, pour déterminer les abscisses des points d'inflexion, une équation du quatrième degré*

$$F(x) \equiv ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e;$$

vérifier que l'on a

$$F'(x) = \rho(4x^3 - g_2x - g_3),$$

ρ *désignant un facteur numérique.*

Étudier la variation du polynome $F(x)$ *en supposant que* x *varie de* $-\infty$ *à* $+\infty$; *en conclure le nombre des points d'inflexion réels. Vérifier que l'invariant*

$$S = ae - 4bd + 3c^2$$

de $F(x)$ *est nul.*

3° *Montrer que les racines peuvent être représentées par les formules*

$$x_1 = p\left(\frac{2\omega}{3}\right), \qquad x_2 = p\left(\frac{2\omega'}{3}\right),$$

$$x_3 = p\left(\frac{2\omega + 2\omega'}{3}\right), \qquad x_4 = p\left(\frac{2\omega - 2\omega'}{3}\right),$$

et retrouver, au moyen de cette interprétation, le nombre des points d'inflexion réels.

Vérifier, par un calcul algébrique, que x_1, x_2, x_3, x_4 *satisfont aux deux relations*

$$x_3 + x_4 = \frac{2(x_1x_2 - \frac{1}{4}g_2)(x_1 + x_2) - g_3}{(x_1 - x_2)^2},$$

$$(x_3 - x_4)^2 = \frac{(4x_1^3 - g_2x_1 - g_3)(4x_2^3 - g_2x_2 - g_3)}{(x_1 - x_2)^4}$$

$$= -\frac{(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_1 - x_2)^2}$$

qui correspondent aux formules (1).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Développer, en série entière, la série*

$$pu = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right);$$

former les dérivées successives de pu; *décomposer* $p^2 u$ *en éléments simples et établir la formule*

$$p'^2 u = 4 p^3 u - g_2 pu - g_3.$$

Former les relations qui relient les puissances successives de pu *aux dérivées successives de cette fonction; intégrer*

$$\int_{\omega}^{u} p^3 u \, du.$$

(Nancy, juillet 1901.)

I. *On considère le produit infini*

$$\left(z + \frac{1}{z}\right) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n} z^2) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{q^{2n}}{z^2}\right),$$

où q *désigne une constante réelle comprise entre* 0 *et* 1, *et* z *une variable complexe.*

1° *Montrer que ce produit définit une fonction* $\varpi(z)$ *jouissant de la propriété*

$$\varpi(qz) = \varpi(z) \frac{1}{qz^2};$$

trouver les zéros de la fonction $\varpi(z)$.

2° K *et* K′ *étant des quantités réelles et positives, on pose*

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}, \qquad z = e^{\frac{i\pi u}{2K}},$$

et l'on désigne par $\Pi(u)$ *ce que devient la fonction* $\varpi(z)$ *après cette double substitution.*

Indiquer comment se transforme la fonction $\Pi(u)$ *quand on ajoute* $2K$ *ou* $2iK'$ *à l'argument* u; *trouver les zéros de la fonction* $\Pi(u)$. *Vérifier que l'on a*

$$\Pi(u) = 2 \cos \frac{\pi u}{2K} \left(1 + 2q^2 \cos \frac{\pi u}{K} + q^4\right) \left(1 + 2q^4 \cos \frac{\pi u}{K} + q^8\right) \cdots$$

3° *A quelles conditions doivent satisfaire les coefficients* A_m *de la série*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m q^{\frac{m^2}{4}} z^m \qquad (0 < q < 1)$$

pour que cette série définisse une fonction jouissant de la propriété

$$q z^2 f(q z) \equiv f(z);$$

de cette détermination, déduire le développement

$$\Pi(u) = C \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \cos(2n+1)\frac{\pi u}{2k},$$

$\Pi(u)$ *désignant la fonction précédemment considérée, et* C *un facteur constant.*

II. *On considère l'équation du quatrième degré*

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

on désigne ses racines par x_1, x_2, x_3, x_4 *et l'on prend la fonction de ces racines*

$$\rho = x_1 x_2 - x_3 x_4,$$

1° *Déterminer toutes les valeurs que peut acquérir cette fonction pour toutes les substitutions et former le groupe de substitutions auquel appartient la fonction donnée* ρ.

2° *Étant donnée la fonction des racines*

$$\varphi = x_1 x_2 + x_3 x_4,$$

former l'équation dont dépend ρ *en fonction de* φ, *lorsqu'on effectue les substitutions laissant* φ *invariable. Former inversement l'expression de* φ *en fonction rationnelle de* ρ, *et en déduire l'équation dont dépendent toutes les valeurs dont la fonction* φ *est susceptible en fonction des coefficients* a_1, a_2, a_3, a_4.

3° *En supposant que pour une équation spéciale la fonction* ρ *soit rationnellement connue, comment achèverait-on les résolutions de l'équation?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Condition de convergence de la série* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$; *limite supérieure du reste.*

Étude de la convergence des séries

$$\sum{}' \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \sum{}' \frac{1}{w^3}, \quad \sum{}' \frac{1}{(u-w^3)},$$

$$\sum{}' \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right), \quad \sum{}' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right),$$

où

$$w = 2m\omega + 2n\omega'$$

$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ *m et n non nuls simultanément.*

(Nancy, novembre 1901.)

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

I. *Étant donnée l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

dont les coefficients p et q sont des fonctions elliptiques de x, aux mêmes périodes, et dont l'intégrale générale est supposée méromorphe, trouver dans tous les cas possibles la forme analytique des intégrales.

II. *Intégrer l'équation de Lamé*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (2px + a)y.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit l'équation différentielle*

$$\frac{3\,dy}{dx} = -\frac{8y^3 - 3y - 1}{8xy^2 - x + 1};$$

la variable x partant de l'origine $x = 0$ *et arrivant au* *point $x = -1$ en suivant un certain chemin, l'intégrale y, qui avait la valeur initiale y_0, acquiert la valeur $-\frac{1}{2}$ par ce chemin. Trouver le développement en série qui, dans le domaine du point $x = -1$, représente les valeurs de l'intégrale considérée. On calculera les premiers coefficients de ce développement.* (Nancy, novembre 1901.)

I. *Donner la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction* P *de deux variables x et y puisse être considérée comme la partie réelle d'une fonction analytique d'une variable imaginaire, $f(z)$, où $z = x + yi$, et démontrer cette condition.*

Démontrer que, si une fonction analytique $f(z)$ est finie, continue et uniforme dans une aire à un ou plusieurs contours, l'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise dans le sens direct le long du contour de l'aire est nulle.

II. *Un cône de révolution est représenté par les équations*

$$x = u\cos\alpha\cos v, \qquad y = u\cos\alpha\sin v, \qquad z = u\sin\alpha,$$

où α est fixe et donné et où u et v sont deux paramètres variables.

Déterminer sur ce cône une courbe telle que la longueur comprise sur une tangente quelconque entre le point de contact et le point où cette tangente rencontre le plan des xy soit égale à une quantité donnée l.

Calculer la longueur d'un arc de la courbe et le rayon du cercle osculateur en un point de la courbe.

SOLUTION.

En posant $u = l\sin\varphi$, la courbe est représentée par l'équation

$$v\cos\alpha + \varphi + \cot\varphi = 0.$$

La projection sur le plan des xy se compose de deux branches qui ont l'origine pour point asymptotique et qui forment, en se réunissant, un rebroussement pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

L'arc de courbe est représenté par $l \log u$ et, R étant le rayon de courbure, on a

$$\frac{f^2}{R^2} = \frac{1 - 3\cos^2\varphi + \cos^4\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{\cos^4\varphi}{\sin^2\varphi \cos^2\alpha}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer sous forme de fractions ordinaires simplifiées les coefficients de développement de* $\frac{z}{e^z - 1}$ *suivant les puissances croissantes de* z *jusqu'au coefficient de* z^8 *inclusivement.*

On posera

$$\frac{z}{e^z - 1} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n + \ldots,$$

et l'on emploiera la méthode des coefficients indéterminés.

SOLUTION.

On a

$$A_0 = 1, \qquad A_1 = -\frac{1}{2}, \qquad A_3 = A_5 = A_7 = 0, \qquad A_2 = \frac{1}{2^2.3},$$

$$A_4 = -\frac{1}{2^4.3^2.5}, \qquad A_6 = \frac{1}{2^5.3^3.5.7}, \qquad A_8 = -\frac{1}{2^6.3^3.5^2.7}.$$

(Besançon, juillet 1901.)

Étant donnés trois axes rectangulaires, trouver les surfaces S *telles que la somme algébrique des segments de la normale* (*en un point* M *de la surface*) *compris entre le pied* m *de cette normale et chacun des plans coordonnés soit égale à zéro.*

Vérifier que parmi les surfaces S *il se trouve des surfaces du deuxième degré* S', *rapportées à leurs plans principaux et passant par le point*

$$(x = 0, y = 0, z = a\sqrt{-1}).$$

Les intersections des surfaces S' *par le plan* xOy *forment un système de coniques dont on demande l'enveloppe et les trajectoires orthogonales.* (Poitiers, juillet 1901.)

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1902.

Mathématiques.

On considère la courbe (C) décrite, lorsque α varie, par le point M, dont les coordonnées rectangulaires sont

$$x = \frac{\cos 4\alpha}{\cos^2\alpha}, \qquad y = \frac{\sin 4\alpha}{\cos^2\alpha};$$

on montrera que x, y s'expriment rationnellement au moyen de $t = \tang\alpha$; on formera l'équation en coordonnées polaires de la courbe (C) et l'on construira cette courbe.

Soient A le point double réel de la courbe (C); le lieu du point d'intersection P de la droite AM et de la droite dont l'équation est $y = x \tang\alpha$, lorsque α varie, est un cercle (K).

A chaque point M de la courbe (C) correspond par la construction précédente un point P du cercle (K); la droite OM, qui joint l'origine des coordonnées O au point M, rencontre la courbe (C) en trois points M_1, M_2, M_3, autres que le point M; soient P_1, P_2, P_3 les points du cercle (K) qui correspondent respectivement aux points M_1, M_2, M_3 comme le point P correspond au point M.

On montrera que les coordonnées des points M_1, M_2, M_3 s'expriment rationnellement au moyen de $\tang\alpha$, et que les points P, P_1, P_2, P_3 sont les sommets d'un carré dont la grandeur est indépendante de α.

Quels sont les lieux décrits, lorsque α varie, par les points d'intersection de OM avec les diagonales du carré, de la droite dont l'équation est $y = x \tang\alpha$ avec les côtés du carré?

Soit M_1 celui des points M_1, M_2, M_3 qui est du même côté que le point M par rapport au point O; quels sont, lorsque α varie, le lieu du conjugué harmonique du point O par rapport aux points M, M_1 et le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée sur la droite OM du point d'intersection des tangentes en M, M_1 à la courbe (C)?

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1902).

Mathématiques élémentaires.

Étant donnés, dans un plan, un cercle fixe (ω) de centre O et un cercle fixe (γ) de centre C, d'un point P du cercle (γ) on mène les tangentes au cercle (ω) qui coupent le cercle (γ) en Q et R.

1° Trouver l'enveloppe des cercles circonscrits aux triangles PQC et PRC, ainsi que le lieu géométrique de leurs centres. lorsque le point P décrit le cercle (γ).

Distinguer sur l'enveloppe et le lieu les portions qui correspondent à des triangles réels.

2° Calculer, en fonction de l'angle $\widehat{OCP}$, les angles et les longueurs des côtés du triangle PQR.

Étudier la variation de la longueur du côté QR lorsque $\widehat{OCP}$ varie.

3° Des points Q et R on mène les deux tangentes au cercle (ω) autres que PQ et PR.

Trouver le lieu géométrique du point d'intersection M de ces deux tangentes, dans le cas particulier où le cercle (γ) passe par le centre O du cercle (ω).

Mathématiques spéciales.

Étant donnée la surface du second ordre S qui, rapportée à un système de trois axes rectangulaires, a pour équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 2x = 0,$$

on considère les deux coniques C et C' d'intersection de cette surface par les plans xOy et xOz et une droite D située dans le plan yOz et passant par l'origine des coordonnées.

1° Trouver l'équation de tout plan P tel que, si M est l'un de ses points d'intersection avec la conique C, M' l'un de ses points d'intersection avec la conique C' et N son point d'intersection avec la droite D, les trois points M, M' et N soient en ligne droite.

2° Trouver l'enveloppe des plans P.

3° Trouver le lieu Σ des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe A de l'espace sur les plans P.

Montrer qu'il existe une infinité de plans Q, passant par A, qui coupent cette surface Σ suivant deux cercles.

Trouver l'enveloppe de ces plans Q et le lieu de la corde commune aux deux cercles.

4° Que deviennent les résultats précédents dans le cas particulier où la surface du second ordre S est un paraboloïde?

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy, on considère une courbe C telle que la tangente MT et la normale MN menées à cette courbe en un point M forment avec l'axe Ox un triangle MNT dont l'aire reste constante (et égale à la moitié de l'aire d'un carré de côté donné a) lorsque M décrit C.

1° Exprimer les coordonnées x et y, par rapport à Ox et Oy, d'un point M de la courbe C en fonction du coefficient angulaire t de la tangente en M; construire la courbe.

2° Exprimer ensuite les coordonnées x et y considérées en fonction *uniforme* d'un paramètre u à l'aide des fonctions introduites par Weierstrass dans la théorie des fonctions elliptiques.

3° Calculer en fonction de u le rayon de courbure relatif au point M de la courbe C et examiner s'il s'exprime en fonction uniforme de u.

4° Démontrer que, si l'on désigne par M' le centre de courbure de la courbe C relatif au point M et par P la projection de M sur Ox, l'aire du triangle $M'NP$ ne varie pas avec le point M ; indiquer quelle est la valeur constante de cette aire.

5° Calculer en fonction de u la longueur de l'arc de la courbe C compris entre un point donné M_0 et le point M correspondant à la valeur u du paramètre.

6° Soit M un point de la courbe C correspondant à la valeur u du paramètre et situé du même côté de l'axe Ox qu'un point donné M_0 de cette courbe ; on suppose de plus que l'arc de la courbe C qui joint M_0 et M n'est pas rencontré, entre M_0 et M, par les portions MP, M_0P_0 des ordonnées de M et de M_0 limitées à l'axe Ox ; calculer en fonction de u l'aire dont le contour est formé par la portion PP_0 de l'axe Ox, par les portions MP, M_0P_0 des ordonnées de M et de M_0 et par l'arc de la courbe C joignant les points M_0 et M.

Mécanique rationnelle.

I. Un corps homogène pesant de révolution est suspendu par un point O de son axe : étudier son mouvement, sachant que l'axe est assujetti par une liaison sans frottement à rester dans un plan P passant par la verticale du point O et tournant autour de cette verticale avec une vitesse angulaire constante ω. Dans quelles conditions le mouvement relatif du corps par rapport au plan P se réduit-il à une rotation permanente autour de son axe ?

II. Un disque circulaire homogène, infiniment mince, de masse M et de rayon R, se meut, assujetti à rester dans un plan où sont tracés deux axes rectangulaires fixes Ox, Oy. A un certain moment, le centre du disque est en O ; la vitesse v de ce centre est dirigée suivant Ox, et la vitesse angulaire de rotation du disque autour de son centre est ω. Au même instant, on rend immobile, par une liaison sans frottement, un point A du disque, défini par ses coordonnées polaires $OA = \rho$, $\widehat{xOA} = \alpha$. Déterminer la percussion que subit le disque, le nouvel état des vitesses des points du disque après la percussion, et la variation de force vive qui se produit.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1844.

(1900, p. 191.)

Les axes des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscriptible à un cercle sont tangentes à une parabole qui touche les trois diagonales du quadrilatère.

(A. Pellet.)

1845.

(1900, p. 191.)

Les plans principaux des quadriques inscrites dans la développable définie par une sphère et une quadrique quelconque sont tangents à une développable circonscrite à des paraboloïdes qui touchent les quatre faces du tétraèdre conjugué par rapport à la sphère et à la quadrique. (A. Pellet.)

SOLUTION

Par M. Alpha.

1844. On sait que le lieu des pôles d'une droite Δ par rapport aux coniques d'un faisceau tangentiel est une droite Δ' : si Δ est axe de l'une de ces coniques, Δ' lui sera perpendiculaire, et réciproquement. Si donc le faisceau comprend un cercle, Δ' sera la perpendiculaire abaissée sur Δ du centre ω de ce cercle : il en résulte que Δ sera la polaire de ω par rapport à une des coniques du faisceau. Or l'enveloppe de ces polaires est, comme on sait, une conique inscrite au triangle conjugué commun à ces coniques, et c'est, de plus, une parabole, puisque la droite de l'infini est la polaire de ω par rapport au cercle du faisceau.

1845. On sait que le lieu des pôles d'un plan P par rapport aux quadriques d'un faisceau tangentiel est une droite Δ : si P est plan principal de l'une de ces quadriques, Δ lui sera perpendiculaire, et réciproquement. Si donc le faisceau comprend une sphère, Δ sera la perpendiculaire abaissée sur P du centre ω de cette sphère : il en résulte que P sera le plan polaire de ω par rapport à une des quadriques du faisceau. Or l'enveloppe de ces plans polaires est, comme on sait, une développable de troisième classe, circonscrite à des quadriques qui touchent les faces du tétraèdre conjugué commun au faisceau tangentiel envisagé; de plus, cette développable touche bien le plan de l'infini, qui est le plan polaire de ω par rapport à la sphère du faisceau.

1846.

(1900, p. 191.)

Si O *et* O_1 *sont les foyers d'une conique inscrite à un triangle* ABC, *on sait que les projections de ces points sur les côtés de* ABC *appartiennent au cercle homographique.*

I. *Si le point* O *décrit une droite* Δ, *le point* O_1 *décrit une conique circonscrite à* ABC.

II. *Construire la conique* A, B, C, D, E *et déterminer* GRAPHIQUEMENT *sa nature.*

III. *Le lieu des points* O *et* O_1 *pour lesquels la droite* OO_1 *passe par un point fixe* P, *auquel en correspond un autre* P_1, *est une cubique* r *dont on obtient aisément douze points et sept tangentes. Trouver les asymptotes.*

IV. *A la cubique* r *en correspond une autre* r_1, *relative à* P_1, *et ayant avec* r *neuf points communs.*

(P. Sondat.)

SOLUTION

Par un abonné.

I. Les points O et O_1 sont *inverses* par rapport au triangle ABC. On sait que l'inverse d'une droite est une conique circonscrite au triangle ABC; les points cycliques se transforment l'un en l'autre; les centres ω des cercles inscrits et exinscrits sont les points doubles de cette transformation du second ordre, et les points O et O_1 sont conjugués à toutes les coniques qui passent par ces quatre points (hyperboles équilatères conjuguées au triangle ABC). *Voir,* par exemple, E. Duporcq, *Premiers principes de Géométrie moderne,* p. 136.

II. La transformée de la droite de l'infini étant le cercle circonscrit au triangle ABC, si Δ coupe, touche, ou ne coupe pas ce cercle, il lui correspond une hyperbole, une parabole ou une ellipse. Les tangentes en A, B, C sont, par rapport aux bissectrices des angles, symétriques des droites joignant les sommets du triangle ABC aux points où Δ coupe les côtés opposés.

III. Le lieu demandé revient à celui des tangentes menées de P aux hyperboles équilatères conjuguées au triangle ABC. Ce lieu passe évidemment par les quatre points doubles ω, où les tangentes sont les droites $P\omega$; il passe de même par les points A, B, C et par les points A_1, B_1 et C_1, où PA, PB et PC coupent les côtés opposés du triangle ABC. Enfin, il passe par P et par P_1, la tangente en P étant PP_1. Nous avons bien obtenu 12 points du lieu, et les tangentes en 5 d'entre eux. Ce lieu se transforme d'ailleurs évidemment en lui-même par inversion; or on sait qu'à toute courbe passant par A_1 en correspond une qui touche AP_1 en A. Donc, les tangentes en A, B et C concourent en P_1. Il en résulte que le lieu peut encore être considéré comme le lieu des points de contact des tangentes menées de P_1 aux coniques qui passent par A, B, C et P. On en déduit de même de nouveaux points et de nouvelles tangentes. On voit, en passant, que :

Toute cubique se transforme en elle-même par la transformation du second ordre qui a pour points doubles les points de contact des tangentes issues d'un point quelconque de la courbe.

Quant à la détermination des asymptotes, elle dépend du troisième degré, et revient à mener de P les tangentes à l'hypocycloïde enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères envisagées.

IV. La cubique r_1 correspondant à P_1 coupe évidemment r aux points A, B, C, P, P_1 et aux quatre points ω.

Autre solution par M. A. Vacquant.

1883.

(1900, p. 572.)

Par chaque point de l'espace on mène une perpendiculaire sur le plan polaire de ce point par rapport à une quadrique donnée. On a ainsi un complexe. Les droites du complexe situées dans un plan enveloppent une conique. Trouver le lieu des foyers de cette conique pour les plans parallèles à un plan donné. (A. PELLET.)

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Le complexe dont il est question est bien connu : les cônes de ce complexe sont les cônes de Chasles relatifs à la quadrique. Ce complexe est tétraédral, le tétraèdre fondamental étant formé par le plan de l'infini et les plans principaux de la quadrique. Toute conique du complexe est donc une parabole. Quand le plan de cette parabole varie, en restant parallèle à lui-même, les paraboles obtenues sont homothétiques par rapport au centre, et le lieu de leurs foyers est donc une droite. Les droites du complexe sont les axes des sections planes de la quadrique donnée.

QUESTIONS.

1932. Étant donné un quadrilatère ABCD, on considère les plans mobiles ou plaques M, N, P, Q, reliés aux tiges AB, BC, CD, DA. On demande de trouver, respectivement dans ces quatre plans, quatre points m, n, p, q tels que la droite mp soit égale et perpendiculaire à la droite nq pour toutes les déformations du quadrilatère. Démontrer que les milieux des droites mp et nq et des diagonales du quadrilatère sont les sommets d'un carré. (J. RÉVEILLE.)

1933. Lieu des foyers des paraboles tangentes à deux droites et passant par un point fixe. (ALPHA.)

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

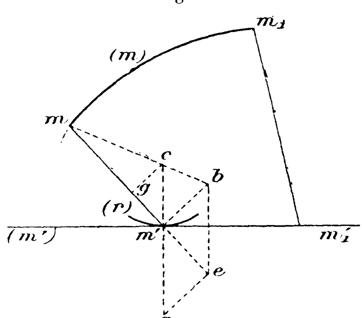
PAR M. MANNHEIM.

A la suite d'un Travail de M. Piccioli, inséré à la page 177 du présent Volume, M. Duporcq a publié une Note dans laquelle il s'occupe d'un problème qu'il énonce ainsi :

Trouver les courbes planes telles que leurs normales découpent sur une droite fixe des segments proportionnels aux arcs décrits par leurs points d'incidence.

A propos de ces courbes (*fig.* 1), que je désignerai

Fig. 1.



par (m), je viens présenter quelques remarques géométriques.

1. *Construction du centre de courbure d'une courbe* (m). — D'après la définition de (m), on a

$$\text{arc}\, mm_1 = \lambda . m'm'_1,$$

d'où, en employant ma notation habituelle,

$$d(m) = \lambda . d(m').$$

Appelons e le centre de courbure de (m) pour le point m.

Une formule connue ([1]) donne, pour un déplacement infiniment petit de m sur (m),

$$\frac{d(m)}{d(m')} = \frac{me}{m'a}.$$

Ce dernier rapport est alors égal à λ et va nous permettre de construire e.

Sur la perpendiculaire $m'c$ à la droite fixe, prenons le point c de façon que $\frac{mm'}{m'c} = \lambda$; il suffit alors de mener la droite mc jusqu'à sa rencontre b avec la perpendiculaire $m'b$ à mm', et d'abaisser de ce point b la perpendiculaire be sur la droite fixe; cette droite coupe mm' au point demandé e.

En effet, si l'on élève la perpendiculaire ea, qui coupe $m'c$ au point a, on a

$$\frac{me}{m'a \text{ ou } bc} = \frac{mm'}{m'c} = \lambda.$$

2. *Génération cycloïdale d'une courbe* (m). — Il résulte de cette construction du centre de courbure e que, *si une courbe* (r) *est telle que, pour un quelconque de ses points* m', *le rapport de son rayon vecteur* mm' *à son rayon de courbure* $m'c$ *est égal à* λ, *cette courbe, en roulant sur la droite fixe, fait décrire la courbe* (m) *au point* m *entraîné.*

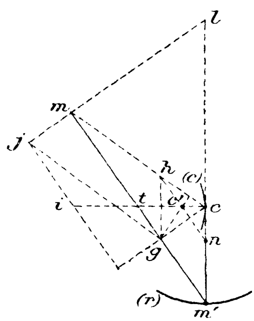
([1]) *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 18.

En faisant usage d'un théorème connu (¹), on a cette propriété :

Les arcs de la courbe (r) sont proportionnels aux arcs correspondants de sa podaire relative au point m.

3. *Construction du centre de courbure c' de la développée d'une courbe (r).* — Soit (r) (*fig.* 2) une

Fig. 2.



courbe telle que $\frac{mm'}{m'c} = \lambda$, quelle que soit la position de m' sur cette courbe.

Pour un déplacement angulaire $d\varphi$ de mm' autour de m, on a

$$d(r) = lm'.d\varphi.$$

En appelant $d\omega$ l'angle de contingence de (r) en m', on a aussi

$$d(r) = m'c.d\omega,$$

donc

$$lm'.d\varphi = m'c.d\omega,$$

d'où

$$d\varphi = \frac{m'c}{lm'}d\omega.$$

(¹) *Loc. cit.*, p. 511.

D'autre part, puisque

$$mm' = \lambda . m'c,$$

on a

$$d.mm' = \lambda d.m'c,$$

c'est-à-dire [1]

$$ml.d\varphi = \lambda . cc'.d\omega,$$

en appelant c' le centre de courbure de la développée de (r).

Remplaçant $d\varphi$ par la valeur que nous venons de trouver et supprimant $d\omega$, il vient

$$\frac{ml}{lm'} m'c = \lambda . cc'$$

ou

$$\frac{gc}{cm} m'c = \lambda . cc',$$

et enfin

$$\frac{gc}{cc'} = \frac{mm'}{m'c}.$$

Il résulte de là que les triangles $mm'c$, gcc' sont semblables et que, par suite, *on obtient le point c' à la rencontre de la normale cc' à la développée de (r) et de la perpendiculaire abaissée de g sur mc.*

4. *Autre construction du centre de courbure c' de la développée de (r).* — Du point g menons gh parallèlement à $m'c$. Le point c' est alors l'orthocentre du triangle gch, et l'on obtient ce point c' par cette construction :

On mène gh parallèlement à $m'c$ et hc' parallè-

---

[1] *Loc. cit.*, p. 44 et suiv.

lement à mm' : cette dernière droite coupe ce au point c' (¹).

5. *Construction de la normale à la courbe (g) lieu des points tels que g.* — Pour résoudre ce problème, déplaçons m' sur (r) et déformons le triangle $gm'c$. Nous ne connaissons pas l'enveloppe de cg; supposons que la normale à cette enveloppe, issue de son point de contact avec gc, coupe cc' au point i et ml au point j.

On a (²)

$$\frac{d(r)}{d(c)} = \frac{m'c}{cc'},$$

$$\frac{d(c)}{d(g)} = \frac{ci}{gj},$$

$$\frac{d(g)}{d(r)} = \frac{gj}{m'l}.$$

Multipliant membre à membre, il vient

$$1 = \frac{m'c \cdot ci}{cc' \cdot m'l}.$$

Mais

$$\frac{m'c}{m'l} = \frac{m'g}{m'm} = \frac{ch}{cm} = \frac{cc'}{ct},$$

donc

$$ci = ct.$$

Il résulte de là que *la normale demandée est gm* et que *la courbe (g), lieu des points tels que g, est un cercle de centre m.*

6. *Génération directe de la développée (c) d'une courbe (r).* — Nous venons de trouver que cg est tan-

---

(¹) Il est facile de construire le centre de courbure de la développée de (r).

(²) *Loc. cit.*, p. 49.

gente à un cercle, mais nous avons vu précédemment que le rapport de cette tangente à cc' est constant, on peut donc dire que *la développée d'une courbe* (r) *est telle que, pour ses points, les rayons de courbure sont proportionnels aux distances tangentielles de ces points à un cercle fixe.*

On peut remarquer qu'une courbe (r) et sa développée peuvent être définies de la même manière, avec cette différence que, pour la courbe (r), on a un cercle de rayon nul.

7. *Théorème relatif à une courbe* (r). — On a

$$\frac{mg}{mm'} = \frac{mh}{mc} = \frac{nm'}{cm'},$$

d'où

$$nm' = mg\,\frac{cm'}{mm'}.$$

Le segment mg étant constant, ainsi que le rapport $\frac{cm'}{mm'}$, on conclut que nm' est un segment de grandeur constante; donc,

Pour une courbe (r), *la parallèle au rayon vecteur* mm', *issue du centre de courbure* c' *de la développée de* (r), *rencontre le rayon de courbure* $m'c$ *en un point* n : *la distance* nm' *est de grandeur constante pour un point arbitraire de* (r), *et alors le lieu des points tels que* n *est une courbe parallèle à* (r).

8. *Théorème relatif à une courbe* (m). — Reprenons la figure 1; on a

$$\frac{mg}{mm'} = \frac{mc}{mb} = \frac{mm'}{mc},$$

d'où

$$\overline{mm'}^2 = mg \times mc.$$

Mais nous avons démontré (5) que mg est un segment de longueur constante; donc,

Pour une courbe (m), *les carrés des segments tels que* mm', *compris entre la courbe et la droite fixe, sont proportionnels aux rayons de courbure tels que* me.

C'est le théorème auquel est arrivé M. Duporcq et dont il disait ([1]) avec raison qu'il serait intéressant d'avoir une démonstration géométrique.

On peut remarquer que la démonstration que je viens d'indiquer est simplement une application de quelques-unes de mes formules.

ANALOGIES ENTRE LES COURBES FUNICULAIRES ET LES TRAJECTOIRES D'UN POINT MOBILE;

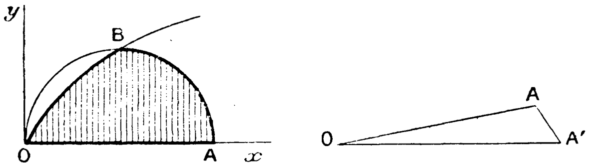
PAR M. C.-A. LAISANT.

On a depuis longtemps remarqué l'analogie qui se rencontre entre la théorie des courbes funiculaires, formes d'équilibre d'un fil inextensible dont la grosseur est supposée nulle, et celle de la trajectoire d'un point matériel. Il peut être intéressant de constater que ce rapprochement n'est pas le résultat d'une coïncidence fortuite, mais qu'il provient au contraire de la nature même des choses. C'est ce que nous nous proposons de montrer ici.

Si l'on considère un élément MM' de la trajectoire

([1]) *Voir* page 184 du présent Volume.

d'un point mobile, et si l'on mène les deux vecteurs infiniment voisins OA, OA′, qui représentent les vitesses en M et M′, l'accélération w du mouvement



s'obtiendra par définition en divisant par dt le vecteur AA′, c'est-à-dire qu'on aura

$$AA' = w\,dt.$$

Si l'on considère un élément MM′ d'une courbe funiculaire, et si F est la force appliquée à cet élément, rapportée à l'unité de longueur, on démontre que la force appliquée $F\,ds$ et les deux tensions appliquées aux extrémités de l'élément doivent se faire équilibre. Par suite, si l'on mène un vecteur OA_1, équipollent à la tension T en M, dirigée suivant la tangente en ce point, un vecteur OA'_1 équipollent à la tension en M′, et un vecteur OB équipollent à la force $F\,ds$, on aura

$$OA_1 + OA'_1 + OB = o, \qquad OA_1 + OA'_1 = - OB.$$

Construisant $OA = - OA_1$, $OA' = + OA'_1$, on aura donc

$$OB = - AA',$$

c'est-à-dire que la construction sera identiquement la même que celle figurée plus haut. Il s'ensuit que, dans cette figure, les vecteurs OA, OA′ peuvent être considérés comme représentant soit les deux vitesses infiniment voisines en deux points infiniment rapprochés de la trajectoire, soit les deux tensions (*portées dans le même sens*) en ces deux mêmes points de la courbe considérée comme forme d'équilibre d'un fil.

Dans le premier cas, le vecteur AA' aura pour expression $w\,dt$, et dans le second $-F\,ds$.

La correspondance pourra donc s'établir entièrement en posant d'une façon générale

$$T = kv, \qquad F\,ds = -kw\,dt, \qquad F = -kw\frac{dt}{ds} = -k\frac{w}{v}.$$

Nous introduisons ici ce coefficient constant k, qui peut numériquement devenir égal à l'unité, afin de respecter l'homogénéité ; il a évidemment pour dimensions 1 par rapport à la masse et -1 par rapport au temps ; il faut d'ailleurs se rappeler que F n'est pas une force, mais le quotient d'une force par une longueur.

Les formules ci-dessus permettent de passer des courbes funiculaires aux trajectoires, et les suivantes, qu'on en tire,

$$v = \frac{T}{k}, \qquad w = -\frac{F}{k}\frac{ds}{dt} = -\frac{F}{k}v = -\frac{FT}{k^2},$$

permettent le passage inverse.

Si l'on considère les composantes, tangentielle et normale, de l'accélération, on a

$$w_t = \frac{dv}{dt}, \qquad w_n = \frac{v^2}{\rho},$$

ρ étant le rayon de courbure de la courbe. Donc les deux composantes de $-\frac{FT}{k^2}$ seront respectivement

$$\frac{dT}{k\,dt} = \frac{1}{k}\frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{k}v\frac{dT}{ds} = \frac{T}{k^2}\frac{dT}{ds}$$

et

$$\frac{T^2}{k^2\rho}.$$

Divisant les trois vecteurs par $\frac{T}{k^2}$, il s'ensuit que les deux composantes de $-F$ sont

$$F_t = \frac{dT}{ds}, \qquad F_n = \frac{T}{\rho},$$

comme on le sait.

Ces formules montrent que la composante tangentielle de la force appliquée en chaque élément influe exclusivement sur les variations de la tension, et la composante normale sur la courbure du fil.

Dans un mouvement, l'accélération est la dérivée géométrique de la vitesse par rapport au temps. Dans une courbe funiculaire, la force F est (en sens contraire) la dérivée géométrique de la tension par rapport à la longueur du fil.

Il nous suffira, en terminant cette Note, de faire ressortir quelques exemples particuliers d'analogies.

La courbe d'équilibre des ponts suspendus (limite du polygone funiculaire) correspond au mouvement parabolique des corps pesants dans le vide. Dans le premier cas, la composante horizontale de la tension est constante, et, dans le second, c'est la composante horizontale de la vitesse.

Dans le mouvement circulaire uniforme, la vitesse et l'accélération sont constantes en grandeur, et l'accélération est partout normale à la trajectoire. Le cercle sera par conséquent la forme d'équilibre d'un fil sans fin dont tous les éléments seraient également repoussés par un centre intérieur.

Dans tout mouvement d'accélération centrale, la trajectoire est plane, et la double vitesse aréolaire $\frac{r^2\, d\theta}{dt} = C$ est constante. Pour toute forme d'équilibre d'un fil résultant de forces qui émanent d'un centre fixe, la courbe sera plane, et l'on aura

$$C = \frac{r^2\,d\theta}{k\,ds}\,T = \frac{r}{k}\,\frac{r\,d\theta}{ds}\,T.$$

Si O est le centre des forces, M un point de la courbe et MP la tension, l'aire du triangle OMP est donc constante.

Dans le cas actuel, l'accélération est donnée par la formule de Binet :

$$w = \frac{C^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

Il s'ensuit que la force F a pour expression

$$F = T\,\frac{r^2\,d\theta^2}{ds^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right) = \frac{k^2\,C^2}{T\,r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

On a aussi l'expression

$$F = k\,C\,\frac{d\theta}{ds}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

Si V désigne l'angle de la tangente à la courbe avec le rayon vecteur, nous pouvons écrire

$$\frac{F}{T} = \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{v}}{d\theta^2}\right)\sin^2 V.$$

On a donc ainsi, pour toute courbe funiculaire due à une force centrale, l'expression du rapport, en chaque point, entre la force rapportée à l'unité de distance et la tension, en fonction des seuls éléments géométriques de la courbe.

Nous avons, également,

$$F = \frac{k\,C}{r}\sin V\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

Si une courbe funiculaire affecte la forme d'une ellipse sous l'action de forces émanant du centre, la force F est en chaque point proportionnelle à $\frac{r^2\,d\theta}{ds}$.

Si elle affecte la même forme sous l'action de forces émanant d'un foyer, la force F est en chaque point proportionnelle à $\frac{d\theta}{ds}$.

Enfin, comme unique exemple du passage d'un problème funiculaire à une question de Cinématique, nous ferons remarquer que la chaînette serait décrite par un point matériel sous l'action d'une force de direction constante proportionnelle à la vitesse; car F est constant, et l'on a

$$w = \frac{\mathrm{FT}}{k^2} = \frac{\mathrm{F}}{k^2} vk = \frac{\mathrm{F}}{k} v.$$

SUR LA THÉORIE DES FORCES CENTRALES;

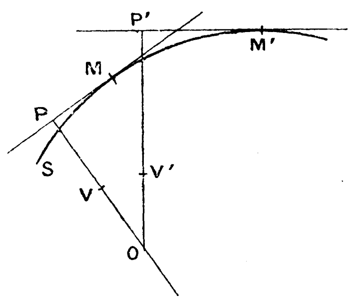
Par M. V. JAMET.

L'article publié dans le numéro de mars par M. Suchar appelle quelques réflexions que je me permets de soumettre aux lecteurs de ce Recueil.

1. M. Suchar démontre que, dans le mouvement d'un point sous l'influence d'une force centrale, si l'hodographe est une conique, la trajectoire est aussi une conique. Son calcul, aussi bien que son raisonnement, convenablement généralisés, conduisent au résultat suivant :

Dans le mouvement d'un point sous l'action d'une *force centrale, l'hodographe qui a pour origine le centre d'action, après avoir tourné d'un angle droit autour de ce centre, coïncide avec la polaire réciproque de la trajectoire, la conique directrice étant un cercle dont le centre est au centre d'action et dont le rayon a pour mesure la racine carrée de la constante des aires.*

Il s'ensuit que, dans un tel mouvement, on peut déterminer comme il suit la trajectoire, dès qu'on connaît l'hodographe et la constante des aires C. Après avoir



fait tourner d'un angle droit, autour du centre d'action, l'hodographe donné, on écrira l'équation de cette courbe, dans sa nouvelle position, sous la forme

$$r = \frac{1}{\varphi(\theta)},$$

où r, θ désignent les coordonnées polaires par rapport à une origine placée au centre d'action. Au point de coordonnées r, θ, situé sur cette courbe répondra, sur la trajectoire, un point tel que la projection de l'origine sur la tangente en ce point aura pour coordonnées polaires θ et $C\,\varphi(\theta)$, de sorte que l'équation de cette tangente en coordonnées rectilignes sera

$$x \cos\theta + y \sin\theta - C\,\varphi(\theta) = 0, \tag{1}$$

et l'on obtiendra l'équation de la trajectoire en éliminant θ entre cette dernière équation et la suivante :

$$-x \sin\theta + y \cos\theta - C\,\varphi'(\theta) = 0,$$

lesquelles permettent d'exprimer immédiatement x et y en fonction de θ.

2. La loi d'après laquelle la force varie en fonction de la position du mobile peut s'énoncer ainsi :

Dans le mouvement d'un point sous l'action d'une force centrale, la force accélératrice varie en raison inverse du carré de la distance du mobile au centre d'action, et en raison directe du rayon de courbure de l'hodographe au point correspondant.

Soient, en effet,

M, M′ les positions du mobile sur sa trajectoire S aux instants t et $t + \Delta t$;
P et P′ les projections du centre d'action O sur les tangentes à la trajectoire en M et M′;
OV, OV′ deux longueurs égales aux vitesses en M et M′, comptées sur OP et OP′.

On voit que le lieu du point V est la position occupée par l'hodographe après un quart de rotation autour du point O. D'ailleurs, l'accélération en M est égale à

$$\lim \frac{VV'}{\Delta t} \qquad (\text{pour } \Delta t = 0),$$

et si l'on appelle θ l'angle que fait OM avec une direction fixe, on voit aussi que l'accélération est égale à

$$\lim \frac{VV'}{\Delta\theta}\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}\lim \frac{VV'}{\Delta\theta}.$$

Soit C la constante des aires, et soit $OM = r$. On connait la relation

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$$

(loi des aires) et, d'autre part, on constate que la tangente en V à la courbe décrite par ce point devant être sans cesse perpendiculaire à la direction OM de l'accélération, quand le mobile passera de M en M', la direction de la tangente à la courbe lieu du point V tournera d'un angle égal à $\Delta\theta$. Donc le rapport

$$\frac{VV'}{\Delta\theta}$$

a pour limite le rayon de courbure R de la courbe lieu du point V, ou bien le rayon de courbure de l'hodographe au point correspondant à la position M du mobile. Donc, enfin, l'expression de l'accélération est

$$\frac{C}{r^2}R,$$

et si la masse du mobile est m, la force accélératrice est égale à

$$\frac{Cm}{r^2}R.$$

3. Supposons donc que, au lieu de nous donner l'équation de l'hodographe en coordonnées polaires ou cartésiennes, on donne simplement la loi suivant laquelle varie son rayon de courbure en fonction de l'angle que fait sa tangente avec une direction fixe, par exemple avec la direction à laquelle nous rapportons la

trajectoire en coordonnées polaires, et soit

$$R = F(\theta) \tag{2}$$

l'équation par laquelle se traduit cette loi. Cette équation définit une famille de courbes égales entre elles et orientées de la même manière par rapport à deux axes fixes OX, OY, dont l'un peut être regardé comme confondu avec l'axe des coordonnées polaires : ce sont les courbes qu'on définirait, en coordonnées cartésiennes, en intégrant les deux équations

$$dX = \cos\theta\, F(\theta)\, d\theta, \qquad dY = \sin\theta\, F(\theta)\, d\theta, \tag{3}$$

puis en éliminant θ entre les deux intégrales obtenues, et ces deux intégrales sont de la forme

$$X = \varphi(\theta) + a, \qquad Y = \psi(\theta) + b,$$

φ, ψ désignant deux fonctions déterminées, a, b deux constantes arbitraires.

Il s'ensuit que l'équation générale des trajectoires déterminées par l'intermédiaire de l'équation (2) doit renfermer deux constantes arbitraires, comme il est facile de le vérifier. En effet, en comparant l'expression trouvée ci-dessus pour l'accélération avec l'expression connue

$$-\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right),$$

on est conduit à intégrer l'équation différentielle

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{1}{C}F(\theta),$$

et l'on sait que celle-ci admet l'intégrale générale

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{C}\left(\sin\theta\int_{\theta_0}^{\theta} F(\theta)\cos\theta\, d\theta - \cos\theta\int_{\theta_0}^{\theta} F(\theta)\sin\theta\, d\theta\right), \tag{4}$$

où θ_0, θ_1 sont arbitraires. Ce résultat est confirmé par une remarque due à M. Darboux et consignée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. LXXXIV, p. 960 et suiv.), savoir :

Dans le mouvement d'un point sous l'action d'une force centrale émanant d'un même point fixe, les trajectoires qui répondent à une même loi des forces sont homologiques d'une même courbe, l'axe d'homologie étant arbitraire, et le centre d'homologie étant au centre d'action de la force

Cela résulte immédiatement de ce qu'on peut écrire l'équation (4) sous la forme

$$\frac{1}{r} = \alpha \cos\theta + \beta \sin\theta + \Phi(\theta),$$

α, β étant arbitraires et $\Phi(\theta)$ désignant une fonction déterminée.

4. On peut préciser la signification des constantes qui figurent dans l'équation (4) en s'imposant la condition que la trajectoire passe par deux points donnés à l'avance, distincts ou non ; dans ce dernier cas, on se donnera la tangente à la trajectoire au point donné. Mais on peut aussi procéder comme il suit. En vertu des équations (3), on peut écrire l'équation (4) sous la forme

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{C}[\sin\theta(X - X_0) - \cos\theta(Y - Y_0)],$$

puis, en employant les coordonnées cartésiennes,

$$x(Y - Y_0) - y(X - X_0) = C,$$

X_0, Y_0 désignant des constantes, x, y les coordonnées d'un point de la trajectoire, X, Y les coordonnées du point qui lui correspond sur l'hodographe. Mais si, dans cette dernière équation, on regarde x, y comme données, X, Y comme des coordonnées courantes, elle représente une droite passant par le point P de l'hodographe qui répond au point x, y, de la trajectoire, et parallèle au rayon vecteur de ce point. C'est donc la tangente à l'hodographe au point P. Mais la distance du point (X_0, Y_0) à cette tangente est égale à

$$\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Donc la projection du point (X_0, Y_0) sur la tangente à l'hodographe décrit une courbe transformée par inversion de la position qu'occuperait la trajectoire, après une translation qui amènerait l'origine actuelle au point (X_0, Y_0), et une rotation d'un angle droit autour de ce point. La constante d'inversion étant C, on en conclut, en vertu de ce qui a été dit au n° 1, que la position occupée par la trajectoire après ces deux mouvements de translation et de rotation est la polaire réciproque de l'hodographe par rapport au cercle dont le centre est au point (X_0, Y_0) et dont le rayon est $\sqrt{C}$; plus simplement encore :

La trajectoire étant déterminée par le choix des constantes X_0, Y_0, *celles-ci sont les coordonnées de l'origine de l'hodographe.*

5. M. Suchar, dans sa Note, fait allusion au problème de Bertrand (*Comptes rendus*, t. LXXXIV), et la lecture des solutions fournies par Halphen et par M. Darboux suggère la question suivante :

Un point matériel se déplace sous l'influence d'une force centrale proportionnelle à sa distance au centre *d'action et inversement proportionnelle au cube de sa distance à une droite fixe. Si l'on ne savait pas que, dans ces conditions, la trajectoire est une conique, comment pourrait-on établir ce résultat?*

La même question se pose à l'égard de la deuxième loi, et ceci nous amène à examiner, dans quelques-uns de ses cas particuliers, le problème qui consiste à rechercher la trajectoire d'un point matériel soumis à une force centrale dont on connaît l'expression en fonction des coordonnées du point. On sait que, dans le système des coordonnées polaires, ce problème se ramène à l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{1}{C^2} r^2 \varphi(r, \theta),$$

où $\varphi(r, \theta)$ désigne l'expression de l'accélération, C la constante des aires.

Nous n'insisterons pas sur le cas classique où φ dépend uniquement de r, cas où le problème se ramène immédiatement aux quadratures. Nous ajouterons seulement les remarques suivantes :

1° Si la fonction φ est de la forme

$$\frac{1}{r^2} \psi(\theta),$$

l'équation ci-dessus est de la forme

$$d^2\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{1}{C^2} \psi(\theta),$$

et admet pour intégrale générale

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{C^2}\left(\sin\theta \int_{\theta_0}^{\theta} \cos\theta\, \psi(\theta)\, d\theta - \cos\theta \int_{\theta_1}^{\theta} \sin\theta\, \psi(\theta)\, d\theta\right),$$

θ_0, θ_1 étant arbitraires.

2° Si la fonction φ est de la forme

$$\frac{1}{r^3}\Psi(\theta),$$

l'équation différentielle devient

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}+\frac{1}{r}=\frac{-1}{C^2 r}\Psi(\theta). \tag{5}$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre, et il suffit d'en connaître une intégrale particulière pour en déduire l'intégrale générale.

6. Mais il y a lieu de s'arrêter un instant sur ce cas particulier, afin d'interpréter la proposition bien connue concernant le rapport anharmonique de quatre intégrales d'une équation de Ricatti. Dans l'équation (5), mise sous la forme

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}=\frac{1}{r}\Phi(\theta),$$

faisons

$$r\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}=u; \tag{6}$$

nous transformons cette équation en une équation de Ricatti, savoir :

$$\frac{du}{d\theta}+u^2=\Phi(\theta),$$

dont quatre intégrales particulières u_1, u_2, u_3, u_4, répondant à une valeur de θ, ont un rapport anharmonique indépendant de θ. Mais, d'après la formule de transformation (6), ces quatre intégrales sont égales et de signe contraire aux tangentes des angles que fait la direction commune aux rayons vecteurs de quatre points situés, respectivement, sur les quatre trajectoires correspondantes, avec les vitesses de quatre mobiles décrivant chacun une de ces quatre trajectoires, aux instants où ces mobiles viennent passer, chacun, en un des points considérés. Donc :

Quatre points de même masse décrivant chacun une trajectoire différente, sous l'action de forces centrales issues d'un même point O, *et dont l'expression est de la forme*

$$\frac{1}{r^3}\psi(\theta),$$

et la constante des aires étant la même pour ces quatre points, les rayons vecteurs des hodographes, correspondant à quatre points situés sur ces quatre trajectoires et sur un même rayon vecteur issu du point O, *ont un rapport anharmonique constant.*

7. Supposons encore que l'expression de la force soit de la forme

$$\frac{A r}{(r\cos\theta + a)^3},$$

c'est-à-dire que, comme dans l'un des cas où la trajectoire est une conique, la force soit proportionnelle au rayon vecteur, et en raison inverse du cube de la distance du mobile à une droite fixe. Alors l'équation différentielle des trajectoires prend la forme

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = B\,\frac{1}{\left(\cos\theta + \frac{a}{r}\right)^3},$$

B étant égale à

$$\frac{-A}{C^2}.$$

Posons

$$\frac{a}{r} + \cos\theta = \omega,$$

l'équation précédente se transformera comme il suit :

$$\frac{d^2\omega}{d\theta^2} + \omega = \frac{Ba}{\omega^3}.$$

Multipliant les deux membres de cette équation par $d\omega$ et intégrant, désignant en outre par D une constante arbitraire, on trouve

$$\left(\frac{d\omega}{d\theta}\right)^2 + \omega^2 = \frac{-Ba}{\omega^2} + 2D$$

et, par conséquent,

$$d\theta = \frac{\omega\, d\omega}{\pm\sqrt{2D\omega^2 - Ba - \omega^4}} = \frac{\omega\, d\omega}{\pm\sqrt{D^2 - Ba - (\omega^2 - D)^2}},$$

par suite aussi, en désignant par θ_0 une nouvelle arbitraire,

$$2(\theta - \theta_0) = \arc\sin\frac{\omega^2 - D}{\sqrt{D^2 - Ba}}$$

ou bien

$$\omega^2 - D = \sqrt{D^2 - Ba}\,\sin 2(\theta - \theta_0),$$

ou encore

$$\left(\frac{a}{r} + \cos\theta\right)^2 - D = \sqrt{D^2 - Ba}\,\sin 2(\theta - \theta_0).$$

En revenant des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, on trouve l'équation d'une conique dont les deux tangentes issues de l'origine ont leur point de contact sur la droite donnée.

8. Le cas particulier que nous venons de traiter peut être généralisé comme il suit : Dans l'expression

de la force

$$\frac{r}{(a+r\cos\theta)^3},$$

remplaçons le facteur

$$\frac{1}{(a+r\cos\theta)^3}$$

par une fonction donnée de la distance du mobile à une droite fixe, que nous pouvons supposer encore perpendiculaire à Ox. Alors l'expression de la force prendra la forme

$$r f(x).$$

D'ailleurs les équations du mouvement, en fonction des coordonnées cartésiennes x, y du mobile et l'accélération γ, sont les suivantes :

$$\frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\gamma}{r}.$$

La masse du mobile étant supposée égale à 1, on trouve

$$\frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dt^2} = f(x).$$

On en déduira

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x f(x),$$

puis, en multipliant les deux membres par dx, en intégrant et en désignant par x_0 une constante arbitraire :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\int_{x_0}^{x} x f(x)\,dx,$$

ou bien

$$dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{2\int_{x_0}^{x} x f(x)\,dx}}. \tag{7}$$

D'ailleurs la loi des aires se traduit par l'équation

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C,$$

d'où l'on déduit

$$y = Cx\int_{t_1}^{t}\frac{dt}{x^2},$$

et, par conséquent, en vertu de la formule (7),

$$(8) \qquad y = Cx\int_{x_1}^{x}\frac{dx}{x^2\sqrt{2\int_{x_0}^{x} x f(x)\,dx}},$$

x_1 désignant une nouvelle constante arbitraire.

Dans le cas particulier qui vient d'être traité, la fonction $f(x)$ était égale à

$$\frac{1}{(x+a)^3},$$

et il n'y a plus de difficulté à vérifier que l'équation (8) représente une conique lorsque la fonction f reçoit cette détermination particulière.

9. Pour faire une autre application de la formule (8), supposons que la fonction $f(x)$ soit, par rapport à x, un binome du premier degré, savoir :

$$3\alpha x + 2\beta,$$

c'est-à-dire que la force soit proportionnelle à la distance du mobile au centre d'action, et aussi à sa distance à une droite fixe.

Alors on trouve

$$\int_{x_0}^{x} x f(x)\,dx = \alpha(x^3 - x_0^3) + \beta(x^2 - x_0^2).$$

On décomposera le second membre en un produit de la forme

$$\alpha(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$$

et l'on posera

$$x = \frac{x_0+x_1+x_2}{3} + \wp u, \tag{9}$$

puis on choisira les invariants g_2, g_3 de la fonction $\wp$, comme il suit. En vertu de la formule (9), le produit

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

sera identique à un trinome de la forme

$$\frac{1}{4}(4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3);$$

les constantes g_2, g_3 seront alors les invariants de notre fonction $\wp$. Soit alors

$$\frac{x_0+x_1+x_2}{3} = -\wp a;$$

la formule (8) deviendra

$$y = C\sqrt{\frac{2}{\alpha}}(\wp u - \wp a)\int_{u_1}^{u} \frac{du}{(\wp u - \wp a)^2}.$$

Mais on connaît la formule

$$\frac{1}{\wp u - \wp a} = \frac{1}{\wp' a}[\zeta(u-a) - \zeta(u+a) + 2\zeta a] \quad (^1).$$

On en déduit, en différentiant par rapport à a,

$$\frac{\wp' a}{(\wp u - \wp a)^2} = \frac{-\wp'' a}{\wp'^2 a}[\zeta(u-a) - \zeta(u+a) + 2\zeta a]$$
$$+ \frac{1}{\wp' a}[\wp(u-a) + \wp(u+a) + 2\wp a],$$

---

(1) Appell et Lacour, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques*, p. 59.

puis encore

$$\int \frac{du}{(pu - pa)^2}$$
$$= \frac{-p''a}{p'^3 a}\left(\log\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} + 2u\zeta a\right)$$
$$- \frac{1}{p'^2 a}[\zeta(u-a) + \zeta(u+a) + 2upa] + D,$$

D désignant une constante. Donc ici la trajectoire sera définie par les deux équations

$$x = pu - pa,$$
$$y = C\sqrt{\frac{2}{\alpha}(pu - pa)}\left[\frac{-p''a}{p'^3 a}\left(\log\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} + 2u\zeta a\right) - \frac{1}{p'^2 a}[\zeta(u-a) + \zeta(u+a) + 2upa] + D\right].$$

10. Outre le cas où la force est donnée par une formule telle que

$$\frac{Ar}{(a\cos\theta + r)^3},$$

il y a encore un cas où la trajectoire est une conique. C'est celui où l'expression de la force est de la forme

$$\frac{Ar}{(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

A, α, β, γ désignant des constantes. On peut, d'ailleurs, en choisissant convenablement les axes, supposer que la constante β est nulle; et si, supposant la trajectoire inconnue, on veut déduire la forme de cette trajectoire de l'expression ci-dessus, on reviendra aux coordonnées polaires, et l'on sera conduit à intégrer l'équation différentielle

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{-A}{C^2(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}. \tag{10}$$

Les développements fournis au n° 5 (1°) nous ont montré que l'intégration d'une telle équation peut s'opérer au moyen de deux quadratures. Ajoutons que cette équation ne diffère pas de celle que l'on trouve en appliquant la méthode du n° 3 au cas où l'hodographe est la conique représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{\gamma} + \frac{y^2}{\alpha} = k,$$

pourvu que k soit convenablement déterminée en fonction des constantes A et C. En effet, la tangente à cette conique fait avec l'axe Ox un angle θ déterminé par l'équation

$$\operatorname{tang}\theta = -\frac{\alpha x}{\gamma y},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{x}{\gamma \sin\theta} = \frac{y}{-\alpha\cos\theta} = \frac{k}{\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta}},$$

puis

$$x = \frac{k\gamma\sin\theta}{\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta}},$$

$$y = \frac{-k\alpha\sin\theta}{\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta}},$$

$$dx = \frac{k\alpha\gamma\cos\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$dy = \frac{-k\alpha\gamma\sin\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F(\theta) = R = \frac{k\alpha\gamma}{(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

Dans ces conditions, l'équation différentielle établie au n° 3 devient

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{-k\alpha\gamma}{C(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

et ne diffère pas de l'équation (10) si l'on suppose

$$k = \frac{A}{C\alpha\gamma}.$$

11. Le calcul précédent suppose essentiellement qu'il s'agit d'une ellipse ou d'une hyperbole. Comment faut-il modifier l'expression de la force si l'on veut que l'hodographe soit une parabole? Nous observerons que sur une parabole de paramètre p, si la tangente en un point fait avec l'axe de symétrie un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \theta$, le rayon de courbure en ce point est égal à

$$\frac{p}{\cos^3\theta},$$

et l'expression de la force agissant sur un point de masse 1 sera

$$\frac{Cp}{r^2\cos^3\theta},$$

et l'on sera ramené au calcul du n° **7**, dans l'hypothèse où $a = 0$ et $B = \frac{p}{C}$.

12. Nous allons maintenant faire subir aux équations du mouvement

$$(11) \qquad \frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{g}{r}$$

(où g désigne l'accélération) une transformation qui va nous permettre de généraliser la question traitée au n° **10**. A cet effet, nous posons

$$y = ux,$$

et nous observons que l'équation

$$x\,dy - y\,dx = C\,dt,$$

par laquelle se traduit la loi des aires, se transforme comme il suit :

$$du = \frac{C}{x^2} dt, \tag{12}$$

ou bien

$$dt = \frac{x^2 \, du}{C}.$$

Mais l'une des équations (11) peut se transformer ainsi

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{g}{r},$$

ou bien, d'après la formule (12),

$$\frac{C^2}{x^3} \frac{d}{du}\left(\frac{dx}{x^2 \, du}\right) = \frac{g}{r},$$

ou bien encore

$$-\frac{C^2}{x^3} \frac{d^2\left(\frac{1}{x}\right)}{du^2} = \frac{g}{r}.$$

13. Soit donc

$$g = \frac{A}{x^m \varphi(x, y)},$$

A désignant une constante, φ une fonction homogène de degré μ. L'équation différentielle ci-dessus deviendra

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{x}\right)}{du^2} = \frac{-A}{C^2} \frac{1}{x^{m+\mu-3} \varphi(1, u)},$$

et son intégration se ramènera à des quadratures si l'on a, comme dans la question qui fait l'objet du n° 10,

$$m + \mu - 3 = 0.$$

La relation cherchée entre x et u, d'où l'on déduira l'équation de la trajectoire, sera

$$(13) \qquad \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{-A}{C^2}} \int_{u_0}^{u} \frac{(u-z)\,dz}{\varphi(1, z)} + hu,$$

u_0, h étant arbitraires.

Par exemple, si φ désigne la racine carrée d'un polynome entier du troisième degré, de telle sorte que l'expression de l'accélération soit

$$\frac{A r}{\sqrt{\alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^3}},$$

on aura

$$\varphi(1, z) = \sqrt{\alpha + 3\beta z + \gamma z^2 + \delta z^3},$$

et l'on pourra trouver une transformation telle que

$$z = M + N p \varepsilon,$$

où M, *N désignent des constantes*, ε *une nouvelle variable* et telle aussi que l'on ait

$$\alpha + 3\beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 = 4 p^3 \varepsilon - g_2 p \varepsilon - g_3,$$

g_2, g_3 étant encore des constantes. Alors l'équation (13) deviendra

$$\frac{1}{x} = \frac{N}{C}\sqrt{-A} \int_{v_0}^{v} (u - M - N p \varepsilon)\, d\varepsilon + hu,$$

en supposant

$$u = M + N p v, \qquad u_0 = M + N p u_0.$$

On en déduira

$$\frac{1}{x} = \frac{N^2}{C}\sqrt{-A} \int_{v_0}^{v} (p v - p \varepsilon)\, d\varepsilon + h(M + N p v),$$

ou bien

$$(14) \quad \frac{1}{x} = \frac{N^2}{C}\sqrt{-A}\,[(v - v_0) p v + \zeta v - \zeta v_0] + h(M + N p v);$$

et comme on a $y = ux$, on trouvera aussi

$$(15)\quad \frac{1}{y} = \frac{1}{\mathrm{M}pv + \mathrm{N}}\left(\frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{C}}\sqrt{-\mathrm{A}}\,[(v - v_0)pv + \zeta v - \zeta v_0] + h(\mathrm{M} + \mathrm{N}pv)\right),$$

et les équations (14) et (15) définiront la trajectoire.

14. On voit encore que l'équation différentielle établie au numéro précédent sera une équation différentielle linéaire du second ordre, si l'on a

$$m + \mu = 4.$$

Par exemple, si φ désigne un polynome entier, homogène et du second degré en x et y, de telle sorte que l'expression de la force soit, à un facteur constant près,

$$\frac{r}{x^2(ax^2 + 2bxy + cy^2)},$$

l'équation différentielle ci-dessus deviendra une équation différentielle linéaire, du second ordre, intégrable au moyen des séries entières. Le calcul des coefficients successifs d'une telle série, en fonction des deux premiers, s'effectuera au moyen d'une formule de récurrence que l'on pourra réduire à deux termes, après avoir fait, dans le polynome

$$\varphi(1, u) = a + 2bu + cu^2,$$

la substitution

$$cu + b = \sqrt{b^2 - ac}\, v,$$

dans laquelle v désignera la nouvelle variable.

[D]

DÉTERMINATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE QUI ADMETTENT LES SUBSTITUTIONS D'UN GROUPE QUELCONQUE DONNÉ, ET SEULEMENT CES SUBSTITUTIONS-LÀ;

PAR M. E. IAGGI.

Nous avons vu, dans une Note précédente [1], que toute fonction $F(x)$ qui admet des substitutions données qui la laissent invariable, admet aussi toutes les substitutions qu'on peut obtenir par inversion, itérations ou combinaisons quelconques des substitutions considérées, c'est-à-dire *tout le groupe de substitutions* qu'on peut former avec les substitutions données. Nous avons vu comment, étant données des substitutions, on peut former le groupe le plus simple qui les contienne. Enfin, nous avons démontré que toutes les fonctions complètes uniformes qui admettent les substitutions d'un groupe donné, et seulement ces substitutions-là, ou, dans notre langage abrégé, que toutes les fonctions *périodiques* uniformes d'un groupe G donné, sont, lorsqu'il en existe, les intégrales d'une équation de la forme

$$\frac{F'''(x)}{F'(x)} - \frac{3}{2}\frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} = \chi(x),$$

ou les quotients des intégrales Θ d'une certaine équation

(1) *Propriétés générales des substitutions à une variable et des fonctions qu'elles laissent invariables* (*Nouvelles Annales*, octobre 1901).

différentielle, linéaire et homogène, du second ordre, dont les coefficients ne dépendent que du groupe G donné.

Nous nous proposons, dans la Note présente, de déterminer, à l'aide de substitutions quelconques données, les coefficients de ces deux équations différentielles et la formule générale du multiplicateur des fonctions Θ.

1. Supposons donc que l'on se donne un groupe G de substitutions et, tout d'abord, plaçons-nous dans le cas où les fonctions $F(x)$ de groupe G sont des fonctions complètes uniformes; le groupe G doit alors être nécessairement *discontinu*.

Connaissant à l'avance la forme des équations que nous cherchons, on pourrait se proposer de les *construire*, c'est-à-dire, considérant leurs coefficients comme des inconnues, de chercher à construire ces coefficients de manière que les fonctions $F(x)$ restent invariables par les substitutions du groupe, et que les fonctions Θ se trouvent multipliées par un même facteur.

Nous préférons à cette méthode une méthode entièrement analytique qui, comme tous les théorèmes démontrés dans nos précédentes Notes sur ce sujet, a son origine dans l'équation

$$F(s) = F(x), \tag{1}$$

à laquelle satisfont toutes les substitutions du groupe donné et seulement celles-là, $F(x)$ étant l'une des fonctions cherchées.

Cette équation fonctionnelle est explicite par rapport à l'inconnue $F(x)$, mais est implicite par rapport aux données $s_i(x)$, et il serait assez difficile d'exprimer que l'équation (1), sous cette forme, a pour racines les substitutions du groupe donné. Nous allons d'abord chercher à mettre cette équation fonctionnelle sous forme explicite par rapport aux données $s_i(x)$. Cette transformation devient facile en faisant usage des *périodes*

$$p_i(x) = s_i(x) - x.$$

On a en effet, en posant $s = x + p$,

$$F(x+p) = F(x), \tag{2}$$

et l'on est conduit à développer $F(x+p)$ en série ordonnée par rapport aux puissances de p, dans l'hypothèse, bien entendu, où ce développement est possible.

Suppression faite du facteur p, c'est-à-dire de la racine nulle $p = 0$, qui correspond à la racine $s = x$ de l'équation (1), l'équation (2) prend la forme

$$F'(x) + p\frac{F''(x)}{1.2} + p^2\frac{F'''(x)}{1.2.3} + \ldots = 0. \tag{3}$$

Il s'agit d'exprimer que cette équation en p a pour racines les périodes $p_i(x) = s_i(x) - x$ *et seulement ces quantités-là*. Or nous avons vu (¹) comment s'expriment de telles conditions dans le cas où la série donnée est le développement d'une fonction *entière* :

Si

$$1 + \frac{A_1}{1}x + \frac{A_2}{1.2}x^2 + \ldots$$

est le développement d'une fonction entière, pour que cette fonction ait pour zéros d'ordre *un* des points donnés

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_i, \quad \ldots,$$

il est nécessaire et suffisant que les coefficients A satis-

(¹) *Relations entre les zéros et les coefficients des fonctions entières* et *Sur les zéros des fonctions entières* (*Nouvelles Annales*, janvier 1901 et mai 1902.

fassent à des relations de la forme

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \sum_i \left(g'_i(0) - \frac{1}{a_i} \right), \\
A_2 &= \sum_i \left(g''_i(0) - \frac{1}{a_i^2} \right) + \left[\sum_i \left(g'_i(0) - \frac{1}{a_i} \right) \right]^2, \\
A_3 &= \sum_i \left(g'''_i(0) - \frac{2}{a_i^3} \right) \\
&\quad + \sum_i \left(g''_i(0) - \frac{1}{a_i^2} \right) \sum_i \left(g'_i(0) - \frac{1}{a_i} \right) \\
&\quad + \left[\sum_i \left(g'_i(0) - \frac{1}{a_i} \right) \right]^3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

où les quantités $g'_i(0)$, $g''_i(0)$, ... $(i = 1, 2, \ldots)$, sont les valeurs pour $x = 0$ des dérivées par rapport à x de certaines fonctions entières $g_i(x)$ qui rendent convergente la série

$$\sum_i \left(g'_i(x) + \frac{1}{x - a_i} \right),$$

ou, ce qui revient au même, sont des quantités qui rendent convergentes les séries indiquées dans les relations précédentes

$$\sum_i \left(g_i^{(n)}(0) - \frac{(n-1)!}{a_i^n} \right);$$

lorsque $\sum_i \frac{1}{a_i}$ est convergente, *il suffit* d'annuler, dans les relations précédentes, toutes les quantités $g_i^{(n)}(0)$ (mais cela n'est pas *nécessaire*).

A l'égard de la série (3), où la variable est p et non pas x, on doit remarquer que :

1° Les racines p_i sont d'ordre *un*, sauf lorsque x est en un point multiple du groupe, ce que nous ne supposons pas; nous avons, en effet, démontré dans une précédente Note que les racines s_i de l'équation (1), et par suite les racines p_i des équations (2) et (3), sont d'ordre *un* lorsque x n'est pas un point multiple; le premier membre de l'équation (3) n'est le développement d'une fonction entière qu'autant que $\mathrm{F}(x)$ est une fonction entière.

2° Supposons donc tout d'abord qu'il existe des fonctions $\mathrm{F}(x)$ entières du groupe donné; en exprimant que les zéros de la série en p (3) sont les quantités $p_i(x)$ et sont des zéros d'ordre *un*, nous aurons les identités

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{F}''(x)}{\mathrm{F}'(x)} &= \sum_i \left(h_i(x) - \frac{1}{p_i(x)}\right),\\
\frac{1}{3}\frac{\mathrm{F}'''(x)}{\mathrm{F}'(x)} &= \sum_i \left(k_i(x) - \frac{1}{p_i^2(x)}\right)\\
&\quad + \left[\sum_i \left(h_i(x) - \frac{1}{p_i(x)}\right)\right]^2,\\
\frac{1}{4}\frac{\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(x)}{\mathrm{F}'(x)} &= \sum_i \left(l_i(x) - \frac{2!}{p_i^3(x)}\right)\\
&\quad + \sum_i \left(k_i(x) - \frac{1}{p_i^2(x)}\right)\sum_i \left(h_i(x) - \frac{1}{p_i(x)}\right)\\
&\quad + \left[\sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i(x)}\right)\right]^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

où les quantités h_i, k_i, l_i, ... rendent convergentes les séries indiquées; lorsque $\sum \frac{1}{p_i^\omega}$ est convergente, on peut supprimer ces quantités dans les séries relatives aux puissances des p_i supérieures à ω; en particulier, si $\sum \frac{1}{p_i}$ est convergente, *il suffit* que soient satisfaites les relations (4), dans lesquelles on annule toutes ces quantités h_i, k_i, ... Toutes ces quantités h_i, k_i, ... sont généralement fonctions de x, car il ne faut pas oublier que l'identification se fait par rapport à p.

Enfin cette identification n'a un sens que si $F(x+p)$ est développable par la série de Taylor *dans une aire qui contient, avec le point x, tous les transformés*

$$s_i(x) = x + p_i(x)$$

du point x par les substitutions du groupe.

Dans ces conditions, les relations (4) *expriment* que les équations (3), (2), (1) sont satisfaites respectivement par les périodes p_i et les substitutions s_i du groupe et *seulement par celles-là,* et par conséquent que la fonction $F(x)$ *est une fonction entière du groupe donné.*

Or, la première des relations (4) suffit à déterminer les fonctions entières du groupe donné; on en tire, avec deux constantes arbitraires,

$$(5) \qquad F(x) = \lambda \int e^{2\int \sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right) dx} dx + \mu$$

ou

$$(5') \qquad F(x) = \lambda \int \prod_i e^{2\int \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right) dx} dx + \mu.$$

$F(x)$ étant ainsi déterminée, les équations (4) autres que la première donnent par l'élimination de F des relations entre les périodes, c'est-à-dire entre les substitutions du groupe. Nous ne chercherons pas, au moins en ce moment, à interpréter ces relations et nous nous contenterons de dire :

S'il existe des fonctions uniformes périodiques entières du groupe donné de substitutions, ces fonctions sont données par les formules (5), *où les quantités h_i,* *fonctions de x, rendent convergente la série*

$$\sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right),$$

ou, ce qui est identique, rendent convergent le produit

$$\lambda \prod_i e^{2\int \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right) dx},$$

et, lorsque $\sum \frac{1}{p_i}$ est convergente, *il suffit* d'annuler ces quantités h_i.

Toutes les fonctions uniformes du groupe donné sont alors, comme on sait, données par la formule

$$\frac{\lambda\, F(x) + \mu}{\nu\, F(x) + \rho},$$

où $F(x)$ est l'une des fonctions précédentes.

2. Considérons maintenant le cas de fonctions uniformes du groupe donné, qui ne sont pas des fonctions entières. L'équation (2) se met sous la forme

$$\frac{\Theta_1(x+p)}{\Theta_2(x+p)} = \frac{\Theta_1(x)}{\Theta_2(x)}, \tag{6}$$

où Θ_1 et Θ_2 sont des fonctions entières (auxquelles nous avons donné le nom de *fonctions à multiplicateur*), en sorte que le cas des fonctions $F(x)$ entières est compris dans celui-ci.

L'équation (6) se met sous la forme

$$\Theta_2(x)\,\Theta_1(x+p) - \Theta_1(x)\,\Theta_2(x+p) = 0,$$

où le premier membre est une fonction *entière* de p. Supposons que les fonctions Θ soient développables en série dans une aire comprenant, avec le point x, tous les transformés $s_i = x + p_i$ de ce point x; l'équation précédente se met sous la forme

$$(7)\quad \Theta_2\Theta'_1 - \Theta_1\Theta'_2 + p\,\frac{\Theta_2\Theta''_1 - \Theta_1\Theta''_2}{1.2} + p^2\,\frac{\Theta_2\Theta'''_1 - \Theta_1\Theta'''_2}{1.2.3} + \ldots = 0,$$

où nous avons supprimé le facteur p, qui correspond à la racine $s = x$ de l'équation (1), et écrit $\Theta^{(n)}$ au lieu de $\dfrac{d^n\Theta(x)}{dx^n}$.

Les périodes données $p_i = s_i - x$ doivent être les racines de cette équation et, de plus, elles en sont racines d'ordre *un*.

Le premier membre de l'équation (7) étant le développement en série d'une fonction *entière* de p, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les zéros de cette série soient les périodes données p_i, et seulement ces quantités-là, et que tous ces zéros soient d'ordre *un*, s'expriment, selon notre théorème général, par les identités

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\frac{\Theta_2\Theta''_1 - \Theta_1\Theta''_2}{\Theta_2\Theta'_1 - \Theta_1\Theta'_2} &= \sum_i\left(h_i - \frac{1}{p_i}\right),\\
\frac{1}{3}\,\frac{\Theta_2\Theta'''_1 - \Theta_1\Theta'''_2}{\Theta_2\Theta'_1 - \Theta_1\Theta'_2} &= \sum_i\left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right) + \left[\sum_i\left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)\right]^2,\\
\frac{1}{4}\,\frac{\Theta_2\Theta^{\text{IV}}_1 - \Theta_1\Theta^{\text{IV}}_2}{\Theta_2\Theta'_1 - \Theta_1\Theta'_2} &= \sum_i\left(l_i - \frac{2}{p_i^3}\right)\\
&\quad + \sum_i\left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right)\sum\left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)\\
&\quad + \left[\sum_i\left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)\right]^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

où les fonctions de x, h_i, k_i, l_i, ... rendent convergentes les séries indiquées dans les seconds membres et peuvent être annulées identiquement lorsque $\sum_i \frac{1}{p_i(x)}$ est convergente.

Soit $\Phi(x)$ la fonction déterminée, à un facteur constant près, par la formule

$$(9) \qquad \Phi(x) = e^{2\int \sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right) dx} = \prod_i e^{2\int \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right) dx},$$

et posons

$$(9') \qquad \left\{ \begin{aligned} \Psi(x) &= 3\sum_i \left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right) + 3\left[\sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)\right]^2 \\ &= 3\sum_i \left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right) + 3\,\frac{\Phi'^2(x)}{4\,\Phi^2(x)}. \end{aligned} \right.$$

Les deux premières équations (8) donnent :

$$\Theta_2\Theta_1' - \Theta_1\Theta_2' = \Phi,$$
$$\Theta_2\Theta_1'' - \Theta_1\Theta_2'' = \Phi',$$
$$\Theta_2\Theta_1''' - \Theta_1\Theta_2''' = \Phi\Psi.$$

Dans ce système de trois équations, remplaçons la troisième par celle qu'on obtient en retranchant celle-ci de la dérivée de la seconde et considérons le système de trois équations

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Theta_2\Theta_1' - \Theta_1\Theta_2' &= \Phi, \\ \Theta_2\Theta_1'' - \Theta_1\Theta_2'' &= \Phi', \\ \Theta_2'\Theta_1'' - \Theta_1'\Theta_2'' &= \Phi'' - \Phi\Psi. \end{aligned} \right.$$

Ces équations déterminent Θ_1 et Θ_2; multipliant les deux membres de la première par Θ_1'', ceux de la seconde par $-\Theta_1'$, ceux de la troisième par Θ_1, et ajoutant, Θ_2 se trouve éliminée et l'on a

$$\Phi\Theta_1'' - \Phi'\Theta_1' + (\Phi'' - \Phi\Psi)\Theta_1 = 0.$$

En éliminant de la même manière Θ_1, on retombe sur la même équation où Θ_1 est remplacée par Θ_2.

Il s'ensuit que toutes les fonctions à multiplicateur du groupe

$$\Theta = \lambda \Theta_1 + \mu \Theta_2,$$

sont les intégrales de l'équation linéaire, homogène et du second ordre :

$$\Phi \Theta'' - \Phi' \Theta' + (\Phi'' - \Phi \Psi) \Theta = 0. \tag{11}$$

Les équations (8) autres que les deux premières qui nous fournissent l'équation (11) donneraient, par l'élimination de Θ_1 et Θ_2, des relations nécessaires pour l'existence des fonctions $F(x)$, entre les périodes ou les substitutions du groupe donné. Nous pouvons donc conclure, sans d'ailleurs interpréter d'une façon plus complète ces relations entre les substitutions du groupe : *s'il existe des fonctions uniformes* $F(x)$ *du groupe donné, ces fonctions sont les quotients des fonctions* Θ, *intégrales de l'équation* (11).

3. Désignons par $\theta(s, x)$ le rapport

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta(x)},$$

c'est-à-dire le multiplicateur commun de toutes les fonctions Θ du groupe, correspondant à une substitution s du groupe.

Si $F(x)$ est l'une des fonctions périodiques du groupe, on a :

$$F(s) = F(x),$$

$$F'(s)\, ds = F'(x)\, dx \tag{12}$$

pour toute substitution s du groupe. Soit

$$F(x) = \frac{\Theta_1(x)}{\Theta_2(x)},$$

d'où

$$(13)\quad \begin{cases} F'(x) = \dfrac{\Theta_2(x)\Theta'_1(x) - \Theta_1(x)\Theta'_2(x)}{\Theta_2^2(x)} = \dfrac{\Phi(x}{\Theta_2^2(x)}, \\ F'(s) = \dfrac{\Phi(s)}{\Theta_2^2(s)}. \end{cases}$$

L'équation (12) donne alors

$$\frac{\Phi(s)\,ds}{\Theta_2^2(s)} = \frac{\Phi(x)\,dx}{\Theta_2^2(x)}$$

ou

$$\frac{\Theta_2^2(s)}{\Theta_2^2(x)} = \frac{\Phi(s)\,ds}{\Phi(x)\,dx},$$

et par conséquent

$$(14)\qquad \theta(s, x) = \pm\sqrt{\frac{\Phi(s)\,ds}{\Phi(x)\,dx}},$$

où s est une substitution quelconque du groupe. Telle est la formule du *multiplicateur* $\theta(s, x)$ *de toutes les fonctions* Θ *du groupe*.

Il y a ambiguïté sur le signe; les applications que nous avons faites à des cas déjà étudiés complètement par d'autres méthodes nous ont montré qu'il faut prendre tantôt le signe $+$ et tantôt le signe $-$; mais nous n'avons pu lever cette ambiguïté dans la formule générale.

Les relations (8), (10), (11) que nous venons de trouver conviennent au cas des fonctions entières; il suffit, en effet, de supposer $\Theta_2 = \text{const.}$ dans les relations (8) et (10). Alors, l'une des fonctions entières $F(x)$ est la fonction Θ, et l'on voit que la fonction $\Phi(x)$ donnée par la formule (9) est la dérivée de l'une de ces fonctions entières (13), ce qui concorde avec les formules (5) que nous avons démontrées directement dans l'hypothèse où existent des fonctions uniformes entières du groupe donné.

Dans ce cas, l'équation (11) aux fonctions à multiplicateur doit admettre la solution $\Theta = \text{const.}$ Il est donc nécessaire que les substitutions du groupe satisfassent à l'identité

$$(15) \qquad \Phi'' - \Phi\Psi = 0.$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, l'équation en Θ se réduit à

$$(16) \qquad \Phi\theta'' - \Phi'\theta' = 0,$$

d'où

$$\theta = \lambda \int \Phi \, dx + \mu,$$

et ces fonctions Θ sont des fonctions périodiques *entières* du groupe, l'une des intégrales de (16) se réduisant à une constante.

La relation (15), *entre les substitutions du groupe donné, est donc la condition nécessaire et suffisante pour que, parmi les fonctions périodiques du groupe donné, il en existe qui soient entières.*

Cette relation (15) n'est d'ailleurs autre que la première des relations entre les substitutions du groupe, qu'on déduit de l'élimination de $F'(x) = \lambda\,\Phi(x)$, entre les conditions (4) établies directement dans l'hypothèse où existent des fonctions entières $F(x)$ du groupe donné. Si dans les relations (8) on suppose $\Phi'' = \Phi\Psi$, on retrouve les relations (4).

4. Formons enfin l'équation aux quotients des intégrales de l'équation en Θ; on trouve sans difficulté, en se servant des équations (10) et (13),

$$(17) \qquad 2\frac{F'''}{F'} - 3\frac{F''^2}{F'^2} = 6\,\frac{\Phi''}{\Phi} - 3\,\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} - 4\Psi.$$

Telle est l'équation *aux fonctions uniformes du groupe donné,* lorsqu'il en existe ([1]).

Lorsqu'il existe des fonctions uniformes du groupe donné, ces fonctions seront complètement déterminées par l'équation (17) ou par l'équation (11) aux fonctions à un multiplicateur lorsqu'on aura formé les fonctions Φ et Ψ par les formules (9) et (9').

Lorsque la série $\sum_i \frac{1}{p_i}$ est convergente, il n'y a aucune difficulté, car on n'aura qu'à annuler les quantités h_i et k_i dans les formules (9) pour avoir Φ et Ψ. Lorsque cette série $\sum_i \frac{1}{p_i}$ n'est pas convergente, il faut introduire des fonctions $h_i(x)$ qui rendent convergente la série

$$\sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right).$$

Lorsque $\sum \frac{1}{p_i^2}$ n'est pas non plus convergente, il faut introduire des fonctions $k_i(x)$ telles que

$$\sum_i \left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right)$$

soit convergente. On ne sait pas autre chose sur ces fonctions $h_i(x)$, $k_i(x)$; on peut donc trouver d'une infinité de manières des fonctions h_i, k_i répondant à ces conditions. Toutefois, il est certain que ces fonctions ne donneront des fonctions $F(x)$ admettant les substitutions du groupe, et *seulement* celles-là, qu'autant qu'elles seront *convenablement choisies*. Il reste donc

---

([1]) Tous ces résultats ont été publiés pour la première fois par l'auteur dans ses *Recherches sur la théorie des fonctions* (Besançon, 1897).

une ambiguïté dans la détermination des fonctions périodiques uniformes d'un groupe donné, lorsque la série $\sum_i \frac{1}{p_i}$ n'est pas convergente; et si, dans un cas où $\sum_i \frac{1}{p_i}$ n'est pas convergente, on a obtenu des fonctions uniformes $F(x)$ par un certain choix de fonctions h_i, k_i, il sera nécessaire ensuite de vérifier que les fonctions $F(x)$ obtenues n'admettent que les substitutions du groupe.

Pour former les fonctions Φ et Ψ dans les applications, on remarquera que les substitutions d'un groupe d'ordre *un* sont obtenues par itération ou inversion de l'une d'elles et, par conséquent, ont entre elles quelque chose de commun; on décomposera donc le groupe donné en sous-groupes d'ordre *un :* chacun de ces sous-groupes donnera un facteur dans Φ et un terme dans la série $\sum_i \left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right)$ qui forme le terme indépendant de Φ dans Ψ. Dans chaque sous-groupe d'ordre *un*, il sera bon d'associer deux à deux les périodes des substitutions inverses les unes des autres sous la forme

$$\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_{-i}}, \quad \frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{p_{-i}^2}.$$

5. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé qu'il existait des fonctions complètes uniformes du groupe donné, ce qui supposait implicitement que le groupe était discontinu. Nous savons qu'on ne peut affirmer l'existence de ces fonctions *uniformes,* et même que, lorsque le groupe est *continu* (*improprement*), ce groupe ne peut appartenir qu'à des fonctions complètes multiformes périodiques qui sont *linéales ou aréales* (*improprement*). Cette hypothèse de l'existence de fonctions *uniformes* du groupe donné nous a permis d'exprimer

les conditions *nécessaires et suffisantes* (8) pour que l'équation (1),

$$F(s) = F(x),$$

soit satisfaite par toutes les substitutions du groupe donné, *et seulement par celles-là,* et nous en avons déduit que, *nécessairement,* les fonctions $\Theta(x)$ et $F(x)$ sont respectivement les intégrales des équations (11) et (17), ce qui donne un moyen de recherche des fonctions uniformes d'un groupe donné.

Lorsqu'il n'existe pas de fonction uniforme du groupe donné, on ne peut affirmer qu'il existe des fonctions complètes multiformes périodiques de ce groupe, ni que ces fonctions pourront être obtenues de la même manière que les fonctions uniformes. Cependant nous savons que certaines fonctions multiformes sont décomposables en facteurs primaires, que par suite ces fonctions multiformes satisfont aux conditions que nous avons établies pour que leurs zéros soient des zéros donnés ([1]); d'autre part, nous savons que, quelle que soit la fonction $F(x)$, les périodes p_i sont des racines *d'ordre un* de l'équation (2) : par conséquent, *s'il existe des fonctions complètes multiformes périodiques d'un groupe donné qui soient dans les conditions précédentes, ces fonctions seront déterminées, au moyen des substitutions du groupe, par les équations* (11) *ou* (17), ceci, dans l'hypothèse où n'existent pas des fonctions uniformes du groupe ([2]).

On est donc conduit dans tous les cas à former les équations (11) et (17). Si leurs intégrales sont uniformes,

---

([1]) *Relations entre les zéros et les coefficients des fonctions entières* et *Sur les zéros des fonctions entières* (*Nouvelles Annales,* janvier 1901 et mai 1902).

([2]) *Recherches sur la théorie des fonctions* (Besançon, 1897).

on peut être assuré qu'elles admettent les substitutions données, et dans ce cas, si $\sum_i \frac{1}{p_i}$ est convergente, elles n'admettent *certainement* que ces substitutions-là; si les intégrales de (11) et (17) sont multiformes, il y aura lieu de vérifier si ces fonctions admettent les substitutions du groupe, et seulement celles-là.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Question de cours. — 1° *Définir la fonction analytique*

$$u = \operatorname{arc\,tang} z$$

pour des valeurs réelles ou imaginaires de z; *donner les propriétés les plus importantes de cette fonction.*

2° *Même question pour la fonction*

$$v = \mathrm{L}z,$$

où L *désigne un logarithme népérien.*

3° *Faire voir comment ces deux fonctions* u *et* v *se réduisent l'une à l'autre.*

Problème. — 1° *Étant donnée la fraction rationnelle*

$$f(x) = \frac{x^2 + 6(\lambda + 1)x + 9\lambda + 8}{\lambda x^4 + 6\lambda x^3 + (1 + 9\lambda)x^2 + 6x + 9},$$

déterminer quatre polynomes entiers en x, M, N, P, Q *tels que l'on ait*

$$f(x) = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Q}}\right),$$

le polynome P *n'ayant que des racines simples.*

2° *Déterminer le paramètre* λ *de telle sorte que l'intégrale* $\int f(x)\,dx$ *soit algébrique.*

3° *Déterminer la valeur de l'intégrale quand* λ *a une valeur quelconque.* (Lille, novembre 1900.)

SOLUTION.

On trouve, en appliquant la méthode d'Hermite :

$$f(x) = \frac{\lambda + 1}{\lambda x^2 + 1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+3}\right).$$

Pour que l'intégration n'introduise pas de transcendante, il faut et il suffit que $\lambda = -1$.

En général,

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{x+3} + \frac{(1+\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{arc\,tang} x\sqrt{\lambda} + \text{const.}$$

QUESTIONS.

1934. Étant donnée une parabole P, on considère les paraboles Q admettant pour tangente au sommet l'axe de P, et touchant la tangente et la normale à P en un même point. La parabole Q touchera constamment deux développées de paraboles. (E.-N. BARISIEN.)

1935. On dit qu'un pentagone gauche est conjugué à une quadrique quand la droite qui joint deux quelconques de ses sommets passe par le pôle du plan des trois autres :

1° Les sommets de deux pentagones conjugués à une même quadrique sont sur une même quadrique.

2° Les sommets d'un pentagone et d'un tétraèdre conjugués à une même quadrique sont sur une même biquadratique.

(E. DUPORCQ.)

1936. On dit qu'un hexagone gauche est conjugué à une quadrique quand le plan défini par trois quelconques de ses sommets est conjugué du plan des trois autres :

1° Les sommets d'un hexagone et d'un tétraèdre conjugués à une même quadrique sont sur une même quadrique.

2° Il existe deux sphères conjuguées à un même hexagone. Leurs centres appartiennent à tous les hyperboloïdes équilatères circonscrits à l'hexagone. (E. DUPORCQ.)

DU RÔLE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LA FORMATION DE L'ESPRIT (¹);

Par M. BLUTEL,
Professeur de Mathématiques spéciales
au lycée Saint-Louis.

Tous, vous avez étudié les Mathématiques : quelques-uns avec un plaisir très vif, servis en cela par un goût naturel et par l'excellente direction d'un maitre éclairé, quelques autres avec une curiosité un peu sceptique, le plus grand nombre, sans doute, parce que les Mathématiques font partie du programme des études et qu'elles figurent à celui des examens. Très peu, je le crains, ont pu trouver une solution à ce problème qu'ils se sont posé bien souvent : A quoi sert l'étude des Mathématiques?

Je vais tenter de vous éclairer sur ce point. Je le pourrais en vous montrant l'importance sans cesse grandissante des applications des Mathématiques. Le développement ininterrompu de la Mécanique, qui est une caractéristique de notre époque, les découvertes que la Physique nous apporte chaque jour en mettant les forces de la nature au service de l'homme, sollicitent l'attention de tout esprit éclairé qui veut être de son temps. Or la Mécanique et la Physique trouvent dans les Mathématiques une base solide, indispensable. On ne peut fréquenter une famille aussi unie sans en ren-

(¹) Extrait du discours prononcé en 1901 à la distribution des prix du Concours général.

contrer le chef naturel. Vous sentez tous l'importance de ce lien, mais il faudrait entrer dans des détails trop techniques pour vous la révéler d'une façon indiscutable; ce n'est ni le moment ni le lieu.

Je pourrais encore vous signaler les emprunts que font aux Mathématiques les Sciences qui en paraissent les plus éloignées : l'Anatomie dans l'étude de la machine si délicate qu'est le corps humain, le Droit dans la question si complexe des successions, les Sciences juridiques dans les questions d'affaires, les Sciences économiques et politiques dans tout ce qui concerne l'assiette de l'impôt, la Statistique et les Assurances, utilisent des connaissances mathématiques. Mais ces objets si divers n'intéressant chacun qu'une fraction d'entre vous risqueraient de disperser votre attention. Je crois d'ailleurs mieux répondre à votre attente en essayant de vous faire apprécier les bienfaits que vous pouvez retirer de la Mathématique au point de vue de la formation de votre esprit; en vous montrant, dans l'étude de cette Science en général, ce que Tyndall dit de la Géométrie en particulier, c'est-à-dire un moyen et non une branche de l'éducation.

Quelques-uns d'entre vous connaissent les travaux que des philosophes profonds, des penseurs de génie ont consacrés non seulement à la Mathématique, mais aux applications de cette Science dans un domaine autre que le sien propre; à ceux-là, je n'ai rien à apprendre. Je n'aurai pas d'ailleurs la témérité de m'aventurer sur un terrain où Descartes, Leibniz et Auguste Comte, pour ne citer que les morts illustres, ont laissé des empreintes ineffaçables.

Mais, depuis longtemps déjà, j'assiste à la formation de votre pensée, je souffre avec vous des difficultés que vous rencontrez, je m'acharne à la recherche de la comparaison, à la poursuite de l'expression qui vous rendront abordables des idées trop abstraites, je me réjouis lorsque l'aspect de votre visage s'éclairant tout à coup m'a révélé que vous goûtez enfin le plaisir divin de la compréhension ; ce sont là les peines et les joies de notre profession, et vous trouverez tout naturel que je ne vous cache rien des réflexions qu'elles m'ont suggérées.

Or, parmi les forces de l'activité intellectuelle dont le développement est favorisé par l'étude des Mathématiques, je placerai au premier rang l'attention. S'il est vrai que l'exercice répété d'une fonction est le meilleur moyen d'en fortifier les organes, je ne connais pas de procédé plus sûr que les Mathématiques pour affermir le ressort de l'attention. Cela tient, tout d'abord, à la méthode purement déductive qui caractérise leur enseignement dans sa phase élémentaire. Partant d'un petit nombre de points admis une fois pour toutes, vos maîtres, par une déduction sans cesse renouvelée, vous conduisent peu à peu à un ensemble de connaissances contenues évidemment dans les hypothèses du départ, mais dont le lien exige, pour être aperçu et retenu, une application de tous les instants. Les résultats sur lesquels ils s'appuieront demain ont été établis dans la leçon du jour ; non seulement la connaissance en est nécessaire pour la compréhension des idées nouvelles, mais il est indispensable, le plus souvent, d'avoir présent à l'esprit tout le détail progressif de leur démonstration. Un moment d'inattention et le fruit de plusieurs heures d'efforts est compromis. Un coup d'œil accordé au nuage qui passe ou à l'insecte qui bourdonne au milieu d'un raisonnement en fait perdre le fil ; c'en est fait du bénéfice que vous alliez recueillir.

Et cela s'applique non pas à telle ou telle leçon, à telle ou telle série de leçons, mais à tout le cours, l'enchaînement nécessaire de ses diverses parties exigeant chaque fois votre présence complète.

La moins intéressante, à ce qu'il semble, parmi les applications de l'attention, est celle qui touche à l'exercice du calcul; et cependant je veux y arrêter un instant votre pensée, tant elle a de conséquences! Le calcul est un instrument indispensable dans l'étude des Mathématiques, et, si vous voulez bénéficier pleinement de ses avantages, il vous faut apprendre à le manier avec aisance. Rien n'est plus facile, d'ailleurs, c'est une question de méthode. En vous astreignant dès votre enfance à l'observation rigoureuse des règles élémentaires, vous arriverez à calculer sûrement; la sécurité que vous éprouverez alors vous facilitera l'exercice des autres facultés, et je vous montrerai dans un instant l'intérêt qui s'y attache. Vous avez tous entendu parler de ces calculateurs prodiges qui se livrent aux opérations les plus extraordinaires tout en songeant à d'autres objets; nous devons donc admettre que la répétition presque mécanique des procédés opératoires du calcul n'exige pas, en somme, autant d'effort qu'il paraît tout d'abord. Vous agirez sagement et vous vous éviterez des fatigues bien inutiles en essayant, le plus tôt possible, de vous libérer du tribut imposé à votre esprit par cette manifestation un peu inférieure, je le veux bien, de l'activité intellectuelle. Bon nombre, parmi vos camarades, candidats aux grandes écoles scientifiques, se sont maintes fois repentis d'avoir négligé ou sacrifié le développement d'un instrument si précieux; ils ont compris trop tard que l'inexpérience du calcul leur faisait perdre trop souvent la marche des idées.

On vous a signalé peut-être, et c'est chose facile, les ridicules d'une attention trop suivie. Il est vrai qu'un des résultats de cette tension de l'esprit vers une idée toujours la même est d'isoler du monde celui qui s'y livre sans répit. Beaucoup de personnes occupées presque uniquement à des travaux mathématiques ont éprouvé sur elles-mêmes cet avantage ou cet inconvénient. Les obstacles de la rue, les distractions familières aux autres passants n'empêchent point le mathématicien qui va par la ville de poursuivre et quelquefois d'achever avec succès un raisonnement commencé dans le silence et le recueillement du cabinet. A le voir passer, les yeux abaissés vers la terre ou fixés devant lui, comme dans le vide, étranger ou indifférent à tout ce qui l'entoure, on sourit.

« Un jour, Ampère se rendait à son cours. Il trouve sur sa route un petit caillou qu'il ramasse et dont il se met à examiner curieusement les veines bigarrées. Tout à coup le cours qu'il doit faire revient à son esprit; il tire sa montre de sa poche et, s'apercevant que l'heure approche, il double précipitamment le pas, remet soigneusement le caillou dans sa poche et lance sa montre par-dessus le parapet du pont des Arts. » L'exemple est plaisant et il n'est pas défendu d'en sourire; mais qu'il vous serve aussi de leçon, et si vous rencontrez ainsi quelque égaré tout entier à sa pensée, avant de vous en égayer, demandez-vous si vous n'avez pas croisé un Ampère ou un Gay-Lussac dont le cerveau est en train d'enfanter quelque merveille.

L'application à la Mathématique ne développe pas seulement l'attention; elle crée une faculté des plus hautes et des plus précieuses : l'abstraction. Dès les débuts de la Géométrie, l'élève à qui l'on montre sur le tableau la figure constituée par un triangle ne voit tout d'abord que l'image particulière placée sous ses yeux; à la longue, il arrive à laisser de côté les caractères propres à l'objet concret, et, lorsqu'on prononce devant lui le mot de *triangle,* il se figure aisément tous les triangles possibles : c'est le propre de l'abstraction, et l'abstraction est la mère de la généralisation.

L'Algèbre constitue le domaine par excellence des formes abstraites, mais la marche qui lui est familière n'est peut-être pas sans danger. Dépouillant les objets de leurs qualités particulières, elle les fait entrer dans ses formules comme des êtres dépourvus de tout caractère personnel. Les transformations qu'elle fait ensuite subir à ses équivalences portent alors sur des symboles doués d'une signification si générale que le sens en peut disparaitre complètement pour les esprits préoccupés surtout d'appliquer avec justesse les règles du calcul. A de semblables cerveaux, et je suis convaincu qu'ils forment la majorité, l'étude de l'Algèbre doit donc être dispensée avec beaucoup de précautions. Par de fréquentes applications numériques, on les ramènera à une réalité qu'ils pourraient être tentés d'oublier; ils finiront par se convaincre que le symbole tient généralement la place de grandeurs mesurables et que l'Algèbre ne pourra leur rendre de réels services que s'ils l'appliquent à de pareils objets.

Cette faculté de l'abstraction se développe d'ailleurs de façons très diverses suivant le tempérament. La plupart des jeunes gens n'arrivent à la possession d'un caractère général qu'en passant par l'observation d'un grand nombre d'objets particuliers; ils suivent la marche rationnelle et si profitable du concret à l'abstrait. L'étude de la Géométrie est naturellement la plus aisée aux esprits de cette trempe, en raison de l'aide qu'ils rencontrent à chaque pas dans la figure pour étayer leurs déductions. Ce sont presque toujours des cerveaux bien préparés pour l'observation, aptes à percevoir les cas particuliers dans les catégories générales, prêts à aborder l'étude des Sciences expérimentales. D'autres, au contraire, en plus petit nombre, n'ont de goût que pour l'idée présentée sous sa forme abstraite, pour l'Arithmétique et pour l'Algèbre. Ce sont les tempéraments de purs mathématiciens. Malheureusement, chez quelques-uns d'entre eux, cette puissance de l'abstraction s'accompagne d'une répugnance singulière pour l'examen des choses concrètes dont l'intérêt ne leur apparaît point.

Ils font quelquefois d'excellentes études mathématiques; ils se refusent d'une façon systématique à toute étude des Sciences expérimentales. A ceux-là je me permettrai de donner un conseil. La vérité n'est point une. Les bons esprits sont les esprits accessibles à toutes les manifestations de la pensée, et ceux-là vont à l'encontre de notre enseignement qui se cantonnent, dès le lycée, dans une étroite spécialité. Qu'ils ne croient point d'ailleurs arriver ainsi plus sûrement à la réalisation de quelque ambition de carrière; l'accès de nos grandes écoles scientifiques n'est vraiment facile qu'à ceux dont un sage éclectisme a dirigé les pas aussi bien dans les voies largement ouvertes de l'expérience que vers les sommets plus arides de l'abstraction.

J'arrive maintenant à une des opérations les plus délicates et les plus profitables de l'intelligence, à l'application par excellence de notre esprit, celle vers laquelle doit tendre l'éducation de toutes nos facultés, je veux dire le jugement. L'enseignement des Mathématiques se bornant à son domaine naturel peut fournir au jugement les meilleures occasions de s'exercer. Il est évident que l'exposition par le maître, en un langage précis, d'idées simples reliées les unes aux autres d'une façon parfaite, doit donner à l'élève le désir de présenter ses pensées sous une forme aussi nette en lui inspirant l'horreur des raisons vagues et des questions mal posées. Mais ce n'est pas le seul avantage à cet égard de l'enseignement mathématique. Je conviens que, les nécessités des examens obligeant le professeur soucieux de sa responsabilité à ne donner à ses élèves que des notions bien arrêtées, le temps lui manque trop souvent pour comparer les diverses méthodes susceptibles de conduire aux mêmes résultats et pour décider qu'elle est la meilleure; mais, où l'exercice du jugement trouve à s'appliquer, c'est dans l'effort personnel de l'élève, que cet effort soit dirigé et contrôlé par le maître, comme dans l'interrogation au tableau, ou qu'il soit de nature plus intime, comme dans la recherche de la solution d'un problème.

Le bénéfice que le jugement peut retirer de cette gymnastique varie suivant la branche des mathématiques à laquelle on l'applique. Dans l'enseignement élémentaire, la Géométrie possède à cet égard une supériorité bien marquée. Les relations entre les moyens et le but doivent rester en pleine lumière à chaque instant de la déduction, et à partir du moment où ce lien n'est plus perçu, il est inutile de continuer. En Algèbre, au contraire, le jugement de l'élève ne trouve guère à s'exercer que dans deux phases bien distinctes : au début, lorsqu'il s'agit d'enfermer dans des formules les données et les inconnues de la question; à la fin, quand il faut interpréter les résultats contenus dans ces mêmes formules convenablement modifiées. Dans l'intervalle, l'élève abandonné à ses seules forces doit généralement se borner à des opérations un peu mécaniques.

Quelques-uns parmi vous, rebutés par des tentatives inutiles dans la recherche de la solution d'un problème, sont sans doute convaincus que la réussite dans cette découverte est uniquement le résultat des qualités naturelles de son auteur; je voudrais les dissuader. En posant à l'élève des questions sagement graduées, bien en rapport avec l'étendue de son savoir, on l'habitue peu à peu à chercher dans ses propres moyens la réponse à des problèmes de plus en plus compliqués. Comparant les connaissances qu'il possède au profit qu'il désire en tirer, il écarte d'une façon méthodique celles dont il ne peut attendre aucun secours pour l'objet immédiat, et il découvre, par la seule puissance de son jugement, l'arme qui doit vaincre. Le plaisir de la réussite le conduit à recommencer, et c'est ainsi qu'au lieu de l'élève passif, préparé à la docilité par des déductions dont il ne perçoit d'abord que le caractère inévitable, nous aurons formé, en lui donnant l'occasion d'exercer son jugement, un être pour qui l'initiative devient chose naturelle, j'oserais presque dire un homme d'action.

Cette utilité des études mathématiques ne fut pas toujours reconnue; elle a même été l'objet d'attaques violentes. Un grand philosophe anglais, Hamilton, voulant établir que l'enseignement des Mathématiques est insuffisant à lui seul pour constituer un système complet d'éducation, et se laissant entraîner par son sujet, lui accorde à peine le pouvoir de développer l'attention. Il couvre les mathématiciens de sarcasmes recueillis dans les œuvres d'une foule d'écrivains dont l'incompétence sur ce sujet n'a d'égale que la sienne propre. Je n'insisterais pas sur ces attaques, réfutées en grande partie, et avec une grande vigueur, par Stuart Mill, si Hamilton n'avait fait appel, à tort d'ailleurs, à l'autorité de Descartes. Dans un passage du *Discours de la Méthode,* le fondateur de la Géométrie analytique, parlant de la circulation du sang et des mouvements du cœur qui l'accompagnent, attribue à cet organe un rôle tout à fait inexact; pour mieux convaincre les incrédules, il eut l'imprudence de prendre à témoin la force des démonstrations mathématiques. Un de nos grands médecins contemporains, s'étayant de ce passage, a entrepris de démontrer que l'étude des Mathématiques était une préparation détestable à celle de la Médecine. Il est certain que les raisonnements ne peuvent tenir lieu de la connaissance des faits; c'est le rôle de l'expérience de nous les fournir. Ceux que Descartes avait alors en sa possession étaient insuffisants pour lui permettre un jugement sûr, et, s'il a manqué à l'une des règles essentielles de sa méthode, il me semble que c'est surtout à la première, dans laquelle il se propose « de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie qu'il ne la connût évidemment être telle ». Or, c'est surtout dans les préceptes suivants que Descartes fait appel aux procédés du raisonnement mathématique, et je ne vois point comment une infraction au premier de ses principes peut diminuer la valeur des autres.

Permettez-moi d'ailleurs de chercher dans Descartes lui-même la réponse la plus éloquente à ceux qui pourraient être tentés de lui reprocher trop vivement ses erreurs. Dans ce même *Discours de la Méthode,* il parle ainsi de ses spéculations : « Elles m'ont fait voir qu'il est possible de parvenir à des connaissances qui soient fort utiles à la vie et que, au lieu de cette philosophie spéculative qu'on enseigne dans les écoles, on en peut trouver une pratique par laquelle, connaissant la force et les actions du feu, de l'eau, de l'air, des astres, des cieux et de tous les autres corps qui nous environnent, aussi distinctement que nous connaissons les divers métiers de nos artisans, nous les pourrions employer en même façon à tous les usages auxquels ils sont propres et ainsi nous rendre comme maîtres et possesseurs de la nature. » Je ne crois pas que jamais un savant ait prévu les conquêtes de la Science avec une pareille netteté et les ait résumées dans un tableau aussi précis.

Cette pensée ne peut qu'augmenter votre confiance aux bienfaits de la méthode déductive et vous engager à l'utiliser pour la recherche de la vérité, même en dehors du domaine mathématique. Vous l'appliquerez bien souvent en partant de données insuffisantes fournies par une expérimentation incomplète; vous arriverez ainsi à des conclusions qu'un esprit sain, un jugement désintéressé ou les résultats d'expériences nouvelles vous montreront contraires à la réalité; en un mot, tout comme Descartes, vous vous serez trompés. Dès que la contradiction vous apparaîtra, vous reviendrez sur vos pas et alors commencera la chasse si passionnante de l'erreur. Passant tour à tour au crible de votre raison et vos déductions et les conditions initiales, vous finirez par trouver dans ces dernières la cause de votre insuccès. Vous chercherez à les compléter et vous y arriverez d'autant mieux, par une expérimentation bien dirigée, que leur insuffisance vous aura été révélée dans leurs conséquences. Vous apporterez ainsi votre part au trésor toujours grandissant des vérités abordables à l'homme; vous contribuerez, dans la mesure de vos forces, à la réalisation du vœu formulé par le poète expirant : « Toujours plus de lumière. »

[D6e; H5iα]

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES OBTENUES POUR LE PRODUIT DE DEUX FONCTIONS CYLINDRIQUES;

PAR M. NIELS NIELSEN, à Copenhague.

Les Traités de M. C. Neumann [1] et de feu M. E. Lommel [2] marquent le point tournant de l'histoire des fonctions cylindriques (souvent dites *besséliennes*) en donnant, pour la première fois, un aperçu systématique de la théorie de telles fonctions. C'est pourquoi un Mémoire sur cette matière, publié avant les deux petits livres susdits, présente un intérêt spécial pour celui qui étudie profondément les fonctions cylindriques.

En particulier, le Mémoire que feu M. Ernst Meissel [3] a publié en 1862 dans le *programme de l'École professionnelle* à Iserlohn présente un tel intérêt à cause des résultats essentiels qu'il contient. En effet, abstraction faite d'un grand nombre d'intégrales définies nouvelles et très intéressantes, ce Mémoire introduit, pour la première fois, la fonction cylindrique de deuxième espèce et de paramètre zéro, savoir la fonction $Y^0(x)$. En outre on y trouvera une équation différentielle linéaire et de troisième ordre pour laquelle les trois fonctions

$$[J^0(x)]^2, \quad J^0(x)\,Y^0(x), \quad [Y^0(x)]^2$$

(1) *Theorie der Bessel'schen Functionen*. Leipzig, 1867.

(2) *Studien über die Bessel'schen Functionen*. Leipzig, 1868.

(3) Ce géomètre, calculateur éminent (élève de Jacobi, du reste), a élaboré, on le sait, des Tables numériques diverses sur les fonctions cylindriques, et qui sont les plus complètes que l'on possède aujourd'hui.

constituent un système fondamental des intégrales. D'après ce que je sais, Meissel est le seul auteur qui ait remarqué une telle propriété des fonctions cylindriques; cependant, son Mémoire intéressant est resté inaperçu, comme le montre une autre publication ([1]) du même auteur.

Les recherches présentes sont destinées à généraliser l'équation différentielle de Meissel en démontrant que le produit de deux fonctions cylindriques de même argument, mais de paramètres quelconques, satisfait toujours à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre. Dans le cas particulier où les deux paramètres sont égaux, ou de même signe, ou de signe contraire, l'ordre de l'équation susdite peut être abaissé d'une unité.

Ces résultats sont produits en obtenant, à l'aide des formules fondamentales des fonctions cylindriques, certains cas particuliers des équations différentielles en question. La forme de ces équations ainsi trouvée, le cas le plus général peut être traité facilement.

Il est digne de remarquer ici que nos équations différentielles nous donnent une propriété nouvelle et intéressante des séries *neumanniennes* et *kapteyniennes* de deuxième espèce analogue à celle qu'on connaît pour les mêmes séries de première espèce.

I. — Sur quelques formules fondamentales contenant les fonctions cylindriques.

Avant de commencer nos recherches particulières il nous semble utile de dire quelques mots sur ce que nous entendons par une *fonction cylindrique géné-*

([1]) *Jahresbericht über die Ober-Realschule in Kiel*, 1890, p. 1, 2.

rale, $C^{\mu}(x)$, *de l'argument* x *et du paramètre* μ; une telle fonction représente la solution la plus générale des deux équations fonctionnelles

$$C^{\mu-1}(x) - C^{\mu+1}(x) = 2 D_x C^{\mu}(x), \tag{1}$$

$$C^{\mu-1}(x) + C^{\mu+1}(x) = \frac{2\mu}{x} C^{\mu}(x), \tag{1$_a$}$$

et peut être représentée sous la forme

$$C^{\mu}(x) = a(\mu) J^{\mu}(x) + b(\mu) Y^{\mu}(x), \tag{1$_b$}$$

où $a(\mu)$, $b(\mu)$ sont deux fonctions de μ assujetties à la condition d'être inaltérées si nous posons $\mu + 1$ au lieu de μ, mais sont au reste complètement arbitraires. $J^{\mu}(x)$ et $Y^{\mu}(x)$ désignent les fonctions cylindriques de première et de deuxième espèce, savoir

$$J^{\mu}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\mu+2s}}{s!\,\Gamma(\mu+s+1)},$$

$$Y^{\mu}(x) = \frac{\pi}{\sin \mu\pi} [\cos \mu\pi\, J^{\mu}(x) - J^{-\mu}(x)];$$

dans le cas particulier où μ est entier, l'expression de $Y^{\mu}(x)$ se présente sous forme indéterminée, c'est-à-dire qu'il faut prendre la vraie valeur de cette expression.

Les formules (1), (1$_a$) montrent que la fonction générale $C^{\mu}(x)$ doit satisfaire à l'équation bessélienne de paramètre μ, savoir

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) y = 0. \tag{2}$$

Remarquons encore que la règle de Cauchy, pour la multiplication de deux séries infinies, donnera immédiatement la formule

$$(3)\quad J^{\mu}(x)\,J^{\nu}(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\binom{\mu+\nu+2s}{s}}{\Gamma(\mu+s+1)\,\Gamma(\nu+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2s},$$

d'où, à l'aide de l'intégrale bien connue

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^n\cos(\mu\varphi)\,d\varphi \\ \qquad = \dfrac{n!}{2^n\,\Gamma\left(\dfrac{n+\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\dfrac{n-\mu}{2}+1\right)}, \end{cases}$$

où n désigne un entier non négatif, nous déduirons cette autre formule

$$(5)\quad J^{\frac{n+\mu}{2}}(x)\,J^{\frac{n-\mu}{2}}(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}J^n(2x\cos\varphi)\cos(\mu\varphi)\,d\varphi,$$

qui est essentielle dans les recherches qui nous occupent ici. Supposons dans (5) n pair et $\mu=0$; nous retrouvons une formule due à M. C. Neumann [1], tandis que les formules obtenues en supposant $\frac{n+\mu}{2}$ et $\frac{n-\mu}{2}$ égaux à deux nombres entiers appartiennent à Schläfli [2]. En remarquant maintenant que la fonction $J^n(2x\cos\varphi)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\left(4\cos^2\varphi-\frac{n^2}{x^2}\right)z=0,$$

nous aurons, en vertu de (5), pour la fonction

$$J^{\frac{n+\mu}{2}}(x)\,J^{\frac{n-\mu}{2}}(x)$$

---

(1) *Theorie der Bessel'schen Functionen*, p. 70. Leipzig, 1867.

(2) *Mathematische Annalen*, t. III, 1871, p. 139.

cette autre équation

$$
(\alpha) \quad \left\{
\begin{aligned}
& y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{n^2}{x^2} y \\
& \quad = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{J}^n(2x\cos\varphi)(2\cos\varphi)^2 \cos(\mu\varphi)\, d\varphi.
\end{aligned}
\right.
$$

Or, le second membre de (α) peut être mis, à l'aide de (4), sous la forme

$$
-4 \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^n \binom{n+2s}{s} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{\Gamma\left(s+1+\frac{n+\mu}{2}\right)\Gamma\left(s+1+\frac{n-\mu}{2}\right)} \frac{(n+2s+2)(n+2s+1)}{(n+2s+2)^2-\mu^2}.
$$

Appliquons ensuite à cette expression l'identité

$$
\frac{a(a-1)}{a^2-\mu^2} = 1 + \frac{\mu-1}{2}\frac{1}{a-\mu} - \frac{\mu+1}{2}\frac{1}{a+\mu},
$$

l'équation (α) peut s'écrire sous cette forme nouvelle

$$
(\beta) \quad \left\{
\begin{aligned}
& y'' + \frac{1}{x} y' + \left(4 - \frac{n^2}{x^2}\right) y \\
& \quad = 2(\mu+1)\, u^{-\mu}(x) - 2(\mu-1)\, u^{\mu}(x),
\end{aligned}
\right.
$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$
u^{\mu}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \binom{n+2s}{s} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{\Gamma\left(s+1+\frac{n+\mu}{2}\right)\Gamma\left(s+1+\frac{n-\mu}{2}\right)} \frac{1}{n+2s+2-\mu},
$$

de façon que nous aurons immédiatement

$$
(\gamma) \quad \mathrm{D}_x\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{2-\mu} u^{\mu}(x)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{1-\mu} \mathrm{J}^{\frac{n+\mu}{2}}(x)\, \mathrm{J}^{\frac{n-\mu}{2}}(x).
$$

Cela posé, multiplions par $\left(\frac{x}{2}\right)^{2-\mu}$ les deux membres de (β) et différentions par rapport à x, nous obtiendrons, en vertu de (γ),

$$(\delta)\quad \left\{\begin{aligned} & y''' + \frac{3-\mu}{x} y'' + \left(4 + \frac{1-n^2-\mu^2}{x^2}\right) y' \\ & \qquad + \left(\frac{4-4\mu}{x} + \frac{n^2\mu}{x^3}\right) y \\ & = -\frac{4}{x}\mu(\mu+1)u^{-\mu}(x), \end{aligned}\right.$$

ce qui donnera, dans le cas particulier $\mu = 0$, pour la fonction $\left[\mathrm{J}^{\frac{n}{2}}(x)\right]^2$, cette équation différentielle de troisième ordre

$$(6)\qquad y''' + \frac{3}{x} y'' + \left(4 + \frac{1-n^2}{x^2}\right) y' + \frac{4}{x} y = 0.$$

Posons encore dans cette formule $n = 0$; nous retrouvons l'équation trouvée par Meissel.

Dans le cas général, la formule déduite de (β) en y posant $-\mu$ au lieu de μ donnera aisément, en vertu de (δ), cette équation du quatrième ordre pour la fonction $\mathrm{J}^{\frac{n+\mu}{2}}(x)\,\mathrm{J}^{\frac{n-\mu}{2}}(x)$

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & y^{\text{IV}} + \frac{6}{x} y''' + \left(4 + \frac{7-n^2-\mu^2}{x^2}\right) y'' \\ & \quad + \left(\frac{16}{x} + \frac{1-n^2-\mu^2}{x^3}\right) y' + \left(\frac{8}{x^2} + \frac{n^2\mu^2}{x^4}\right) y = 0, \end{aligned}\right.$$

et c'est là le résultat particulier que nous nous proposions de démontrer.

II. — Équations différentielles obtenues pour le produit de deux fonctions cylindriques quelconques.

L'équation différentielle (7) que nous venons d'obtenir nous conduira naturellement à chercher, pour la fonction $J^{\mu}(x)\,J^{\nu}(x)$, une équation de cette forme

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} &y^{\text{IV}}+\frac{6}{x}y'''+\left(4+\frac{a}{x^2}\right)y''\\ &\quad+\left(\frac{16}{x}+\frac{b}{x^3}\right)y'+\left(\frac{8}{x^2}+\frac{c}{x^4}\right)y=0,\end{aligned}\right.$$

dont les coefficients a, b, c doivent être indépendants de x. Pour déterminer ces coefficients inconnus, portons dans (α) la série (3) obtenue pour y et cherchons le coefficient de la puissance $\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2s-y}$; nous obtiendrons, par un calcul simple,

$$(\beta)\qquad \left\{\begin{aligned} &\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega+3)+a\omega(\omega-1)+b\omega+c\\ &\quad\equiv[\omega^2-(\mu+\nu)^2][\omega^2-(\mu-\nu)^2],\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé, pour abréger, $\omega=\mu+\nu+2s$. Or, l'équation (β) doit être satisfaite par une infinité de valeurs de ω; c'est-à-dire qu'elle doit se réduire à une identité formelle, ce qui nous permettra de déterminer d'une seule façon les coefficients susdits, et nous obtiendrons par là l'équation cherchée, savoir :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &y^{\text{IV}}+\frac{6}{x}y'''+\left(4+\frac{7-2\mu^2-2\nu^2}{x^2}\right)y''\\ &\qquad+\left(\frac{16}{x}+\frac{1-2\mu^2-2\nu^2}{x^3}\right)y'\\ &\qquad\quad+\left(\frac{8}{x^2}+\frac{(\mu^2-\nu^2)}{x^4}\right)y=0;\end{aligned}\right.$$

car la forme même de (β) montre que le coefficient obtenu pour la puissance $\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu-4}$ dans le premier membre de (8) doit s'évanouir de sorte que (8) deviendra homogène.

On verra que notre équation (8) ne contient que des carrés de μ et de ν, de façon que les signes de ces deux paramètres peuvent être choisis d'une manière complètement arbitraire, c'est-à-dire que le produit de deux fonctions cylindriques quelconques de l'argument x et des paramètres μ et ν doit satisfaire à cette équation (8). De même, l'intégrale complète de notre équation susdite peut être représentée généralement sous cette forme

$$(9)\qquad \begin{cases} y = \mathrm{A}\,\mathrm{J}^{\mu}(x)\,\mathrm{J}^{\nu}(x) + \mathrm{B}\,\mathrm{J}^{\mu}(x)\,\mathrm{Y}^{\nu}(x) \\ \qquad + \mathrm{C}\,\mathrm{Y}^{\mu}(x)\,\mathrm{J}^{\nu}(x) + \mathrm{D}\,\mathrm{Y}^{\mu}(x)\,\mathrm{Y}^{\nu}(x), \end{cases}$$

où A, B, C, D désignent quatre fonctions arbitraires de μ et de ν.

Cela posé, nous venons de démontrer cette proposition remarquable et inconnue d'après ce que je sais :

Désignons par B_μ, B_ν *deux intégrales quelconques des équations besséliennes des paramètres* μ *et* ν; *le produit* $\mathrm{B}_\mu \mathrm{B}_\nu$ *satisfait à l'équation différentielle* (8). *Le produit des intégrales complètes des deux équations besséliennes donnera généralement l'intégrale complète de* (8).

La définition même de la fonction cylindrique de deuxième espèce Y montre que, dans le cas $\nu = \pm \mu$, les quatre intégrales que nous venons d'obtenir ne constituent pas un système fondamental, car elles ne représentent que trois fonctions indépendantes. Pour trouver, dans ce cas, une quatrième intégrale particulière, on peut appliquer une méthode entièrement analogue à celle qui nous a donné la fonction $\mathrm{Y}^{\mu}(x)$, μ entier. En effet, il est évident que la fonction

$$\frac{\pi}{\sin\pi(\mu \mp \nu)}\left[\cos\pi(\mu \mp \nu)\,\mathrm{J}^{\pm\mu}(x)\,\mathrm{Y}^{\nu}(x) - \mathrm{J}^{\nu}(x)\,\mathrm{Y}^{\pm\mu}(x)\right]$$

est toujours une intégrale de (8), de sorte que nous n'avons que, dans nos cas particuliers, à chercher la vraie valeur de cette expression indéterminée pour $\mu = \pm \nu$. Pourvu que μ soit égal à un entier, l'intégrale nouvelle ainsi obtenue peut être exprimée sous forme finie à l'aide des fonctions cylindriques et des fonctions élémentaires, comme je l'ai démontré récemment ([1]).

Il est évident que, si un seul des produits figurant dans le second membre de (9) est solution d'une équation de la forme (8), il en sera de même pour les trois autres : c'est-à-dire qu'il sera inutile de chercher généralement une équation de la même forme, mais d'un ordre inférieur, à laquelle un tel produit doive satisfaire. Or, dans le cas particulier $\mu = \pm \nu$, les produits susdits ne donnent que trois fonctions indépendantes, de sorte que l'équation particulière (6) nous suggère naturellement l'idée de chercher une équation différentielle de cette forme

$$(\gamma) \qquad y''' + \frac{a}{x}y'' + \left(\alpha + \frac{b}{x^2}\right)y' + \left(\frac{\beta}{x} + \frac{c}{x^3}\right)y = 0,$$

auxquelles ces trois produits doivent satisfaire. Portons maintenant dans (γ) les séries obtenues pour $J^{\mu}(x)\, J^{\pm\mu}(x)$; nous aurons à déterminer les coefficients inconnus à l'aide de l'identité

$$(\delta) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\omega - 1)[\omega(\omega - 1)(\omega - 2) + a\omega(\omega - 1) + b\omega + c] \\ &\quad \equiv \omega(\omega^2 - 4\mu^2)[\alpha(\omega - 2) + \beta], \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé respectivement $\omega = \mu + \nu + 2s$, $\omega = 2s$. Cela posé, nous verrons que nos deux fonctions doivent satisfaire à cette équation linéaire du troisième ordre

$$(10) \qquad y''' + \frac{3}{x}y'' + \left(4 + \frac{1 - 4\mu^2}{x^2}\right)y' + \frac{4}{x}y = 0,$$

([1]) *Annali di Matematica*, 3e série, t. V, 1901, p. 367.

généralisation de (2) qui a pour intégrale complète

$$(11) \qquad y = \mathrm{A}\,[\mathrm{J}^{\mu}(x)]^2 + \mathrm{B}\,\mathrm{J}^{\mu}(x)\,\mathrm{Y}^{\mu}(x) + \mathrm{C}\,[\mathrm{Y}^{\mu}(x)]^2,$$

où A, B, C désignent trois fonctions arbitraires de μ.

Cherchons maintenant les déterminants fonctionnels Δ_4, Δ_3 de nos systèmes fondamentaux (9), (11); calculons d'abord Δ_4. La méthode générale donnera

$$\Delta_4 = \mathrm{C}x^{-6},$$

C désignant une quantité indépendante de x; pour déterminer cette constante il suffit de regarder le déterminant déduit de Δ_4 en y remplaçant chacune des fonctions transcendantes qui y figurent par le premier terme des séries infinies correspondantes. Supprimant encore le facteur commun x^{-6} et posant $x = 0$, on obtiendra

$$(12) \qquad \Delta_4 = (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{2}{x}\right)^6,$$

résultat qui s'accorde bien avec les remarques faites sur les quatre intégrales (9). Le même procédé donnera encore

$$(13) \qquad \Delta_3 = \left(\frac{2}{x}\right)^3.$$

Remarquons qu'un calcul direct montrera que les formules (12), (13) ne sont autre chose que des conséquences immédiates de cette équation fondamentale due à Lommel [1]

$$(\varepsilon) \qquad \mathrm{J}^{\mu}(x)\,\mathrm{Y}^{\mu-1}(x) - \mathrm{J}^{\mu-1}(x)\,\mathrm{Y}^{\mu}(x) = \frac{x}{2}$$

et de celle obtenue en posant ν au lieu de μ. Cela posé,

---

[1] *Mathematische Annalen*, t. IV, 1871, p. 108.

il est évident que les équations différentielles linéaires dont les intégrales complètes sont les fonctions (9), (11) peuvent être déduites aussi, à l'aide de (α), par les méthodes générales classiques dans la théorie des équations différentielles linéaires ([1]). Ces remarques faites, on comprend le droit de l'assertion suivante :

Les produits de n fonctions cylindriques quelconques de l'argument x et des paramètres quelconques satisfait à une équation différentielle linéaire de l'ordre 2^n *généralement dont les coefficients sont des polynomes entiers de x du degré* 2^n *au plus.*

En outre, il est évident que les intégrales des équations différentielles plus générales de la classe *fuchsienne* possèdent une propriété analogue. Néanmoins, je me suis borné à regarder ici seulement les produits de deux intégrales des équations *besséliennes,* c'est-à-dire les produits de deux fonctions cylindriques, parce que de tels produits jouent, comme fonctions de développement, un rôle aussi fondamental que les fonctions cylindriques elles-mêmes. En effet, à chacun des développements d'une fonction selon les fonctions cylindriques trouvés par MM. Fourier, Schlömilch, Neumann et Kapteyn correspond un développement analogue de la même fonction selon les produits susdits.

La démonstration rigoureuse de cette assertion peut être effectuée; je le démontrerai bientôt dans un autre travail, en généralisant et en rendant tranchante la méthode particulière que j'ai appliquée récemment dans mes recherches sur les séries *neumanniennes* et *kapteyniennes,* c'est-à-dire en appliquant cette identité

([1]) *Voir*, par exemple : L. Heffter, *Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen*. p. 50, 145. Leipzig, 1894.

générale

$$x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos\varphi\sin 2\psi)\cos(\mu\varphi)\sin 2\,\psi(\operatorname{tang}\psi)^{\mu}\,d\varphi\,d\psi = f(x)-f(0),$$

dont le cas particulier : $f(x)$ holomorphe aux environs de zéro, se présente dans mes recherches susdites (¹).

III. — Théorème sur les séries fondamentales neumanniennes et kapteyniennes de deuxième espèce.

Regardons ici les séries *neumanniennes* valables pourvu que $(y) > (x)$:

$$(\alpha)\quad \frac{1}{y-x} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu}\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon^{n}\,O^{\mu,n}(y)\,J^{\mu+n}(x),$$

$$(\beta)\quad \frac{1}{y-x} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{\mu+\nu}{2}}\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n\,U^{\mu,\nu,n}(y)\,J^{\mu+n}(x)\,J^{\nu+n}(x),$$

où $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$, $n > 0$ et où l'on a posé généralement

$$U^{\mu,\nu,n}(y) = \frac{\mu+\nu+2n}{4}\sum_{p=0}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+n}{2}-p+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}-p+1\right)}{\mu+\nu+2n-2p} \times\binom{\frac{\mu+\nu}{2}+n-p}{p}\left(\frac{2}{y}\right)^{n-2p+1}.$$

Les séries (α), (β) sont fondamentales dans la théorie des séries *neumanniennes* de première et de deuxième espèce parce que l'on peut, à l'aide de ces séries et en appliquant l'intégrale de Cauchy, trouver une série *neumannienne* quelconque.

(¹) *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. XVIII, 1901, p. 65.

Il est bien connu que la fonction $O^{\mu, n}(y)$, polynome entier de $\frac{1}{y}$ de degré $n+1$, satisfait à une équation différentielle et non homogène de deuxième ordre, mais très analogue à celle connue pour $J^{\mu+n}(x)$. En outre, j'ai démontré, dans mes recherches susdites [1], que la fonction rationnelle $U^{\mu, -\mu, n}(y)$ satisfait aussi à une équation différentielle linéaire et homogène de quatrième ordre très analogue à (7). En somme, ces propriétés nous conduisent naturellement à chercher pour la fonction rationnelle $U^{\mu,\nu,n}$ une équation de cette forme

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} & y^{\text{IV}} + \frac{a}{x} y''' + \left(\alpha + \frac{b}{x^2}\right) y'' \\ & \quad + \left(\frac{\beta}{x} + \frac{c}{x^3}\right) y' + \left(\frac{\gamma}{x^2} + \frac{d}{x^4}\right) y = A_n(x). \end{aligned}\right.$$

Un simple calcul montrera que les coefficients inconnus de cette équation peuvent être déterminés à l'aide de ces deux identités :

$$4\left(\omega + \frac{\mu+\nu}{2}\right)\left(\omega + \frac{\mu+\nu}{2} + 1\right) \equiv \alpha(\omega+2)(\omega+3) - \beta(\omega+2) + \gamma,$$

$$\begin{aligned} & \omega(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3) - a\omega(\omega+1)(\omega+2) + b\omega(\omega+1) - c\omega + d \\ & \equiv (\omega+\mu+1)(\omega+\nu+1)(\omega+\mu+\nu+n-1)(\omega-n-1), \end{aligned}$$

ce qui donnera

$$(13_a)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= 4, \\ \beta &= 16 - 4(\mu+\nu), \\ \gamma &= 8 - 6(\mu+\nu) + (\mu+\nu)^2; \end{aligned}\right.$$

$$(12_b)\quad \left\{\begin{aligned} a &= 6 - 2(\mu+\nu), \\ b &= 5 - n^2 - \mu\nu + (\mu+\nu)(\mu+\nu+n-6), \\ c &= \mu\nu(3-\mu-\nu) + (n+1)(\mu+\nu+1)(\mu+\nu+n-1), \\ d &= -(\mu+1)(\nu+1)(n+1)(\mu+\nu+n+1). \end{aligned}\right.$$

---

[1] *Loc. cit.*, p. 74.

La dernière de nos identités montre encore que le coefficient de x^{-n-5} s'évanouit, tandis que les coefficients x^{-3} ou de x^{-4} déterminent la fonction $A_n(x)$ comme voici :

$$(13_c)\quad \begin{cases} A_{2n}(x) = \dfrac{\mu+\nu}{8}\left(\dfrac{\mu+\nu}{2}+2n\right) \\ \qquad \times\,\Gamma\left(\dfrac{\mu+2}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu+2}{2}\right)\dbinom{\frac{\mu+\nu}{2}+n-1}{n}\left(\dfrac{2}{x}\right)^3, \\ A_{2n+1}(x) = \dfrac{\mu+\nu}{8}\left(\dfrac{\mu+\nu}{2}+2n+1\right) \\ \qquad \times\,\Gamma\left(\dfrac{\mu+3}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu+3}{2}\right)\dbinom{\frac{\mu+\nu}{n}+n}{n}\left(\dfrac{2}{x}\right)^4, \end{cases}$$

expressions qui montrent immédiatement que l'équation (13) deviendra homogène si nous supposons $\mu+\nu=0$. Dans l'autre cas particulier $\mu=\nu$ nous obtiendrons, par la méthode habituelle, cette équation analogue à (10) :

$$(14)\quad \begin{cases} y'''+\dfrac{4-2\mu}{x}y''+\left(4+\dfrac{1-n^2+\mu(\mu-n-4)}{x^2}\right)y' \\ \qquad +\left(\dfrac{8-4\mu}{x}+\dfrac{(n+1)(n-1+\mu)(1+\mu)}{x^3}\right)y = A_n(x), \end{cases}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(14_a)\quad A_{2n}(x) = \frac{\mu+2n}{2}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{\mu}{2}+1\right)}{\mu+n}\binom{\mu+n}{n}(1-\mu)\left(\frac{2}{x}\right)^2,$$

$$(14_b)\quad A_{2n+1}(x) = -\mu\,\frac{\mu+2n+1}{2}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{\mu+3}{2}\right)}{\mu+n+1}\binom{\mu+n+1}{n}\left(\frac{2}{x}\right)^3.$$

Dans le cas particulier $\mu=0$, l'équation (14) se présente sous cette forme élégante :

$$(15)\quad \begin{cases} y''' + \dfrac{4}{x}y'' + \left(4 + \dfrac{1-n^2}{x^2}\right)y' \\ \qquad + \left(\dfrac{8}{x} + \dfrac{n^2-1}{x^3}\right)y = \dfrac{4\cos^2\dfrac{n\pi}{2}}{x^2}, \end{cases}$$

analogue à (6). Supposons n pair; notre fonction y deviendra identique à celle de M. C. Neumann.

Les résultats ainsi obtenus montrent clairement une nouvelle analogie parfaite entre les séries *neumanniennes* de première et de deuxième espèce, analogie qui peut être démontrée, en vertu des formules (16) et (17) dans mes recherches susdites, aussi pour les séries *kapteyniennes*.

Remarquons encore que le polynome de Lommel [1]

$$R^{\mu,\nu}(x) = \sum_{s=0}^{\leq\frac{\mu+1}{2}} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s!}\binom{\mu+n-s}{n-2s}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2s},$$

qui joue un rôle fondamental dans la théorie des fonctions cylindriques, satisfait aussi à une équation différentielle linéaire et homogène de quatrième ordre complètement analogue à (7) et à (13) pourvu que $\mu+\nu=0$. Cette équation est due à M. Hurwitz [2]; elle peut être démontrée aisément à l'aide des propriétés fondamentales du polynome R, comme je l'ai fait voir récemment [3]. Du reste notre équation peut être déduite aussi directement en suivant la méthode habituellement appliquée dans les pages précédentes.

---

[1] *Mathematische Annalen,* t. IV, p. 108, 112-116. *Voir* aussi les Mémoires publiés par MM. Craf et Crelier et par moi dans les *Annali di Matematica,* 2ᵉ série, t. XXIII et XXIV; 3ᵉ série, t. V.

[2] *Mathematische Annalen,* t. XXXIII, 1889, p. 251.

[3] *Annali di Matematica.*

[K12bβ]

GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DE MALFATTI;

PAR M. E.-N. BARISIEN.

La solution du célèbre problème de Malfatti :

Étant donné un triangle ABC, *décrire trois cercles,* O, O′, O″, *inscrits respectivement dans les angles* A, B, C, *et tels que chacun d'eux touche les deux autres,*

qui est donnée géométriquement (*Géométrie* de ROUCHÉ et COMBEROUSSE, 7ᵉ édition, Iᵉʳ Volume, p. 311 à 314) (¹), et par la Trigonométrie (*Questions de Trigonométrie* de DESBOVES, 3ᵉ édition, 1884, p. 204 à 210), est incomplète, car on ne mentionne dans ces articles qu'une seule solution d'un problème qui en comporte *vingt,* comme nous allons le montrer en traitant la question par le calcul.

Soient

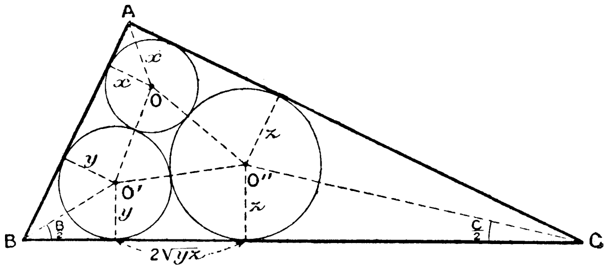
a, b, c les côtés du triangle ABC;
A, B, C, les angles du triangle ABC;
r, r_a, r_b, r_c les rayons du cercle inscrit et des cercles exinscrits dans le triangle ABC;
x, y, z les rayons des cercles O, O′, O″.

Première solution. — Le problème, tel qu'il est traité par les auteurs précités, suppose que *les trois*

(¹) *Voir* aussi *Questions de Géométrie* de DESBOVES, 3ᵉ édition, 1880, p. 372 à 375.

cercles O, O′, O″ *sont à l'intérieur du triangle* ABC (*fig.* 1).

Fig. 1.



Dans ce cas, les équations du problème sont

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= 2\sqrt{yz} + y\cot\frac{B}{2} + z\cot\frac{C}{2},\\ b &= 2\sqrt{zx} + z\cot\frac{C}{2} + x\cot\frac{A}{2},\\ c &= 2\sqrt{xy} + x\cot\frac{A}{2} + y\cot\frac{B}{2}.\end{aligned}\right.$$

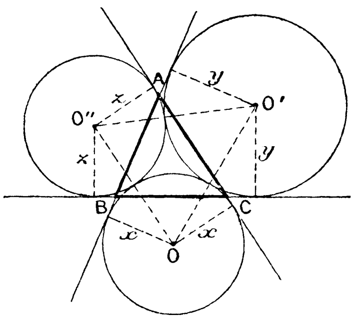
On trouve (Desboves, *loc. cit.*) que les rayons x, y, z qui satisfont à ces équations ont pour valeur

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{r\left(1+\tang\frac{B}{4}\right)\left(1+\tang\frac{C}{4}\right)}{2\left(1+\tang\frac{A}{4}\right)},\\ y &= \frac{r\left(1+\tang\frac{C}{4}\right)\left(1+\tang\frac{A}{4}\right)}{2\left(1+\tang\frac{B}{4}\right)},\\ z &= \frac{r\left(1+\tang\frac{A}{4}\right)\left(1+\tang\frac{B}{4}\right)}{2\left(1+\tang\frac{C}{4}\right)}.\end{aligned}\right.$$

Examinons maintenant les autres solutions.

Deuxième solution. — Comme dans le cas précédent, *les trois centres* O, O′, O″ (*fig.* 2) *sont situés sur les bissectrices intérieures des angles du triangle* ABC,

Fig. 2.



mais les cercles O, O′, O″ *coupent respectivement les côtés* BC, CA, AB.

Les équations en x, y, z sont alors

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{aligned} a &= y\cot\frac{B}{2} + z\cot\frac{C}{2} - 2\sqrt{yz},\\ b &= z\cot\frac{C}{2} + x\cot\frac{A}{2} - 2\sqrt{zx},\\ c &= x\cot\frac{A}{2} + y\cot\frac{B}{2} - 2\sqrt{xy},\end{aligned}\right.$$

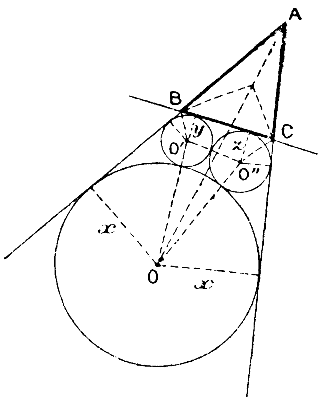
et l'on a, en employant la méthode de Desboves (*loc. cit.*),

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{r\left(1+\cot\frac{B}{4}\right)\left(1+\cot\frac{C}{4}\right)}{2\left(1+\cot\frac{A}{4}\right)},\\ y &= \frac{r\left(1+\cot\frac{C}{4}\right)\left(1+\cot\frac{A}{4}\right)}{2\left(1+\cot\frac{B}{4}\right)},\\ z &= \frac{r\left(1+\cot\frac{A}{4}\right)\left(1+\cot\frac{B}{4}\right)}{2\left(1+\cot\frac{C}{4}\right)}.\end{aligned}\right.$$

Il est à remarquer que les systèmes (1) et (2) ne diffèrent que par le signe des radicaux $\sqrt{yz}$, $\sqrt{zx}$, $\sqrt{xy}$. Par conséquent, ces deux systèmes n'en forment qu'un et ont pour solutions les valeurs (1) et les valeurs (2).

Troisième, quatrième et cinquième solutions. — Considérons le cas *où deux des cercles* O′ *et* O″ (*fig.* 3)

Fig. 3.



ont leurs centres sur les bissectrices extérieures des angles B *et* C, *alors que le centre du troisième cercle* O *est situé sur la bissectrice intérieure de l'angle* A. *Les trois cercles sont du côté de* BC, *opposé à* A.

Les équations en x, y, z sont

$$\text{(III)}\quad \left\{\begin{aligned} a &= y\,\text{tang}\,\frac{B}{2} + z\,\text{tang}\,\frac{C}{2} + 2\sqrt{yz},\\ b &= x\cot\frac{A}{2} - z\,\text{tang}\,\frac{C}{2} - 2\sqrt{xz},\\ c &= x\cot\frac{A}{2} - y\,\text{tang}\,\frac{B}{2} - 2\sqrt{xy}.\end{aligned}\right.$$

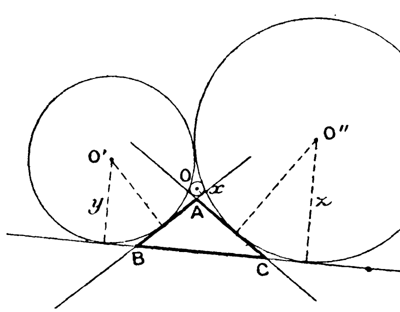
La méthode de Desboves (*loc. cit.*) conduit aux valeurs de x, y, z

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{r\left[1+\cot\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\right]\left[1+\cot\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\right]}{2\left(1-\tang\frac{A}{4}\right)}, \\ y &= \frac{r_a\left(1-\tang\frac{A}{4}\right)\left[1+\cot\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\right]}{2\left[1+\cot\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\right]}, \\ z &= \frac{r_a\left(1-\tang\frac{A}{4}\right)\left[1+\cot\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\right]}{2\left[1+\cot\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\right]}. \end{aligned} \right.$$

On a deux autres systèmes analogues au système (3) en permutant circulairement les lettres A, B, C.

Sixième, septième et huitième solutions. — Comme dans le cas précédent, *les cercles* O′ *et* O″ (*fig.* 4)

Fig. 4.



ont leurs centres sur les bissectrices extérieures des angles B *et* C, *et le centre* O *est situé sur la bissectrice intérieure de l'angle* A. *Mais ces trois cercles sont situés du même côté de* BC *que le sommet* A.

Les équations du problème sont alors

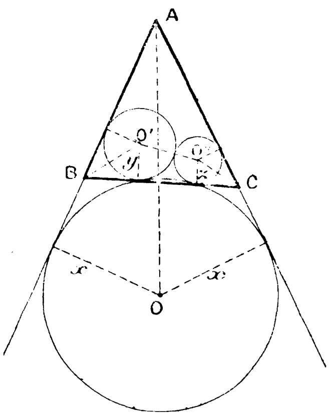
$$
\text{(IV)}\qquad
\begin{cases}
a = 2\sqrt{yz} - y \operatorname{tang}\dfrac{B}{2} - z \operatorname{tang}\dfrac{C}{2},\\[2mm]
b = 2\sqrt{xz} + z \operatorname{tang}\dfrac{C}{2} - x \cot\dfrac{A}{2},\\[2mm]
c = 2\sqrt{xy} + y \operatorname{tang}\dfrac{B}{2} - x \cot\dfrac{A}{2},
\end{cases}
$$

et l'on a, pour x, y, z,

$$
(4)\qquad
\begin{cases}
x = \dfrac{r\left[1-\cot\left(45^\circ-\dfrac{B}{4}\right)\right]\left[1-\cot\left(45^\circ-\dfrac{C}{4}\right)\right]}{2\left(1-\cot\dfrac{A}{4}\right)},\\[4mm]
y = \dfrac{r_a\left(1-\cot\dfrac{A}{4}\right)\left[1-\cot\left(45^\circ-\dfrac{C}{4}\right)\right]}{2\left[1-\cot\left(45^\circ-\dfrac{B}{4}\right)\right]},\\[4mm]
z = \dfrac{r_a\left(1-\cot\dfrac{A}{4}\right)\left[1-\cot\left(45^\circ-\dfrac{B}{4}\right)\right]}{2\left[1-\cot\left(45^\circ-\dfrac{C}{4}\right)\right]}.
\end{cases}
$$

Neuvième, dixième et onzième solutions. — *Les trois*

Fig. 5.



centres O, O', O'' (*fig.* 5) *sont situés sur les bissectrices* *intérieures des angles* A, B, C, *les cercles* O′ *et* O″ *étant situés à l'intérieur du triangle* ABC.

Les équations en x, y, z sont

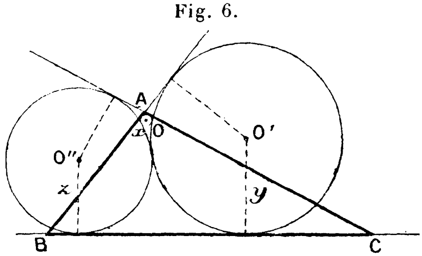
$$(\mathrm{V}) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= y \cot\frac{B}{2} + z \cot\frac{C}{2} + 2\sqrt{yz}, \\ b &= x \cot\frac{A}{2} + z \cot\frac{C}{2} - 2\sqrt{xz}, \\ c &= x \cot\frac{A}{2} + y \cot\frac{B}{2} - 2\sqrt{xy}. \end{aligned} \right.$$

Et l'on a

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{r\left(1 - \cot\frac{B}{4}\right)\left(1 - \cot\frac{C}{4}\right)}{2\left(1 + \operatorname{tang}\frac{A}{4}\right)}, \\ y &= \frac{r\left(1 + \operatorname{tang}\frac{A}{4}\right)\left(1 - \cot\frac{C}{4}\right)}{2\left(1 - \cot\frac{B}{4}\right)}, \\ z &= \frac{r\left(1 + \operatorname{tang}\frac{A}{4}\right)\left(1 - \cot\frac{B}{4}\right)}{2\left(1 - \cot\frac{C}{4}\right)}. \end{aligned} \right.$$

Douzième, treizième et quatorzième solutions. — Comme dans le cas précédent, *les centres* O, O′, O″ (*fig.* 6) *sont situés sur les bissectrices intérieures des*

Fig. 6.



angles A, B, C, *mais le cercle* O *est à l'intérieur du triangle* ABC.

Les équations en x, y, z sont

$$(\mathrm{VI})\quad \left\{\begin{aligned} a &= y\cot\frac{B}{2} + z\cot\frac{C}{2} - 2\sqrt{yz},\\ b &= x\cot\frac{A}{2} + z\cot\frac{C}{2} - 2\sqrt{xz},\\ c &= x\cot\frac{A}{2} + y\cot\frac{B}{2} - 2\sqrt{xy}.\end{aligned}\right.$$

Elles sont satisfaites par

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{r\left(1-\tang\frac{B}{4}\right)\left(1-\tang\frac{C}{4}\right)}{2\left(1+\cot\frac{A}{4}\right)},\\ y &= \frac{r\left(1+\cot\frac{A}{4}\right)\left(1-\tang\frac{C}{4}\right)}{2\left(1-\tang\frac{B}{4}\right)},\\ z &= \frac{r\left(1+\cot\frac{A}{4}\right)\left(1-\tang\frac{B}{4}\right)}{2\left(1-\tang\frac{C}{4}\right)}.\end{aligned}\right.$$

Quinzième, seizième et dix-septième solutions. — Les deux cas qui vont suivre sont dans le genre de la troisième et de la sixième solution, *le centre de* O *étant situé sur la bissectrice intérieure de l'angle* A, *et les centres* O′ *et* O″ (*fig.* 7) *sur les bissectrices extérieures des angles* B *et* C.

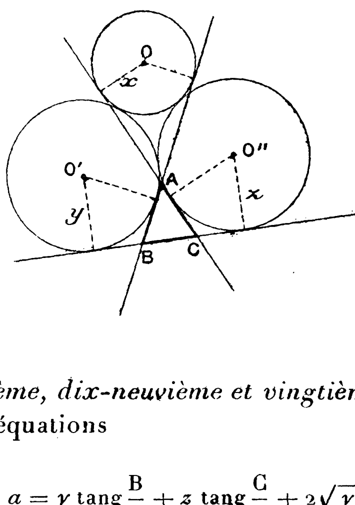
On a, dans ce cas, les équations

$$(\mathrm{VII})\quad \left\{\begin{aligned} a &= 2\sqrt{yz} - y\tang\frac{B}{2} - z\tang\frac{C}{2},\\ b &= 2\sqrt{xz} - x\cot\frac{A}{2} + z\tang\frac{C}{2},\\ c &= 2\sqrt{xy} + y\tang\frac{B}{2} - x\cot\frac{A}{2}.\end{aligned}\right.$$

Elles sont satisfaites par

$$(7)\quad \begin{cases} x = r_a \dfrac{\left[1 + \cot\left(45^\circ - \dfrac{B}{4}\right)\right]\left[1 + \cot\left(45^\circ - \dfrac{C}{4}\right)\right]}{2\left(1 - \cot\dfrac{A}{4}\right)}, \\[2ex] y = r_a \dfrac{\left(1 - \cot\dfrac{A}{4}\right)\left[1 + \cot\left(45^\circ - \dfrac{C}{4}\right)\right]}{2\left[1 + \cot\left(45^\circ - \dfrac{B}{4}\right)\right]}, \\[2ex] z = r_a \dfrac{\left(1 - \cot\dfrac{A}{4}\right)\left[1 + \cot\left(45^\circ - \dfrac{B}{4}\right)\right]}{2\left[1 + \cot\left(45^\circ - \dfrac{C}{4}\right)\right]}. \end{cases}$$

Fig. 7.



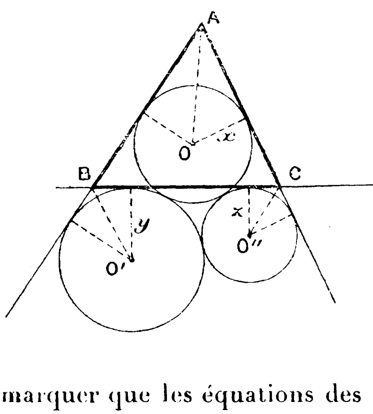
Dix-huitième, dix-neuvième et vingtième solutions. — On a les équations

$$(\text{VIII})\quad \begin{cases} a = y \operatorname{tang}\dfrac{B}{2} + z \operatorname{tang}\dfrac{C}{2} + 2\sqrt{yz}, \\[1ex] b = x \cot\dfrac{A}{2} - z \operatorname{tang}\dfrac{C}{2} + 2\sqrt{xz}, \\[1ex] c = x \cot\dfrac{A}{2} - y \operatorname{tang}\dfrac{B}{2} + 2\sqrt{xy}. \end{cases}$$

Les valeurs de x, y, z répondant à ce cas sont

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned} x &= \frac{r_a\left[1-\cot\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\right]\left[1-\cot\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\right]}{2\left(1-\tang\frac{A}{4}\right)},\\ y &= \frac{r_a\left(1-\tang\frac{A}{4}\right)\left[1-\cot\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\right]}{2\left[1-\cot\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\right]},\\ z &= \frac{r_a\left(1-\tang\frac{A}{4}\right)\left[1-\cot\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\right]}{2\left[1-\cot\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\right]}. \end{aligned}\right.$$

Fig. 8.



Il est à remarquer que les équations des groupes (I), (II), (V), (VI) reviennent au même et que les valeurs (1), (2), (5), (6) sont racines du système (I).

De même, les équations des groupes (III), (IV), (VII), (VIII) reviennent au même, et chacun d'eux est satisfait par les valeurs (3), (4), (7) et (8).

Cas particulier où le triangle ABC *est équila-*

téral. — On trouve alors pour les rayons des cercles O, O′, O″ :

Première solution, $a = b = c$:

(1) $$x = y = z = \frac{a}{4}(\sqrt{3} - 1).$$

Deuxième solution :

(2) $$x = y = z = \frac{a}{4}(\sqrt{3} + 1).$$

Troisième, quatrième et cinquième solutions :

(3) $$\begin{cases} x = \dfrac{a\sqrt{3}}{12}(5 + 3\sqrt{3}), \\ y = z = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} - 1). \end{cases}$$

Sixième, septième et huitième solutions :

(4) $$\begin{cases} x = \dfrac{a\sqrt{3}}{12}(3\sqrt{3} - 5), \\ y = z = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} + 1). \end{cases}$$

Neuvième, dixième et onzième solutions :

(5) $$\begin{cases} x = \dfrac{a}{12}(3\sqrt{3} + 5), \\ y = z = \dfrac{a}{4}(\sqrt{3} - 1). \end{cases}$$

Douzième, treizième et quatorzième solutions :

(6) $$\begin{cases} x = \dfrac{a}{12}(3\sqrt{3} + 5), \\ y = z = \dfrac{a}{4}(\sqrt{3} + 1). \end{cases}$$

Quinzième, seizième et dix-septième solutions :

$$(7) \qquad x = y = z = \frac{a\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

Dix-huitième, dix-neuvième et vingtième solutions :

$$(8) \qquad x = y = z = \frac{a\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}-1).$$

Les huit solutions (1), (2), (7), (8), qui correspondent aux trois rayons égaux, sont la réciproque de la question suivante :

Trouver les côtés des huit triangles équilatéraux formés par les tangentes communes extérieures à trois cercles égaux tangents entre eux.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

I. *Démontrer qu'une fonction elliptique $f(u)$ aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ peut être exprimée :*

1° *Par un quotient de fonctions σ;*
2° *Par la fonction ζ et ses dérivées;*
3° *Par les fonctions pu et $p'u$.*

Les fonctions σ, ζ et p se rapportant au couple de périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$.

II. *On considère deux fonctions de x, u et v, définies par les équations*

$$u = \int_0^\infty \frac{e^{-z}\sin zx}{\sqrt{z}}\,dz,$$

$$v = \int_0^\infty \frac{e^{-z}\cos zx}{\sqrt{z}}\,dz.$$

1° *Faire voir qu'elles satisfont à deux équations différentielles du premier ordre, linéaires, sans second membre.*

2° *Intégrer ce système d'équations linéaires et en déduire les valeurs de deux intégrales définies u et v.*

(Lille, juillet 1901.)

SOLUTION.

On a

$$x\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2}u = 0,$$

$$\frac{du}{dx} - x\frac{dv}{dx} - \frac{1}{2}v = 0.$$

On peut en déduire une équation en v par l'élimination de u. Mais il est préférable de traiter le système par le procédé de d'Alembert. Enfin, si l'on pose $u = \lambda v$, on obtient

$$(\lambda x + 1)\frac{dv}{dx} + v\left(\lambda' x + \frac{1}{2}\lambda\right) = 0,$$

$$(\lambda - x)\frac{dv}{dx} + v\left(\lambda' - \frac{1}{2}\right) = 0;$$

d'où

$$\frac{2\lambda'}{1+\lambda^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

équation qui s'intègre immédiatement. Comme pour $x = 0$, on a

$$u = 0, \qquad \lambda = 0$$

et

$$v = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

on posera

$$x = \operatorname{tang} t,$$

et l'on aura :

$$u = \rho \sin\frac{t}{2},$$

$$v = \rho \cos\frac{t}{2},$$

ρ étant défini par l'une des équations du système. L'intégration s'achève sans difficulté. On a enfin :

$$u = A \sin\frac{t}{2}\sqrt{\cos t}, \qquad \text{où} \qquad A = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$v = A \cos\frac{t}{2}\sqrt{\cos t}, \qquad \text{»} \qquad t = \operatorname{arc\,tang} x.$$

I. *Contact de deux courbes dans l'espace; cercle osculateur d'une courbe gauche.*

II. *On considère l'équation différentielle*

$$(1) \qquad 4y^2y''' - 18yy'y'' + 15y'^3 = 0,$$

dont le premier membre est, à un facteur près $\varphi(y)$, *la dérivée troisième d'une certaine fonction* $f(y)$.

1° *Déterminer la fonction* $f(y)$ *et en déduire l'intégrale générale de l'équation* (1);

2° *Intégrer directement l'équation* (1).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{(x^2+4)^2}\,dx,$$

où le signe log *désigne un logarithme népérien.*

Après avoir donné l'expression de l'intégrale demandée, on en calculera la valeur numérique avec trois décimales.

(Toulouse, juillet 1901.)

I. *Condition pour que les droites* $X = AZ + P$, $Y = BZ + Q$ *aient une enveloppe. Équation différentielle des lignes de courbure.*

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on considère la courbe* (Γ) *définie par les formules*

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sin t \cos t, \\ z = \cos^2 t, \end{cases}$$

où t *désigne un angle variable.*

1° *Montrer que la courbe* (Γ) *est tout entière située sur une sphère* (S) *ayant pour centre l'origine et qu'elle se projette suivant un cercle sur le plan* yOz.

2° *La droite polaire d'un point quelconque de* (Γ) *passe par le point* O : *soit* P *l'un des deux points où la droite polaire du point* M *rencontre la sphère* (S) *et* V *l'angle des rayons* OM *et* OP. *Vérifier que, si l'on pose*

$$u = \sin t,$$

on a

$$\cos V = \frac{u(u^2-3)}{\sqrt{8-3u^2}}, \qquad \sin V = \sqrt{\frac{(2-u^2)^3}{8-3u^2}}.$$

Calculer, pour un point quelconque de (Γ), *les coordonnées du centre de courbure, le rayon de courbure, le rayon de torsion.*

3° *La courbe, lieu du point* P, *est la* COURBE DE TORSION *relative à la courbe* (Γ). *Montrer que, si l'on désigne par* s *et* τ *les arcs décrits sur la sphère* (S) *par les points* M *et* P, *on a toujours*

$$\frac{dV}{ds} = \frac{d\tau}{ds},$$

et que, par suite, la différence $V-\tau$ *reste constante quand le point* M *décrit la courbe* (Γ).

Solution.

1° La courbe (Γ) est tout entière située sur la sphère et sur le cylindre définis par les équations

$$x^2+y^2+z^2=1, \qquad y^2+z^2=z;$$

c'est le contour d'une *fenêtre de Viviani.*

Il y a un point double au point $x=0$, $y=0$, $z=1$; le cône ayant pour sommet ce point et pour directrice la courbe (Γ) est de révolution autour d'un axe parallèle à Ox; l'égalité

$$\frac{z-1}{y} = -\operatorname{tang} t$$

donne l'interprétation géométrique du paramètre t.

2° La courbe (Γ) étant tracée sur une sphère de centre O, le plan normal, et par suite la droite polaire, passent constamment par le point O. On a aisément les cosinus directeurs de cette droite polaire OP; on en déduit les valeurs de $\cos V$ et de $\sin V$. Si C est la trace de la droite polaire sur le plan osculateur, C est le centre de courbure de la courbe au point M; ses coordonnées se calculent en remarquant que

$$OC = \cos V.$$

Le rayon de courbure $MC = \sin V$; on a une vérification en se servant de la formule connue

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{s'^3} \qquad (A = y'z'' - z'y'',\ B = \ldots).$$

On trouve pour le rayon de torsion T

$$\frac{1}{T} = \frac{6\cos t}{8 - 3\sin^2 t}.$$

3° Comme on connaît $\cos V$ et $\sin V$ en fonction de t, pour avoir $\frac{dV}{dt}$ il suffit de différentier les deux membres de la formule qui donne $\cos V$; on en déduit

$$\frac{dV}{ds} = \frac{6\cos t}{8 - 3\sin^2 t} = \frac{1}{T}.$$

Or la courbe lieu du point P est la *courbe de torsion* relative à la courbe (Γ); il en résulte

$$\frac{dV}{ds} = \frac{d\tau}{ds} \qquad (V - \tau = \text{const.}).$$

Ce résultat est évident géométriquement, si l'on remarque que le point P est le point où le grand cercle normal en M à la courbe (Γ) touche son enveloppe, de sorte que le lieu de P est la développée sphérique de (Γ).

Remarque. — La condition pour que quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de la courbe (Γ) soient dans un même plan est

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 1,$$

en posant

$$\lambda = \operatorname{tang}\left(\frac{t}{2}\right)$$

et en désignant par λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 les valeurs de λ qui correspondent aux quatre points M_1, M_2, M_3, M_4.

III. *L'hyperbole équilatère* $xy = 1$ *et les droites* $x = \alpha$, $y = \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ *déterminent un triangle mixtiligne; calculer l'intégrale curviligne*

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) dy$$

étendue à l'arc d'hyperbole formant l'un des côtés du triangle; calculer ensuite, en la transformant en intégrale double, la même intégrale étendue au contour entier du triangle parcouru dans le sens direct.

Épreuve pratique. — *Sur la parabole représentée, en axes rectangulaires* Ox, Oy, *par l'équation* $y^2 = 4x$, *on considère les points* A_1, A_2, ..., A_n, ..., *dont les abscisses sont* $1, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{10^{n-1}}, \ldots$; *calculer avec deux chiffres décimaux exacts la somme des cordes*

$$OA_1 + OA_2 + \ldots + OA_n + \ldots.$$

On fait tourner autour de la corde A_1B_1 *de la parabole, tracée perpendiculairement à* Ox *par le point d'abscisse* 1, *le segment de la parabole compris entre cette corde et le sommet; calculer le moment d'inertie par rapport à son axe* A_1B_1 *du volume de révolution ainsi engendré; la densité est supposée constante et égale à l'unité.*

(Nancy, juillet 1901.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

909.

(1869, p. 47.)

Un ellipsoïde de grandeur donnée est tangent aux trois faces d'un angle trièdre trirectangle. Trouver la courbe qui limite la position possible d'un point de contact sur une des faces. (E. Lemoine.)

SOLUTION

Par M. H. LAURENT.

Je développe l'énoncé ainsi qu'il suit :

Un ellipsoïde d'axes donnés $2a$, $2b$, $2c$ est placé dans un trièdre trirectangle; il peut alors occuper une infinité de positions. On demande de déterminer, sur les faces du trièdre, les points de contact possibles de l'ellipsoïde, ou, plus exactement, le contour à l'intérieur duquel l'ellipsoïde peut toucher chaque face.

Soient

α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe $2a$ relatifs aux arêtes du trièdre pris pour axes de coordonnées;

α', β', γ' ceux de l'axe $2b$;

α'', β'', γ'' ceux de l'axe $2c$,

$$a > b > c.$$

Soient x, y, z les coordonnées du centre de l'ellipsoïde; les conditions de contact seront

$$(1)\qquad \begin{cases} a^2\alpha^2 + b^2\alpha'^2 + c^2\alpha''^2 = x^2, \\ a^2\beta^2 + b^2\beta'^2 + c^2\beta''^2 = y^2, \\ a^2\gamma^2 + b^2\gamma'^2 + c^2\gamma''^2 = z^2, \end{cases}$$

en sorte que, en ajoutant,

$$(2)\qquad a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

équation du lieu du centre.

Mais cette équation n'est l'équation du lieu du centre qu'au point de vue *analytique; en réalité,* le centre de l'ellipsoïde *solide, réel,* ne pourrait pas occuper *effectivement* tous les points de la surface de la sphère (2), et en particulier, si $a = b = c$, il est évident que le centre de l'ellipsoïde occupera une et une seule position bien déterminée.

Commençons par chercher la portion de la sphère (2) sur laquelle peut demeurer le centre de l'ellipsoïde. A cet effet, considérons la première des formules (1). Les α^2 doivent être compris entre 0 et 1. On doit avoir

$$a^2\alpha^2 + b^2\alpha'^2 + c^2\alpha''^2 = x^2,$$
$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1,$$

ce qui impose un maximum à x^2, autre que $a^2+b^2+c^2$, que l'on déduit de (2); ce maximum s'obtient en posant

$$\begin{aligned} a^2\alpha\, d\alpha + b^2\alpha'\, d\alpha' + c^2\alpha''\, d\alpha'' &= 0,\\ \alpha\, d\alpha + \alpha'\, d\alpha' + \alpha''\, d\alpha'' &= 0; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, par la méthode du multiplicateur,

$$(a^2+\lambda)\alpha = 0, \qquad (b^2+\lambda)\alpha' = 0, \qquad (c^2+\lambda)\alpha'' = 0,$$

et, comme α, α', α'' ne peuvent être tous trois nuls, λ doit être égal à $-a^2$, à $-b^2$ ou à $-c^2$; cela montre que x^2 doit être compris entre a^2 et c^2; et comme x est (si l'on veut) positif, on voit que x et, pour la même raison, y et z doivent rester compris entre a et c.

Le centre de l'ellipsoïde devra donc rester à l'intérieur d'un hexagone sphérique tracé sur la sphère (2) et dont les côtés auront pour équations, (2) d'abord et

$$\begin{aligned} x &= a, & x &= c,\\ y &= a, & y &= c,\\ z &= a, & z &= c. \end{aligned}$$

A chaque point de l'intérieur de cet hexagone correspondra un point de contact sur chaque face du trièdre; au périmètre de l'hexagone correspondra sur chaque face du trièdre une ligne limitative du point de contact de l'ellipsoïde; on peut se borner à chercher celle de ces trois lignes située sur le plan des xy. C'est ce que je vais faire.

Soient ξ'', η'', o les coordonnées du point de contact de l'ellipsoïde, quand x, y, z sont les coordonnées du centre. Si nous supposons l'ellipsoïde rapporté à son centre et à ses axes, son équation sera

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1.$$

Si l'on suppose que

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = p \qquad (\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1)$$

soit un plan tangent, le point de contact aura pour coordonnées

$$\frac{a^2\lambda}{\sqrt{a^2\lambda^2+b^2\mu^2+c^2\nu^2}}, \quad \frac{b^2\mu}{\sqrt{a^2\lambda^2+b^2\mu^2+c^2\nu^2}}, \quad \frac{c^2\nu}{\sqrt{a^2\lambda^2+b^2\mu^2+c^2\nu^2}},$$

ce qui exprime que les distances du point de contact aux plans principaux sont égales aux rapports des carrés des demi-axes correspondants, à la distance du centre au plan tangent, multipliés respectivement par les cosinus des angles que la normale fait avec ces demi-axes.

Appliquant ce théorème au point ξ'', η'', o, on aura, en observant que les équations des plans principaux sont

$$\alpha(X - x) + \beta(Y - y) + \gamma(Z - z) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les relations

$$\begin{aligned}
\alpha(\xi'' - x) + \beta(\eta'' - y) - \gamma z &= \pm \frac{a^2\gamma}{z},\\
\alpha'(\xi'' - x) + \beta'(\eta'' - y) - \gamma' z &= \pm \frac{b^2\gamma'}{z},\\
\alpha''(\xi'' - x) + \beta''(\eta'' - y) - \gamma'' z &= \pm \frac{c^2\gamma''}{z}.
\end{aligned}$$

Pour déterminer le signe à adopter, on multiplie par γ, γ', γ'' et l'on ajoute; on a

$$-z^2 = \pm(a^2\gamma^2 + b^2\gamma'^2 + c^2\gamma''^2)$$

qui, devant être d'accord avec la troisième équation (1), exige que l'on prenne le signe $-$; donc

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\alpha(x - \xi'') + \beta(y - \eta'') + \gamma z &= \frac{c^2\gamma}{z},\\
\alpha'(x - \xi'') + \beta'(y - \eta'') + \gamma' z &= \frac{b^2\gamma'}{z},\\
\alpha''(x - \xi'') + \beta''(y - \eta'') + \gamma'' z &= \frac{c^2\gamma''}{z}.
\end{aligned}\right.$$

Les neuf cosinus α, ..., γ'' se réduisant à trois quantités distinctes, en les éliminant entre (1) et (3), qui forment seulement cinq équations distinctes, il restera deux équations entre x, y, z, ξ'', η'' qui permettront de trouver l'aire décrite par ξ'', η'', quand x, y, z décrira l'hexagone dont nous avons parlé.

Cela posé, en appelant ξ', o, ζ' les coordonnées du point de contact de l'ellipsoïde sur le plan des xz et o, η, ζ les coordonnées du point analogue sur le plan des yz, on aura le groupe de neuf équations

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)+\alpha x=\frac{a^2\alpha}{x},\\
&\beta'(y-\eta)+\gamma'(z-\zeta)+\alpha' x=\frac{b^2\alpha'}{x},\\
&\beta''(y-\eta)+\gamma''(z-\zeta)+\alpha'' x=\frac{c^2\alpha''}{x},\\
&\gamma(z-\zeta')+\alpha(x-\xi')+\beta y=\frac{a^2\beta}{y},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\alpha(x-\xi'')+\beta(y-\eta'')+\gamma z=\frac{a^2\gamma}{z},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}\right.$$

entre lesquelles on peut éliminer les neuf cosinus, ce qui donne les relations

$$(5)\quad \begin{vmatrix}
x-\frac{a^2}{x} & y-\eta & z-\zeta\\
x-\xi & y-\frac{a^2}{y} & z-\zeta'\\
x-\xi'' & y-\eta'' & z-\frac{a^2}{z}
\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}
x-\frac{b^2}{x} & y-\eta & z-\zeta\\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots
\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}
x-\frac{c^2}{x} & y-\eta & z-\zeta\\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots
\end{vmatrix}=0.$$

On obtient d'autres relations en multipliant les trois premières équations (4) par β, β', β'' ou γ, γ', γ'' et en ajoutant, ce qui donne

$$x(y-\eta)=a^2\alpha\beta+b^2\alpha'\beta'+c^2\alpha''\beta'',$$
$$x(z-\zeta)=a^2\alpha\gamma+b^2\alpha'\gamma'+c^2\alpha''\gamma'';$$

si l'on fait des permutations tournantes, on élimine encore les neuf cosinus, et l'on a les relations remarquables

$$x(y-\eta)=y(x-\xi'),$$
$$x(z-\zeta)=z(x-\xi''),$$

ou, plus simplement,

$$\begin{aligned} x\eta &= y\xi', & x\zeta &= z\xi'', \\ y\zeta' &= z\eta'', & y\xi' &= x\eta, \\ z\xi'' &= x\zeta, & z\eta'' &= y\zeta', \end{aligned}$$

équations qui se réduisent à celles de la première colonne

$$(6) \qquad x\eta = y\xi', \qquad y\zeta' = z\eta'', \qquad z\xi'' = x\zeta.$$

Les relations (5), (6), quand x, y, z seront donnés, permettront de calculer les six quantités ξ, η, η', ζ', ζ'', ξ''.

On peut faire usage de (6) pour éliminer η'' et ξ'' et, par exemple, ξ'; les formules (5) deviennent alors

$$\begin{vmatrix} x - \dfrac{a^2}{x} & y - \eta & z - \zeta \\ x - \dfrac{x\eta}{y} & y - \dfrac{a^2}{y} & z - \zeta' \\ x - \dfrac{x\zeta}{z} & y - \dfrac{y\zeta'}{z} & z - \dfrac{a^2}{z} \end{vmatrix} = 0.$$

. . . .

Ces trois équations sont du second degré en ζ'; en éliminant ζ', on a deux relations entre x, y, z, η et ζ. En y supposant, par exemple, $x = a$, on aura l'une des équations du contour limitateur.

Je crois qu'il serait dommage de pousser les calculs plus loin; ce serait détruire la belle symétrie de nos formules. Il suffit, je crois, d'avoir montré qu'il est possible, par des calculs simples, faciles à effectuer, d'exprimer les coordonnées des contours limitateurs en fonction d'un paramètre.

Il ne sera peut-être pas inutile de faire observer que de (6) on tire

$$\eta\zeta'\xi'' = \zeta\xi'\eta'' \qquad \text{ou} \qquad \frac{\eta}{\zeta}\,\frac{\zeta'}{\xi'}\,\frac{\xi''}{\eta''} = 1,$$

ce qui exprime une propriété des tangentes des angles que les rayons vecteurs des points de contact font avec les axes. Cela exprime aussi qu'en considérant les plans, qui passent par les symétriques des points de contact par rapport aux axes, passent aussi par l'origine, etc.

[B12] [R3]

CONFÉRENCE SUR LES NOTIONS DE CALCUL GÉOMÉTRIQUE UTILISÉES EN MÉCANIQUE ET EN PHYSIQUE;

Par M. E. CARVALLO,
Examinateur des élèves à l'École Polytechnique.

---

1. *Introduction.* — Vous connaissez les *vecteurs,* vous avez vu l'importance de cette notion en Géométrie et en Mécanique. D'autres notions s'imposent aussi impérieusement à la suite des vecteurs en Géométrie, en Mécanique, en Physique. Ce sont :

Le *cycle,* ou surface douée, comme on va voir, de direction et de sens. Il peut être regardé comme le produit de deux vecteurs, produit que j'affecte du qualificatif *superficiel* pour le distinguer d'autres espèces de produits.

Le *flux,* ou volume doué de signe. Il peut être regardé comme le produit d'un élément superficiel par un vecteur, ou le produit de trois vecteurs.

Je vais expliquer ces notions, la correspondance qui existe entre les cycles et les vecteurs, déduire de cette correspondance les notions si utiles de produit algébrique et de produit vectoriel de deux vecteurs.

En outre, je vous donnerai un ensemble de notations et conventions. D'une façon générale, j'adopterai celles de Maxwell, le maître de la science électrique moderne. Toutefois, pour alléger l'écriture et soulager la mémoire, je porterai aux notations du maître les modifications suivantes : Maxwell adopte la notation d'Hamilton (quaternions) pour les produits de vecteurs; j'adopterai la notation plus avantageuse de Grassmann. Maxwell adopte pour chaque vecteur quatre lettres, ses trois composantes, puis le vecteur lui-même, désigné par une lettre gothique; je désignerai le vecteur par la même lettre qui sert à désigner aussi la première de ses trois composantes : c'est ainsi que α désignera la force magnétique, comme la première de ses trois composantes α, β, γ. Il n'en résultera aucune confusion possible. En outre, (α) désignera sa grandeur et (α^2) son carré.

Divers avantages résulteront pour vous de cette étude :

1° Sûreté dans les questions de sens et de signe, si délicates en Mécanique, en Physique et notamment en Électrodynamique.

2° Simplification des écritures et soulagement de la mémoire.

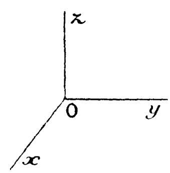
3° Double caractère des transformations, qui seront algébriques par les symboles et géométriques par leur signification. Elles offriront les avantages des deux méthodes, puissance de l'Algèbre, intuition de la Géométrie.

4° Préparation à la lecture de Maxwell, Tait, Peano, et autres auteurs aujourd'hui nombreux, qui ont employé le *calcul géométrique* de Grassmann et Hamilton ou les clefs algébriques de Cauchy.

2. *Trièdre des coordonnées $Oxyz$. Convention des astronomes.* — Avec Maxwell, adoptez cette convention. Les lettres sont disposées de façon qu'un observateur placé suivant Oz (*fig.* 1), la tête vers z, doive faire tourner Ox de $\frac{\pi}{2}$ en sens inverse des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire de droite à gauche, pour l'amener

sur Oy. Ce sens est le *sens direct* des astronomes. C'est le sens adopté en Géométrie plane, en Trigonométrie. C'est le sens contraire à celui des géomètres, qui ont

Fig. 1.

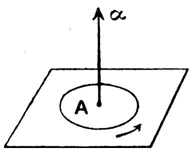


adopté deux conventions contraires, l'une pour la Géométrie plane, l'autre pour l'espace, incohérence qu'il vaut mieux éviter en adoptant, avec Maxwell, la convention des astronomes.

3. *Vecteurs et cycles. Leur correspondance.* — Une translation, une vitesse, une vitesse de rotation présentent ce caractère commun de posséder une grandeur, une direction de droite, un sens. Toute entité présentant ces trois caractères est un *vecteur*. De même qu'un *élément rectiligne* parcouru dans un sens donné conduit à la notion de vecteur, de même une *surface plane* dont le périmètre est parcouru dans un sens donné de rotation conduit à la notion correspondante de *cycle,* doué aussi de grandeur, direction de plan et sens : l'aire de la surface, la direction de son plan et le sens dans lequel son périmètre est parcouru. Le périmètre ainsi doué de sens est le *circuit* du cycle. Le cycle n'est pas seulement doué des trois propriétés, grandeur, direction et sens; il est entièrement caractérisé par elles, comme le vecteur, car on y fait abstraction de la position et de la forme de sa surface. Au cycle A on peut faire correspondre un vecteur α ayant même mesure que l'aire A,

perpendiculaire au plan de A (*fig.* 2), et dans un sens tel que, relativement à α, le circuit de A soit de sens direct. Par ce procédé, nous établissons entre éléments

Fig. 2.



superficiels et vecteurs une correspondance telle qu'à chaque élément superficiel correspond un vecteur, et inversement. Avec Grassmann, désignez par $|\,A$ le vecteur α *correspondant de* A, et par $|\,\alpha$ le cycle A *correspondant de* α.

De même que les résultats de la théorie des trièdres peuvent être appliqués aux triangles sphériques qui leur correspondent, de même les résultats que vous connaissez sur les vecteurs s'appliquent aux cycles sans qu'il soit nécessaire d'en faire une étude spéciale. C'est ainsi que, pour faire l'addition des cycles, on pourra faire l'addition des vecteurs correspondants et prendre le cycle correspondant du vecteur résultant.

4. *Multiplication des vecteurs et des cycles. Flux.* — Soient deux vecteurs α_1 et α_2 (*fig.* 3). J'appellerai *produit superficiel* de ces deux vecteurs et je désignerai par $\alpha_1\alpha_2$ le cycle qu'on obtient en portant le vecteur $M_1M_2 = \alpha_2$ à la suite de $OM_1 = \alpha_1$, en terminant le parallélogramme ainsi commencé et en prenant le cycle de ce parallélogramme dans le sens OM_1M_2. D'après nos conventions, on a

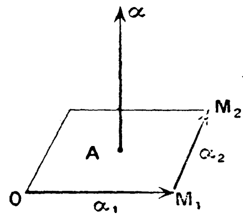
$$\alpha_1\alpha_2 = -\alpha_2\alpha_1.$$

Le vecteur

$$\alpha = |[\alpha_1 \alpha_2], \tag{1}$$

qui correspond à $\alpha_1 \alpha_2$, est le *produit vectoriel* des deux vecteurs α_1 et α_2. Pour passer rapidement de la formule vectorielle (1) aux formules analytiques, dans le système de Descartes, il faut savoir par cœur les composantes

Fig. 3.



de α en fonction des composantes de α_1 et de α_2; mais vous les savez déjà. En effet, vous avez vu en Mécanique que $\alpha_1 \alpha_2$ correspond à l'idée de couple et $|[\alpha_1 \alpha_2]$ à l'idée de moment. Vous savez donc que les projections du vecteur α sur les trois axes sont

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2, \\ \beta &= \gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2, \\ \gamma &= \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

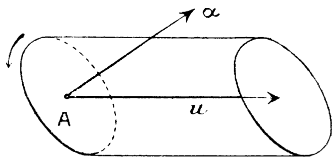
et que ces valeurs représentent aussi bien les valeurs algébriques des projections du cycle $\alpha_1 \alpha_2$ sur les trois plans coordonnés.

Passons au *produit d'un cycle et d'un vecteur*. Il répond à l'idée de *flux*. Quand un fluide possède une vitesse u, le débit du fluide à travers un élément superficiel A est mesuré par le cylindre (A, u), qui a pour base A et pour génératrice u. On fera connaître le sens du débit (A, u) en le précédant d'un signe, le signe $+$

si le vecteur u est du même côté que le vecteur $\alpha = | A$, le signe — dans le cas contraire. Le volume (A, u) ainsi précédé d'un signe est le flux du vecteur u à travers A. On l'appelle aussi *produit de* A et u et on le désigne indifféremment par Au ou uA. On peut encore le désigner par $u | \alpha$, en écrivant $| \alpha$ au lieu de A.

Le cylindre (A, u) (*fig.* 4) a pour mesure le produit

Fig. 4.



de sa base par sa hauteur; or, la base a même mesure que α, et la hauteur est la projection de u sur α. On peut donc dire que $u | \alpha$ représente le produit des deux longueurs u et α par le cosinus de leur angle, expression que vous avez rencontrée en Mécanique avec la notion de travail. C'est ce que nous appellerons *produit algébrique* des vecteurs u et α. La dernière définition étant symétrique par rapport aux deux vecteurs, on a

$$u | \alpha = \alpha | u.$$

Enfin, on peut considérer l'élément superficiel A comme le produit superficiel de deux vecteurs $A = \alpha_1 \alpha_2$. Le produit $Au = \alpha_1 \alpha_2 u$ mérite alors le nom de *produit algébrique des trois vecteurs* α_1, α_2 *et* u.

D'après nos définitions, ce produit change de signe quand on intervertit l'ordre de deux des facteurs vectoriels. Il est positif quand les facteurs α_1, α_2, u sont disposés comme les axes Ox, Oy, Oz du trièdre de référence. Il convient de savoir par cœur l'expression du flux en fonction des composantes des vecteurs qui le définissent.

Soient α, β, γ, puis u, v, w les composantes des vecteurs α et u; on sait que le produit de leurs longueurs par le cosinus de leur angle a pour valeur $u\alpha + v\beta + w\gamma$; on a donc

$$u\,|\,\alpha = u\alpha + v\beta + w\gamma. \tag{3}$$

Si, dans cette formule, je remplace $|\,\alpha$ par $\alpha_1\alpha_2$, on aura l'expression de $u\,\alpha_1\alpha_2$, savoir :

$$\left\{\begin{aligned} u\alpha_1\alpha_2 = {} & u(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) \\ & + v(\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2) + w(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Dans le second membre on reconnaît le développement du déterminant

$$u\,\alpha_1\alpha_2 = \begin{vmatrix} u & v & w \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

résultat également connu pour représenter le volume du parallélipipède.

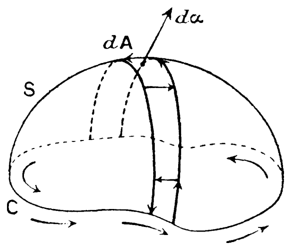
Seulement, la question de signe méritait d'être reprise ici au point de vue de notre définition du flux.

5. *Cycles gauches.* — J'ai considéré seulement des cycles plans; mais la notion s'étend aux figures gauches. Ainsi : prenez une surface quelconque limitée par un circuit gauche C; décomposez-la en éléments superficiels, tels que dA, par un réseau de courbes tracées sur la surface. Chacun d'eux définit un cycle élémentaire dA de sens déterminé par le circuit C. La résultante de tous ces cycles est, *par définition*, le cycle limité par le circuit C. Ce cycle résultant ne dépend d'ailleurs pas de la surface S limitée par le circuit C,

mais il est entièrement déterminé par le circuit seul; pourvu que celui-ci ne change pas, vous pouvez changer arbitrairement la surface S sans changer le cycle résultant (*fig.* 5).

Cette propriété, vous la connaissez déjà. En effet, elle résulte de ce que la notion de cycle contient celle de couple et de la façon que voici : le circuit C repré-

Fig. 5.



sente un ensemble de forces élémentaires représentées chacune par un élément de la courbe C. Ce système de forces peut être remplacé par le système des couples que représentent les circuits élémentaires dA, car, les forces des couples élémentaires se détruisant deux à deux sur les côtés communs, il ne reste que les forces du circuit C.

Par le principe de correspondance, cette propriété est équivalente à cette autre propriété également bien connue et qu'on rencontre en Hydrostatique : *Si la pression est uniforme, la résultante des pressions sur une surface limitée par une courbe C est indépendante de la surface et dépend seulement de la courbe*, ou encore : *la résultante des pressions sur la surface totale d'un solide est nulle.*

6. *Règles de calcul relatives à la multiplication des vecteurs.* — Une propriété fondamentale des for-

mules (2), (3), (4) est d'être linéaire par rapport aux trois composantes de chaque vecteur. Il en résulte que la multiplication des vecteurs jouit de la propriété dite *distributive :* c'est cette propriété par laquelle le produit d'une somme par une grandeur s'obtient en multipliant chaque partie de la somme et en ajoutant les produits partiels; ainsi, par exemple,

$$(\alpha + \alpha')\,|\,u = \alpha\,|\,u + \alpha'\,|\,u.$$

Vous pourrez appliquer cette règle fondamentale et toutes celles qui en découlent.

Vous aurez souvent à appliquer une propriété plus particulière, relative au vecteur

$$\big|\big[\alpha.\,|[\alpha_1\alpha_2]\big],$$

c'est-à-dire $|[\alpha\alpha_3]$ en posant

$$\alpha_3 = |[\alpha_1\alpha_2], \qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2 \\ \beta_3 = \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2 \\ \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \end{array}\right\}.$$

La première des composantes du vecteur considéré est

$$\begin{aligned}\beta\gamma_3 - \gamma\beta_3 &= \beta(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) - \gamma(\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2)\\ &= \alpha_1(\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2) - \alpha_2(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1).\end{aligned}$$

On en conclut la formule vectorielle

$$(5) \qquad \big|\big[\alpha\,|[\alpha_1\alpha_2]\big] = \alpha_1.\alpha\,|\,\alpha_2 - \alpha_2.\alpha\,|\,\alpha_1.$$

En particulier, si l'on remplace α_1 par α et α_2 par u,

$$(6) \qquad \big|\big[\alpha\,|[\alpha u]\big] = \alpha.\alpha\,|\,u - (\alpha^2).u \quad \text{avec} \quad (\alpha^2) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

7. *Extension des notations aux symboles différentiels.* — Vous aurez à considérer, par exemple, l'expres-

sion $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$. En généralisant la notation de la formule (3), vous pourrez l'écrire $\frac{d}{dx}\Big| u$. De même de toutes les formules où les composantes α, β, γ d'un vecteur sont remplacées par les symboles $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$. C'est ainsi que vous pouvez considérer les vecteurs $\left\|\left[\frac{d}{dx} u\right]\right\|$, puis $\left\|\left[\frac{d}{dx}\right|\left[\frac{d}{dx} u\right]\right\|$ et que, en appliquant à ce dernier la formule (6), vous aurez

$$\left\|\left[\frac{d}{dx}\right|\left[\frac{d}{dx} u\right]\right\| = \frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\Big| u - \left(\frac{d^2}{dx^2}\right) u.$$

Le second membre représente, d'après nos conventions, un vecteur qui a pour composantes

$$\alpha = \frac{d\theta}{dx} - \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right) u,$$

$$\beta = \frac{d\theta}{dy} - \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right) v, \qquad \theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

$$\gamma = \frac{d\theta}{dz} - \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right) w,$$

8. *Conclusions.* — Vous avez appris la notion de cycle correspondant à celle de vecteur, puis la multiplication des vecteurs qui renferme les notions de couple, de moment, de travail, de flux. Vous avez un système de conventions d'après Maxwell, de notations d'après Maxwell et Grassmann. Les notations s'étendent aux symboles différentiels $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$.

Cet ensemble constitue un matériel de travail précieux en Physique mathématique.

[J4]

SUR UN PROBLÈME DE SUBSTITUTIONS ÉTUDIÉ PAR MONGE;

PAR M. LE LIEUTENANT A. BIENAYMÉ.

Monge a présenté à l'Académie des Sciences une *Note sur un tour de cartes,* insérée dans les *Mémoires des Savants étrangers* (t. VII, 1773); ce tour repose sur la façon suivante de mêler les cartes.

Soit n un nombre *pair* de cartes, rangées dans l'ordre

$$(1)\qquad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n;$$

on prend la première, on place la deuxième *au-dessus,* la troisième au-dessous, la quatrième au-dessus, et ainsi de suite; on obtient ainsi la suite

$$(2)\qquad n,\ n-2,\ n-4,\ \ldots,\ 2,\ 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ n-1.$$

On observe que certaines cartes peuvent conserver leur place primitive, ou que plusieurs permutent de rang entre elles; par exemple, pour $n = 10$, les suites (1) et (2) sont les suivantes :

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \\ 10, & 8, & 6, & 4, & 2, & 1, & 3, & 5, & 7, & 9. \end{matrix}$$

La substitution qui permet de passer de la première à la deuxième est le produit des substitutions circulaires

$$(1, 10, 9, 7, 3, 6)\,(2, 8, 5)\,(4).$$

On voit que, si l'on soumet à cette substitution la $2^{\text{ième}}$ suite, puis la $3^{\text{ième}}$ suite qui en résultera, et ainsi de suite, le terme 4 restera toujours inaltéré, les termes 2, 8, 5 se reproduiront après trois opérations, et les autres après six opérations. Après six opérations, on retombera évidemment sur la suite initiale.

Dans sa Note, Monge traite particulièrement des conditions que doit remplir le nombre pair n pour qu'une carte reste à la même place, ou pour que 2, 3, 4 ou 5 cartes permutent entre elles, et, dans ces divers cas, il calcule le rang des cartes singulières en fonction de n.

Nous nous proposons ici de déterminer le nombre d'opérations au bout desquelles une carte quelconque se reproduit, et d'en déduire celui au bout desquelles se reproduit la suite initiale tout entière. Mais, auparavant, nous allons étendre le problème au cas où n est *impair*.

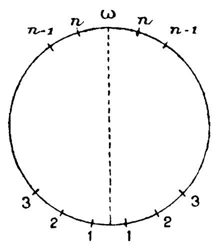
Si, en effet, dans ce cas, nous plaçons la deuxième carte *au-dessous* de la première, puis la troisième au-dessus, et ainsi de suite, nous passerons de la suite

$$(1)\qquad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

à la suite

$$(2')\quad n,\ n-2,\ n-4,\ \ldots,\ 1,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ n-1.$$

Une même représentation géométrique (¹) va nous



permettre de passer de la suite (1) à la suite (2) ou à la

(¹) Cet exposé nous a été indiqué par M. Duporcq, ainsi que l'extension du problème au cas où n est impair.

suite (2′), suivant la parité de n. Considérons un polygone régulier de $2n+1$ côtés (convexe ou étoilé), et numérotons ses sommets successifs

$$\omega,\quad n,\quad n-1,\quad n-2,\quad \ldots,\quad 1,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n-1,\quad n.$$

A chaque sommet de ce polygone, α, par exemple, substituons le sommet β tel que l'arc $\omega\beta$ soit double de l'arc $\omega\alpha$. Aux sommets numérotés

$$(1)\qquad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n$$

nous substituerons ainsi les sommets numérotés

$$(2)\qquad n,\quad n-2,\quad n-4,\quad \ldots,\quad 2,\quad 1,\quad 3,\quad \ldots,\quad n-1$$

si n est *pair*, ou bien

$$(2')\qquad n,\quad n-2,\quad n-4,\quad \ldots,\quad 1,\quad 2,\quad 4,\quad \ldots,\quad n-1$$

si n est *impair*.

On déduit de là que, si l'on répète k fois cette opération, au nombre p se substituera le nombre p_k, inférieur ou égal à n, défini par l'égalité

$$(n+p)\,2^k = \text{mult.}(2n+1) \pm (n+p_k).$$

On aura donc

$$p_k = p$$

si

$$(a)\qquad (n+p)(2^k \pm 1) = \text{mult.}(2n+1),$$

et le plus petit exposant k satisfaisant à cette condition représentera le nombre d'opérations nécessaires pour que la $p^{\text{ième}}$ carte reprenne sa place.

On voit que, si $n+p$ et $2n+1$ sont premiers entre eux, ce qui a lieu, en particulier, pour $p=1$, il faudra que

$$(b)\qquad 2^k \pm 1 = \text{mult.}(2n+1).$$

Le nombre ainsi défini satisfera nécessairement à l'égalité (a), et l'on voit donc que :

Lorsque la première carte reprendra sa place, il en sera de même de toutes; ce résultat sera atteint au bout de k opérations, k étant l'exposant de la plus petite puissance de 2, qui diffère d'une unité d'un multiple de $2n+1$.

Remarque. — Si $2n+1$ est premier, toutes les cartes se reproduiront au bout du même nombre k d'opérations; chacune d'elles appartiendra donc à une permutation circulaire comprenant k termes, et par suite le nombre n sera divisible par k; par suite, l'un des deux nombres $2^n \pm 1$ sera divisible par 2^n+1, et par conséquent aussi leur produit $2^{2n}-1$: c'est un cas particulier du *théorème de Fermat*.

[P5]

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE TISSOT;

Par M. Maurice FRÉCHET,
Élève de l'École Normale supérieure.

Théorème. — *Étant donnée une correspondance* ponctuelle *quelconque entre trois surfaces* S_1, S_2, S_3, *il existe* en général *quatre couples de familles de courbes sur* S_1 *telles que les angles sous lesquels se coupent deux courbes d'un même couple soient conservés dans la correspondance.*

En effet, nous supposons la correspondance telle qu'on puisse exprimer les coordonnées de trois points correspondants M_1 sur S_1, M_2 sur S_2, M_3 sur S_3 au moyen des deux mêmes paramètres u, v. Soient alors m_1, m'_1; m_2, m'_2; m_3, m'_3; n, n' les valeurs de $\frac{du}{dv}$ pour les tangentes isotropes à S_1 et M_1, les transformées des tangentes isotropes à S_2 en M_2 et à S_3 en M_3, et pour les tangentes M_1T_1, $M_1T'_1$, à deux courbes de S_1 passant en M_1. Soient, de plus, V_1, V_2, V_3 les angles de M_1T_1, $M_1T'_1$ et des tangentes aux courbes correspondantes. On aura :

$$e^{2iV_1} = (m_1, m'_1, n, n'),$$
$$e^{2iV_2} = (m_2, m'_2, n, n'),$$
$$e^{2iV_3} = (m_3, n_3, n, n').$$

On peut considérer m_1, m'_1; m_2, m'_2; m_3, m'_3; n, n' comme racines des équations respectives :

$$x^2 - 2p_k x + q_k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3), \qquad x^2 - 2\alpha + \beta = 0.$$

En posant

$$r_k = \sqrt{p_k^2 - q_k}, \qquad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta},$$

on aura

$$(1)\quad e^{2iV_k} = \frac{m_k - n}{m'_k - n} : \frac{m_k - n'}{m_k - n'} = 1 + \frac{4 r_k \gamma}{(p_k - \alpha)^2 - (r_k - \gamma)^2}.$$

On aura alors les courbes cherchées par les équations

$$e^{iV_1} = e^{iV_2} = e^{iV_3},$$

qui deviennent, en tenant compte de (1),

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{p_1^2 - p_2^2 + r_2^2 - r_1^2}{r_1 - r_2} - \dfrac{p_1^2 - p_3^2 + r_3^2 - r_1^2}{r_1 - r_3} \\[2ex] \qquad = 2\alpha\left(\dfrac{p_2 - p_1}{r_2 - r_1} - \dfrac{p_3 - p_1}{r_3 - r_1}\right), \end{cases}$$

$$(3)\quad \frac{(p_1 - \alpha)^2 - r_1^2}{r_1} - \frac{(p_2 - \alpha)^2 - r_2^2}{r_2} = \gamma^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

De (2) on tire *une* valeur de α, et en portant dans (3) on en tire *une* valeur de γ^2, donc de $\beta = \alpha^2 - \gamma^2$.

D'ailleurs, il n'y a que quatre combinaisons de signes des quantités r_i donnant des systèmes différents de valeurs pour α et β, car on obtient les mêmes expressions de α et β en changeant de signe tous les r_i. A chaque combinaison correspond un seul couple de tangentes, ce qui démontre le théorème.

Il y aura une infinité de couples de familles satisfaisant aux conditions dans le seul cas où la correspondance serait une représentation géographique de l'une des surfaces sur l'une au moins des deux autres.

[D]

APPLICATION AUX FONCTIONS CIRCULAIRES ET AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES D'UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE DÉTERMINATION DES FONCTIONS DONT ON DONNE LE GROUPE DES SUBSTITUTIONS;

Par M. E. JAGGI.

Nous avons démontré (¹) que les fonctions qui admettent les substitutions d'un groupe donné, et seulement celles-là, sont les intégrales de l'équation différentielle

$$(1)\quad 2\frac{F'''(x)}{F'(x)} - 3\frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} = 6\frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)} - 3\frac{\Phi'^2(x)}{\Phi^2(x)} - 4\Psi(x),$$

(¹) *Détermination des fonctions qui admettent les substitutions d'un groupe quelconque donné, et seulement ces substitutions-là* (*Nouvelles Annales*, août 1902, p. 368).

Φ et Ψ étant les fonctions déterminées par les formules

$$(2)\qquad \Phi(x) = e^{2\sum\limits_i \int\left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)dx} = \prod_i e^{2\int\left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)dx},$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \Psi(x) &= 3\sum_i\left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right) + 3\left[\sum_i\left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)\right]^2 \\ &= 3\sum_i\left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right) + \frac{3}{4}\,\frac{\Phi'^2(x)}{\Phi^2(x)}, \end{aligned}\right.$$

où les p_i sont les *périodes* du groupe

$$p_i(x) = s_i(x) - x,$$

et les quantités h_i, k_i, ..., des fonctions de x qui rendent convergentes les séries indiquées dans ces formules.

Ces fonctions $F(x)$ peuvent aussi être déterminées comme quotients de fonctions entières $\Theta(x)$, qui sont les fonctions à *multiplicateur* du groupe, et sont les intégrales de l'équation

$$(4)\qquad \Phi\Theta'' - \Phi'\Theta' + (\Phi'' - \Phi\Psi)\Theta = 0.$$

Le *multiplicateur* θ de ces fonctions Θ est donné, au signe près, par la formule

$$(5)\qquad \theta = \sqrt{\frac{\Phi(s)\,ds}{\Phi(x)\,dx}},$$

où $s(x)$ est la substitution considérée du groupe.

La Note présente a pour but de faire l'application de notre théorie aux fonctions circulaires et aux fonctions elliptiques.

1. Considérons d'abord le groupe des substitutions de $\operatorname{tang} x$

$$s_n(x) = n\pi + x \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Les périodes sont

$$p_n = n\pi.$$

La somme $\sum\limits_n \frac{1}{p_n}$ est convergente si on l'écrit

$$\sum_n \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_{-n}}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

et se réduit à zéro. Il s'ensuit

$$\Phi(x) = e^{-2\sum \int \frac{dx}{p}} = \text{const.}$$

La somme $\sum \frac{1}{p_n^2}$ est convergente :

$$\sum_n \frac{1}{p_n^2} = \sum_n \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n'} \frac{1}{n'^2} = \frac{2}{\pi^2}\,\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$(n = \pm 1, \pm 2, \ldots;\ n' = 1, 2, 3, \ldots).$$

On a donc

$$\Psi = \frac{3}{4}\,\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} - 3\sum_n \frac{1}{p_n^2} = -1.$$

L'équation aux fonctions Θ est, par suite,

$$\Theta'' + \Theta = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\Theta = \lambda \sin x + \mu \cos x.$$

Les fonctions périodiques du groupe donné sont donc

$$F(x) = \frac{\lambda \sin x + \mu \cos x}{\gamma \sin x + \rho \cos x} = \frac{\lambda \operatorname{tang} x + \mu}{\gamma \operatorname{tang} x + \rho},$$

où λ, μ, ν, ρ sont des constantes arbitraires.

Le multiplicateur θ des fonctions Θ est donné par la formule (5)

$$\theta(s, x) = \pm \sqrt{\frac{\Phi(s)\,ds}{\Phi(x)\,dx}} = \pm 1,$$

et l'on voit d'autre part que, lorsque n est pair dans s_n, $\theta = +1$, et lorsque n est impair, $\theta = -1$.

2. Considérons maintenant le groupe des substitutions de la fonction $\sin x$

$$s_n(x) = 2n\pi + x \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$
$$s_m(x) = (2m+1)\pi - x \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Les *périodes* sont

$$p_n = 2n\pi,$$
$$p_m = (2m+1)\pi - 2x.$$

La somme $\sum \frac{1}{p}$ se décompose en deux séries : l'une, $\sum \frac{1}{p_n}$, est nulle, ainsi qu'on le voit en associant deux à deux les termes égaux et de signes contraires $\frac{1}{p_n}$, $\frac{1}{p_{-n}}$; l'autre, $\sum \frac{1}{p_m}$, est convergente, pourvu que l'on associe deux à deux les termes dans lesquels $2m+1$ a des valeurs égales et de signes contraires.

Nous pouvons donc écrire, sous cette condition,

$$\Phi(x) = e^{-2\sum \int \frac{dx}{(2m+1)\pi - 2x}}$$
$$(2m+1 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots),$$

et, par conséquent,

$$\Phi(x) = \lambda \prod \left[1 - \frac{x^2}{\left((2m'+1)\frac{\pi}{2}\right)^2} \right] = \lambda \cos x$$
$$(2m'+1 = 1, 3. 5, \ldots),$$

où λ est une constante arbitraire.

D'autre part, $\sum \frac{1}{p^2}$ est convergente

$$\sum \frac{1}{p^2} = \sum_n \frac{1}{p_n^2} + \sum_m \frac{1}{p_m^2},$$

$$\sum_n \frac{1}{p_n^2} = \sum_n \frac{1}{4n^2\pi^2} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n'} \frac{1}{n'^2} = \frac{1}{2\pi^2}\,\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{12}$$

$$(n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots;\ n' = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\sum_m \frac{1}{p_m^2} = \sum_m \frac{1}{[(2m+1)\pi - 2x]^2} = -\frac{1}{4}\,\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{L}\cos x = \frac{1}{4\cos^2 x}.$$

On a donc

$$\Psi = \frac{3}{4}\,\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} - 3\sum \frac{1}{p^2} = \frac{3}{4}\operatorname{tang}^2 x - 3\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4\cos^2 x}\right) = -1,$$

et, par suite,

$$\Phi'' - \Phi\Psi = 0.$$

On est averti, par cette identité (¹), que parmi les fonctions périodiques du groupe il y en a qui sont entières; mais poursuivons la recherche des fonctions Θ: l'équation en Θ est alors

$$\Phi\Theta'' - \Phi'\Theta' = 0,$$

ou

$$\cos x\,\Theta'' + \sin x\,\Theta' = 0.$$

Son intégrale générale est

$$\Theta = \lambda \sin x + \mu,$$

et les fonctions périodiques du groupe sont données par la formule

$$F(x) = \frac{\lambda \sin x + \mu}{\gamma \sin x + \rho},$$

où λ, μ, ν, ρ sont arbitraires; on voit que les fonctions Θ

(¹) *Loc. cit.*

sont elles-mêmes, ainsi que cela devait être (*loc. cit.*), les *fonctions périodiques entières du groupe.* Leur multiplicateur, qui est *un*, est d'ailleurs donné, au signe près, par la formule (5).

Sachant qu'il existe des fonctions entières du groupe, on peut, comme nous l'avons vu (*loc. cit.*), former directement ces fonctions par la formule suivante, sans passer par l'équation en Θ :

$$\mathrm{F}(x) = \int e^{-2\sum\int\frac{dx}{p}}\,dx = \int \Phi\,dx = \lambda \sin x + \mu.$$

Pour obtenir $\sum \frac{1}{p_m}$ sous forme de série convergente, nous avons rangé les termes $\frac{1}{p_m}$ dans un certain ordre; on peut remplacer cette somme par une série *absolument convergente* en introduisant certaines quantités h_m, comme l'indiquent les formules générales (2) et (3). Nous prendrons

$$h_m = \frac{1}{(2m+1)\pi},$$

et nous aurons

$$\begin{aligned}\Phi &= e^{2\sum_m \int\left(\frac{1}{(2m+1)\pi} - \frac{1}{(2m+1)\pi - 2x}\right)dx} \\ &= \lambda \prod_m \left(1 - \frac{x}{(2m+1)\frac{\pi}{2}}\right) e^{\frac{x}{(2m+1)\frac{\pi}{2}}} \\ &\qquad (2m+1 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots),\end{aligned}$$

et, par suite, comme précédemment,

$$\Phi = \lambda \cos x.$$

Quant à la série $\sum \frac{1}{p^2}$, elle est absolument convergente. Nous sommes donc conduits ainsi aux mêmes fonctions Φ, Ψ et Θ que précédemment.

Le cas du groupe de la fonction $\cos x$ se traiterait de la même manière que le précédent; on peut d'ailleurs passer du cas de $\sin x$ au cas de $\cos x$ en changeant x en $x + \frac{\pi}{2}$.

3. Considérons maintenant le cas des fonctions elliptiques. Soit d'abord le groupe des substitutions de la fonction pu

$$s = 2m\omega + 2n\omega' \pm u \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

où ω et ω' sont des nombres quelconques dont le rapport est imaginaire.

Les périodes sont de deux sortes :

$$p_{m,n} = 2m\omega + 2n\omega',$$
$$\pi_{m,n} = 2m\omega + 2n\omega' - 2u.$$

La somme des inverses des périodes n'est pas une série absolument convergente. Notre formule générale de Φ nous donne

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \sum_i \left(2h_i - \frac{2}{p_i}\right) = \sum_{m,n} \left(2h_{m,n} - \frac{2}{p_{m,n}} - \frac{2}{\pi_{m,n}}\right).$$

Dans $\pi_{m,n}$ on peut annuler à la fois m et n, ce qu'on ne peut faire dans $p_{m,n}$; faisant donc sortir du signe $\sum$ le terme en $\pi_{m,n}$ dans lequel $m = n = 0$, nous écrirons

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{1}{u} + \sum_{m,n}{}' \left(2h_{m,n} - \frac{1}{m\omega + n\omega'} - \frac{1}{m\omega + n\omega' - u}\right),$$

où les quantités $2h_{m,n}$ doivent rendre convergente la série indiquée.

Nous prendrons

$$2h_{m,n} = \frac{2}{m\omega + n\omega'} + \frac{u}{m\omega + n\omega'},$$

et nous aurons, en intégrant,

$$\Phi = 2\lambda u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{m\omega + n\omega'}\right) e^{\frac{u}{m\omega + n\omega'} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(m\omega+n\omega')^2}},$$

où λ est une constante arbitraire.

Formons maintenant Ψ par notre formule générale

$$\Psi = \frac{3}{4}\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} + 3\sum_i \left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right);$$

nous avons l'expression

$$\Psi = \frac{3}{4}\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} + 3\sum_{m,n}{}' \left(k_{m,n} - \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega' - 2u)^2}\right) - \frac{3}{4u^2},$$

où nous avons fait sortir du signe $\sum$ le terme $\frac{1}{4u^2}$ afin de ne conserver sous ce signe que des termes où m et n ne s'annulent pas à la fois. $k_{m,n}$ doit être tel que la série indiquée soit absolument convergente. Nous prendrons

$$k_{m,n} = \frac{2}{(2m\omega + 2n\omega')^2},$$

et nous aurons

$$\Psi = \frac{3}{4}\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} + \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{u^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(m\omega + n\omega')^2} - \frac{1}{(m\omega + n\omega' - u)^2}\right)\right] = \frac{3}{4}\frac{\Phi''}{\Phi},$$

et, par conséquent,

$$\Phi'' - \Phi\Psi = \frac{\Phi''}{4}.$$

Cette expression n'étant pas identiquement nulle, *il n'y a pas de fonctions entières du groupe* (¹). L'équa-

(¹) En examinant tous les cas possibles de substitutions de la forme $ma + nb + x$, $m\alpha + n\beta - x$, on reconnaît que $\Phi'' - \Phi\Psi$ n'est jamais nulle, ce qui montre qu'il n'existe pas de fonction doublement périodique qui soit entière et constitue ainsi une nouvelle démonstration d'un théorème bien connu. Notre méthode permet aussi de voir qu'il n'existe pas de fonction qui n'ait *que* des substitutions de la forme $ma + nb + x$ et que toute fonction doublement périodique a des substitutions de la forme $ma + nb - x$.

tion aux fonctions à multiplicateur est

$$\Phi\Theta'' - \Phi'\Theta' + \frac{1}{4}\Phi''\Theta = 0.$$

La formule que nous avons trouvée pour Φ peut être transformée par des procédés trop connus pour qu'il soit utile d'y insister, et l'on arrive directement aux formules

$$\Phi = \lambda e^{\frac{2\eta}{\omega}u^2} \sin\frac{\pi}{\omega}u \prod_n \frac{1 - q^{2n}\cos\frac{2\pi}{\omega}u + q^{4n}}{(1-q^{2n})^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\Phi = \lambda e^{\frac{2\eta}{\omega}u^2} \sin\frac{\pi}{\omega}u \prod_n \frac{\sin(n\tau - 2\nu)}{\sin n\tau\pi} e^{-2\nu\pi i} \prod_n \frac{\sin(n\tau + 2\nu)}{\sin n\tau\pi} e^{2\nu\pi i},$$

où

$$2\nu = \frac{u}{\omega}, \qquad \tau = \frac{\omega'}{\omega}, \qquad q = e^{\tau\pi i},$$

$$\eta = \frac{\pi^2}{2\omega}\left(\frac{1}{6} - \sum_n \frac{4q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\right),$$

et l'une quelconque des trois formules de Φ permet de démontrer que

$$\Phi(u + 2\omega) = e^{8\eta(u+\omega)}\,\Phi(u),$$
$$\Phi(u + 2\omega') = e^{8\eta'(u+\omega')}\,\Phi(u),$$

où

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \pm\frac{\pi i}{2},$$

les signes $+$ et $-$ correspondant respectivement aux cas où $\bmod q$ est inférieur ou supérieur à l'unité.

On en déduit

$$\Phi(2m\omega + 2n\omega' \pm u) = \pm e^{8(m\eta+n\eta')(m\omega+n\omega'\pm u)}\,\Phi(u).$$

Le multiplicateur des fonctions Θ du groupe est donc, au signe près,

$$\theta(s, u) = \sqrt{\frac{\Phi(s)\,ds}{\Phi(u)\,du}}$$

ou

$$\theta(2m\omega + 2n\omega' \pm u, u) = e^{(2m\eta+2n\eta')(2m\omega+2n\omega'\pm 2u)}.$$

Rappelons que, pour former l'équation en Θ, nous nous sommes servi dans une Note précédente (*loc. cit.*) de la relation

$$\Theta_2\Theta_1' - \Theta_1\Theta_2' = \mu\Phi,$$

où Θ_1 et Θ_2 sont deux fonctions Θ *quelconques* du groupe et μ une constante arbitraire.

Si nous remarquons maintenant que

$$\Phi = \lambda\sigma(2u),$$

et que, puisque

$$p u = e_\alpha + \frac{\sigma_\alpha^2 u}{\sigma^2 u} \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

les quatre fonctions $\sigma^2 u$, $\sigma^2_{\alpha,\beta,\gamma} u$ sont des fonctions à multiplicateur du groupe, la relation précédente, où l'on fait $\Theta_1 = \sigma^2 u$, $\Theta_2 = \sigma_\alpha^2 u$, deviendra

$$\begin{aligned}\sigma^2 u \times 2\sigma u\,\sigma' u - \sigma^2 u \times 2\sigma_\alpha u\,\sigma_\alpha' u &= \lambda\mu\sigma(2u)\\ &= 2\lambda\mu\sigma u\,\sigma_\alpha u\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u,\end{aligned}$$

ou

$$\sigma_\alpha u\,\sigma' u - \sigma u\,\sigma_\alpha' u = \lambda\mu\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u,$$

relation connue, où $\lambda\mu$ est un facteur constant. En particulier, si $\alpha = 3$, on a $\lambda\mu = 1$.

On peut vérifier de la manière suivante que les quatre fonctions $\sigma^2 u$, $\sigma^2_{\alpha,\beta,\gamma} u$ sont des solutions de l'équation en Θ.

On a

$$\begin{aligned}\frac{\Phi'}{\Phi} &= 2\frac{\sigma'(2u)}{\sigma(2u)} = 2\zeta(2u),\\ \frac{\Phi''}{\Phi} &= \frac{\Phi'^2}{\Phi^2} + 4\zeta'(2u) = 4\zeta^2(2u) - p(2u),\end{aligned}$$

et l'équation prend la forme

$$\frac{\Theta''}{\Theta} - 2\zeta(2u)\frac{\Theta'}{\Theta} + \zeta^2(2u) - p(2u) = 0. \tag{6}$$

Faisons d'abord $\Theta = \sigma^2 u$;

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = 2\frac{\sigma' u}{\sigma u} = 2\zeta u, \qquad \frac{\Theta''}{\Theta} = 4\zeta^2 u - 2p u.$$

Le premier membre prend la forme suivante :

$$[2\zeta u - \zeta(2u)]^2 - [2p u + p(2u)]$$

et l'on peut vérifier directement que cette expression est nulle : il s'ensuit que $\sigma^2 u$ est une solution. Pour vérifier que $\sigma_\alpha^2 u$ est aussi une solution, mettons l'identité précédente sous la forme

$$[2\zeta u - \zeta(2u)]^2 - [p(2u) - 2\zeta' u] = 0$$

et remarquons, en nous reportant à l'équation en Θ (6), que si l'on fait $\Theta = \sigma_\alpha^2 u$, le premier membre de cette équation en Θ n'est autre que celui de l'identité précédente, où l'on remplace ζu, $\zeta' u$ par $\zeta_\alpha u$, $\zeta'_\alpha u$ sans changer $\zeta(2u)$ ni $p(2u)$. Or, si dans l'identité précédente on change u en $u + \omega_\alpha$, on trouve facilement

$$[2\zeta_\alpha u - \zeta(2u)]^2 - [p(2u) - 2\zeta'_\alpha u] = 0.$$

Il s'ensuit que $\sigma_\alpha^2 u$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ est aussi une solution de l'équation en Θ (6).

L'équation en Θ est suffisante pour déterminer les fonctions périodiques du groupe

$$F(u) = \frac{\lambda p u + \mu}{\gamma p u + \rho},$$

en sorte que l'équation (1) aux fonctions $F(u)$ n'est pas utile dans ce cas particulier. Elle donne lieu cependant à une autre vérification intéressante : si l'on y remplace Ψ par sa valeur $\frac{3}{4}\frac{\Phi''}{\Phi}$, cette équation devient

$$(7) \qquad 2\frac{F'''}{F'} - 3\frac{F''^2}{F'^2} = 6\frac{\Phi''}{\Phi} - 3\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} - 4\Psi = 3\left(\frac{\Phi''}{\Phi} - \frac{\Phi'^2}{\Phi^2}\right).$$

Or $\Phi(u) = \lambda\sigma(2u)$ et $\wp u$ est l'une des fonctions $F(u)$; donc

$$2\frac{\wp''' u}{\wp' u} - 3\frac{\wp''^2 u}{\wp'^2 u} = 3\frac{d^2}{du^2}\mathcal{L}\Phi(u) = 12\frac{d^2}{(d.2u)^2}\sigma(2u) = -12\wp(2u).$$

On obtient ainsi l'expression de $\wp(2u)$ en fonction de $\wp' u$, $\wp'' u$, $\wp''' u$; si l'on remplace ces dérivées par leurs valeurs en $\wp u$, on obtient la formule connue :

$$(8) \qquad \wp(2u) = \frac{\left(\wp^2 u + \frac{1}{4}g_2\right)^2 + 2g_3\wp u}{4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3}.$$

Au sujet de l'équation (1) aux fonctions périodiques $F(x)$ d'un groupe quelconque donné, on peut faire une remarque qui peut être d'une grande utilité pour les fonctions elliptiques :

Si l'on pose

$$\chi(x) = 6\frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)} - 3\frac{\Phi'^2(x)}{\Phi^2(x)} - 4\Psi(x),$$

on voit que les solutions $s(x)$ de l'équation

$$\chi(x) = \chi(s)s'^2 + 2\frac{s'''}{s'} - 3\frac{s''^2}{s'^2}$$

sont toutes les substitutions (et seulement celles-là) qui laissent invariable l'ensemble des solutions $F(x)$ de l'équation (1), c'est-à-dire qui transforment l'une des fonctions $F(x)$ en une fonction linéaire de $F(x)$

$$\frac{\lambda F(x) + \mu}{\nu F(x) + \rho}$$

ou laissent $F(x)$ invariable (¹).

(¹) Il résulte également de là que la fonction de t obtenue en posant $\wp u = t$ dans l'expression (8) de $\chi(u)$, et qui est rationnelle et du quatrième degré en t, admet *trois* substitutions *linéaires* en t et n'en admet pas d'autres.

Dans le cas du groupe considéré, $x = u$, l'une des fonctions F est pu et χ n'est autre que $-12p(2u)$; il s'ensuit que *toute substitution $s(u)$ qui transforme pu en une fonction linéaire de pu est une solution de l'équation en s*

$$12p(2u) = 12p(2s)s'^2 - 2\frac{s'''}{s'} + 3\frac{s''^2}{s'^2}.$$

Parmi ces solutions sont les substitutions du groupe donné; l'intégrale générale contient trois constantes arbitraires qui ne sont autres que les trois constantes arbitraires de la fonction linéaire de pu, solution générale de l'équation (7).

4. Considérons maintenant le groupe de substitutions

$$\begin{matrix} 4m\omega + 2n\omega' + x \\ 2(2m+1)\omega + 2n\omega' - x \end{matrix} \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

qui est celui de la fonction

$$F(x) = \mathrm{sn}(gx \mid g\omega, g\omega')$$

dans l'hypothèse où la partie réelle de $\frac{\omega'}{\omega i}$ est positive, et où $g\omega$, $g\omega'$ sont les intégrales *complètes*

$$g\omega = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

$$g\omega' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Les périodes du groupe sont

$$p_{m,n} = 4m\omega + 2n\omega',$$
$$\pi_{m,n} = 2(2m+1)\omega + 2n\omega' - 2x.$$

La somme des inverses des périodes n'est pas une série absolument convergente. On peut former une série absolument convergente

$$\sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)$$

par l'introduction de quantités h_i convenablement choisies ; mais on peut aussi rendre convergente cette somme en rangeant ses termes dans un ordre convenable. Écrivons

$$\sum_i \frac{1}{p_i} = \sum_{m,n} \frac{1}{p_{m,n}} + \sum_{m,n} \frac{1}{\pi_{m,n}}$$

et associons deux à deux les périodes $p_{m,n}$ qui sont égales et de signes contraires, et quatre à quatre les périodes $\pi_{m,n}$ dans lesquelles $2m+1$ et n ont des valeurs respectivement égales et de signes contraires ; la première série du second membre est alors nulle identiquement, et l'on a

$$\begin{aligned}
\sum_i \frac{1}{p_i} &= \sum_{m,n} \frac{1}{\pi_{m,n}} \\
&= \sum_{m,n} \left(\frac{1}{2(2m+1)\omega + 2n\omega' - 2x} - \frac{1}{2(2m+1)\omega + 2n\omega' + 2x} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2(2m+1)\omega - 2n\omega' - 2x} - \frac{1}{2(2m+1)\omega - 2n\omega' + 2x} \right) \\
&\qquad (m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots).
\end{aligned}$$

Si l'on fait croître à l'infini m d'abord, et ensuite n, la série du second membre est convergente, et il en est de même du produit doublement infini qu'on en tire pour Φ :

$$\begin{aligned}
\Phi &= e^{-2\sum_i \int \frac{dx}{p_i}} \\
&= \lambda \prod_{m,n} \left(1 - \frac{x}{(2m+1)\omega + n\omega'}\right) \left(1 + \frac{x}{(2m+1)\omega + n\omega'}\right) \\
&\qquad \times \left(1 - \frac{x}{(2m+1)\omega - n\omega'}\right) \left(1 + \frac{x}{(2m+1)\omega - n\omega'}\right).
\end{aligned}$$

Par une méthode de calcul bien connue, Φ se met sous la forme

$$\Phi = \lambda \cos\frac{\pi}{2\omega}x \prod_n \frac{1 + 2q^n \cos\frac{\pi}{\omega}x + q^{2n}}{(1+q^n)^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Formons la fonction Ψ. On a

$$\Psi = \frac{3}{4}\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} + 3\sum\left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right).$$

La somme

$$\sum_i \frac{1}{p_i^2} = \sum_{m,n}' \frac{1}{p_{m,n}^2} + \sum_{m,n} \frac{1}{\pi_{m,n}^2}$$

n'est pas absolument convergente, mais on peut la rendre convergente en rangeant ses termes dans l'ordre qui a été adopté précédemment pour former Φ.

On a ainsi

$$\sum' \frac{1}{p_{m,n}^2} = \sum' \frac{1}{(4m\omega + 2n\omega')^2}$$
$$= \frac{1}{4}\sum' \frac{1}{(2m\omega + n\omega')^2} = \frac{\pi^2}{8\omega^2}\left(\frac{1}{6} - \sum_n \frac{4q^n}{(1-q^n)^2}\right).$$

Nous désignerons par $\frac{c}{4}$ cette constante qui, par les notations de Weierstrass, s'écrirait

$$\frac{c}{4} = \frac{\zeta(2\omega \mid 2\omega, \omega')}{2\omega} = \frac{\zeta\left(\omega \mid \omega, \frac{\omega'}{2}\right)}{4\omega} = \frac{2\eta_1 + e_3\omega}{4\omega}.$$

On a, d'autre part, en associant, comme nous l'avons dit, les périodes $\pi_{m,n}$,

$$\sum_{m,n} \frac{1}{\pi_{m,n}^2} = \sum_{m,n} \frac{1}{[2(2m+1)\omega + 2n\omega' - 2x]^2} = \frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{L}\Phi = \frac{1}{4}\left(\frac{\Phi''}{\Phi} - \frac{\Phi'^2}{\Phi^2}\right),$$

et, par conséquent, en annulant les quantités k_i,

$$\Psi = \frac{3}{4}\left(\frac{\Phi''}{\Phi} - c\right)$$

et

$$\Phi'' - \Phi\Psi = \frac{1}{4}(\Phi'' + 3c\Phi).$$

L'équation en Θ est donc

$$\Phi\Theta'' - \Phi'\Theta' + \frac{1}{4}(\Phi'' + 3c\Phi)\Theta = 0,$$

où Φ est donnée par la formule trouvée précédemment. On reconnaît facilement que Φ est, à un facteur constant près, le produit des deux fonctions $H(gx)$ et $\Theta(gx)$ de Jacobi.

On peut vérifier que les fonctions $H(gx)$ et $\Theta(gx)$ sont des solutions de l'équation précédente.

D'autre part, nous servant d'une relation générale entre Φ et deux quelconques des fonctions à multiplicateur du groupe, que nous avons rappelée à propos de pu, nous pouvons écrire

$$\Theta(gx)\,H'(gx) - H(gx)\,\Theta'(gx) = A\,H_1(gx)\,\Theta_1(gx),$$

où A est un facteur constant; on sait d'ailleurs que $A = gk'$.

La formule (5) donne au signe près le multiplicateur connu des fonctions de Jacobi.

Si l'on veut passer du cas de la fonction périodique

$$u = \operatorname{sn}(gx \mid g\omega, g\omega')$$

au cas de la fonction v, dont nous avons démontré la corrélation avec u dans une Note précédente,

$$v = \operatorname{sn}[g(x + \omega) \mid g\omega, g\omega'],$$

dont les substitutions sont

$$4m\omega + 2n\omega' \pm x,$$

on n'aura qu'à changer x en $x+\omega$ dans l'équation précédente en Θ : la fonction Φ sera alors le produit des deux fonctions $\mathrm{H}(gx)$, $\Theta(gx)$, et l'intégrale générale sera

$$\lambda\,\mathrm{H}_1(gx)+\mu\,\Theta_1(gx).$$

Quant à la constante c, elle reste la même.

5. On pourrait obtenir les mêmes fonctions Φ et les équations des deux cas précédents par des produits absolument convergents, en introduisant certaines quantités h_i et k_i convenablement choisies; on aurait ainsi, dans le cas de la fonction φ,

$$\Phi=\lambda e^{-\frac{\eta}{\omega}x^2}x\prod{}'\left(1-\frac{x}{w'}\right)e^{\frac{x}{w'}+\frac{x^2}{2w'^2}}=\mu\,\mathrm{H}(gx)\,\Theta(gx)$$
$$(w'=2m\omega+n\omega';\ m,n=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

où λ et μ sont des constantes dont l'une est arbitraire.

On peut obtenir aussi les fonctions de Weierstrass σu, $\sigma_\alpha u$, en choisissant convenablement les quantités h_i, k_i. Les équations aux fonctions Θ relatives aux deux cas indiqués sont alors de la forme

$$\Phi\Theta''-\Phi'\Theta'+\frac{1}{4}(\Phi''+3e_3\Phi)\Theta=0.$$

Dans le premier cas, on a

$$\Phi=\lambda\,\sigma_1 u\,\sigma_2 u$$

et l'intégrale générale de l'équation précédente est

$$\Theta=\lambda\,\sigma u+\mu\,\sigma_3 u.$$

Dans le second cas, on a

$$\Phi=\lambda\,\sigma u\,\sigma_3 u$$

et l'intégrale générale est

$$\Theta=\lambda\,\sigma_1 u+\mu\,\sigma_2 u.$$

On peut d'ailleurs passer des équations relatives aux fonctions de Jacobi aux équations relatives aux fonctions de Weierstrass en changeant Φ en

$$\Phi e^{\frac{\eta}{\omega} u^2}$$

et Θ en

$$\Theta e^{\frac{\eta}{2\omega} u^2}.$$

On peut aussi passer du cas du groupe de la fonction pu au cas du groupe de substitutions

$$4m\omega + 2n\omega' \pm x$$

par le changement de ω en 2ω.

Nous n'insistons pas davantage, dans cette Note, sur les applications de notre théorie générale aux fonctions elliptiques, applications qui ne sont pas destinées à donner de résultats nouveaux, mais sont propres à montrer comment cette théorie générale peut être appliquée; comment, en particulier, elle aurait pu *conduire* aux fonctions de Jacobi et aux fonctions de Weierstrass si ces fonctions n'étaient déjà connues, et, par conséquent, comment, dans d'autres cas, elle conduira à la détermination de fonctions dont on donne le groupe des substitutions.

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie élémentaire des séries. Limites. Séries à termes constants. Séries à termes variables. Fonction exponentielle. Fonctions circulaires. Fonction gamma; par M. *Godefroy* (Maurice), bibliothécaire de la Faculté des Sciences de Marseille. Grand in-8° de VIII-266 pages avec figures; 1903.

On sait l'importance de plus en plus grande que les séries tendent à prendre en Analyse et cela tient, sans doute, à ce qu'elles constituent un instrument de calcul d'une singulière puissance, se prêtant, en outre, avec une égale souplesse, aux exigences de la rigueur et de la simplicité. M. Godefroy a donc fait une œuvre des plus utiles en cherchant à exposer, sous une forme attrayante et érudite, la théorie des séries et ses principales applications. Le but qu'il s'est proposé est d'ailleurs atteint d'une façon particulièrement heureuse.

La théorie des séries repose tout entière sur l'idée de limite. M. Godefroy, dans le Chapitre I de son Traité, s'attache avec raison à définir cette notion si souvent employée et peu comprise dont il développe avec soin les conséquences. A ce propos sont rappelées les premières propriétés des fonctions continues et des fonctions dérivables.

L'étude des séries à termes constants forme l'objet du deuxième Chapitre. Les règles de convergence de d'Alembert, de Cauchy, de Raabe et de Gauss sont successivement établies et discutées d'une manière précise, puis vient la théorie des séries de séries avec d'intéressants développements relatifs à la transformation des séries, aux séries de Lambert et de Clausen, à la multiplication des séries.

Le Chapitre III est consacré aux séries à termes variables. Il débute par des généralités sur la convergence uniforme et sur les séries entières. Le théorème d'Abel et les propositions importantes qui en dérivent sont démontrés avec netteté et rigueur. M. Godefroy applique ces principes fondamentaux à l'intégration de l'équation différentielle linéaire du second ordre, puis à la série binomiale, aux polynomes de Legendre et enfin à la série hypergéométrique. La question du développement en série des fonctions d'une variable est ensuite traitée avec détails; l'auteur insiste sur les différentes méthodes pratiques permettant de l'effectuer directement et s'arrête au cas où la fonction considérée est une fraction rationnelle, ce qui le conduit naturellement à dire quelques mots des séries récurrentes et, en particulier, des fonctions numériques de Lucas.

Le type par excellence des séries entières est la série exponentielle, qui joue un si grand rôle en Mathématiques.

M. Godefroy en fait une étude approfondie dans le Chapitre IV et aborde, en même temps, maints sujets instructifs ou curieux : polynomes de Hermite, fonctions de Bessel, nombres et polynomes de Bernoulli, formule sommatoire d'Euler. Nous signalerons aussi la démonstration, d'après Hermite, de l'irrationalité des puissances entières du nombre e et celle de transcendance de ce même nombre due à Hurwitz et à Gordan, toutes deux développées avec beaucoup d'ingéniosité. La fonction a^x est définie au moyen de e^x et sa relation caractéristique

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

est utilisée pour la démonstration, d'après Euler, de la formule du binome dans le cas le plus général. Le Chapitre se termine par l'exposé des propriétés des logarithmes et de la constante d'Euler.

La méthode la plus simple pour donner aux fonctions circulaires une existence purement analytique consiste, comme l'a indiqué M. J. Tannery, à prendre pour définition de $\cos x$ et de $\sin x$ leurs développements en séries entières. C'est la marche suivie par l'auteur, dans le Chapitre V, pour retrouver toute la Trigonométrie. A propos du nombre π est rapportée la belle démonstration de son irrationalité due à Hermite. Les développements en produits infinis, en séries entières, en séries de fractions simples des diverses fonctions circulaires sont ensuite obtenus d'une façon absolument élémentaire. La sommation de certains développements trigonométriques usuels, la fonction continue sans dérivée de Weierstrass, puis la théorie des fonctions circulaires inverses et des fonctions hyperboliques font l'objet de la dernière partie du Chapitre.

Le Chapitre VI renferme l'étude par les séries de la fonction gamma définie comme limite du produit

$$n^x \frac{1.2.3\ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Ce mode d'exposition possède de multiples avantages, car il permet d'établir toutes les propriétés de la fonction gamma d'une manière à la fois uniforme, claire et rigoureuse. Les formules de Weierstrass, de Legendre, de Gauss, de Stirling, de Gudermann, ainsi que les développements en séries entières de $\log \Gamma(1+x)$ et de $\Gamma(1+x)$, se ramènent, en effet, à des transformations faciles de la définition primitive. C'est également par des transformations successives de séries que sont obtenues les séries de Binet et la célèbre série asymptotique de Stirling qui servent à exprimer la fonction de Binet $\varpi(x)$. Le Chapitre se termine par des développements fort intéressants sur les transcendantes de Prym définies par des relations fonctionnelles et sur les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$, dérivées logarithmiques de $\Gamma(x)$, qui sont si utiles pour la sommation de séries importantes.

Nous ne voulons pas achever cette analyse sommaire sans insister sur les qualités qui caractérisent le Traité de M. Godefroy : une rédaction claire, le souci de la rigueur, la richesse des renseignements historiques et bibliographiques, le choix des nombreux exercices accompagnant chacun des Chapitres, et enfin le côté pratique de l'exposition. Ce sont là des raisons certaines de succès, et nous sommes persuadés que le présent Ouvrage rendra de grands services à tous ceux qui étudient l'Analyse par nécessité ou par goût. Les candidats aux grandes Écoles ou aux Certificats universitaires y trouveront traitées une foule de questions relevant des programmes de leurs examens; ils verront dans ce Livre un guide sérieux qui, tout en leur épargnant bien des recherches inutiles, leur donnera matière à penser.

E. Estanave,
Docteur ès Sciences.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Composition écrite. — *Un cylindre de révolution, de rayon* R, *est représenté par les équations*

$$x = \mathrm{R}\cos\varphi, \qquad y = \mathrm{R}\sin\varphi.$$

Dans le plan xOy, *on donne la conique*

$$x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2 = (x - \mathrm{R}\cos\theta)^2\mathrm{K}^2.$$

On demande :

1° *De déterminer les courbes tracées sur le cylindre, telles que leurs tangentes rencontrent la conique. On* *pourra chercher la relation différentielle qui lie z à φ, et intégrer cette équation.*

2° *Examiner, en particulier, le cas où* $\theta = 0$.

3° *Que deviennent les formules générales lorsque* $\theta = \frac{\pi}{2}$, $K > 1$. *Dans ce cas, en supposant l'une des courbes limitée aux deux points où elle coupe la base du cylindre dans le plan des xy, calculer l'aire de la surface du cylindre comprise entre cette courbe et la circonférence de base du cylindre.*

Épreuve pratique. — *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + (1-a)x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = bx + cx^2.$$

(Montpellier, juillet 1901.)

Composition. — *Trouver une surface de révolution telle que la somme, ou la différence, des rayons principaux de courbure soit constante en chacun de ses points (deux questions). Cas particuliers où la surface rencontre tangentiellement, ou normalement, l'axe de révolution.*

Épreuve pratique. — *Une surface réglée Σ est engendrée par une droite G qui se meut d'une façon déterminée en rencontrant constamment une directrice donnée D. On demande :*

1° *L'équation du plan tangent à Σ en un point M de G, et, en particulier, au point central relatif à cette génératrice;*

2° *D'exprimer la condition pour que Σ soit développable;*

3° *De déterminer la ligne de striction de Σ, en général, et dans les cas particuliers où G est, ou tangente, ou normale principale, ou binormale à la courbe D.*

(Grenoble, juillet 1901.)

I. *Une surface étant définie en coordonnées semi-polaires par l'équation $z = f(r, \theta)$, former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de cette surface projetées sur le plan xOy. Démontrer que la condition pour que l'un des* *systèmes de ces lignes se projette suivant des droites concourantes à l'origine est que la fonction $f(r, \theta)$ soit linéaire par rapport à r.*

II. Application. — *Recherche des lignes asymptotiques de la surface définie par l'équation*

$$z = r\cos\theta - \frac{ae\sin\theta}{(1-e^2)(1+e\cos\theta)}$$
$$+ \frac{2a}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right).$$

Solution.

L'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface définie par les équations

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = f(r, \theta)$$

peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} d^2x & x'_r & x'_\theta \\ d^2y & y'_r & y'_\theta \\ d^2z & z'_r & z'_\theta \end{vmatrix} = 0,$$

et, après qu'on a exprimé qu'elle admet la solution $d\theta = 0$, qui correspond aux droites passant par l'origine, elle se réduit à

$$d\theta[2\,dr(rf''_{r,\theta} - f'_\theta) + d\theta(rf'_r + f''_\theta)r] = 0.$$

Dans le cas proposé, cette équation devient

$$d\theta\left(\frac{dr}{r} - \frac{e\sin\theta\,d\theta}{1+e\cos\theta}\right) = 0,$$

qui donne les deux systèmes suivants :

$$\theta = c, \qquad r = \frac{p}{1+e\cos\theta},$$

c et p étant deux constantes arbitraires.

Calcul de l'intégrale $u = \displaystyle\int \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$.

SOLUTION.

Posant

$$\tang\frac{\theta}{2} = x \qquad \text{et} \qquad \frac{1+e}{1-e} = a^2,$$

on aura

$$u = \frac{2}{(1-e)^2}\int\frac{(1+x^2)}{(x^2+a^2)^2}\,dx,$$

qui, par décomposition en fractions simples, donnera

$$u = \frac{(1-a^2)x}{a^2(1-e)^2(x^2+a^2)} - \frac{i}{(1+e)(1-e)^2 a}\log\frac{x-ai}{x+ai},$$

ou bien

$$u = -\frac{2ex}{(1-e^2)[1+e+(1-e)x^2]}$$

$$+\frac{2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tang} x\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

avec

$$x = \tang\frac{\theta}{2}.$$

(Grenoble, novembre 1901.)

I. QUESTION DE COURS. — *Énoncer et démontrer les principales propriétés des séries dont les termes sont des fonctions d'une variable complexe, holomorphes dans une aire donnée.*

II. PROBLÈME. — *Déterminer les courbes planes dont le rayon de courbure* R *est en chaque point proportionnel à une puissance impaire* $(2p+1)$ *de la portion de normale* N *comprise entre ce point de la courbe et une droite fixe* Δ

$$R = m N^{2p+1}.$$

Traiter en détail les cas suivants :

1° $$p = 1,$$

2° $$p = 0, \qquad m = \pm 1 \qquad \text{et} \qquad m = \pm 2,$$

où l'intégration peut être faite complètement.

Ce problème est résolu dans plusieurs Traités, en particulier dans celui de M. Jordan (t. III, p. 62).

(Lille, novembre 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *$f(x, \alpha)$ désignant une fonction donnée des deux variables x, α, et a, b étant des constantes ou, plus généralement, des fonctions données de α, énoncer et justifier la règle de Leibniz relative au calcul de la dérivée de la fonction de α définie par l'intégrale*

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx.$$

II. *Intégrer le système d'équations différentielles*

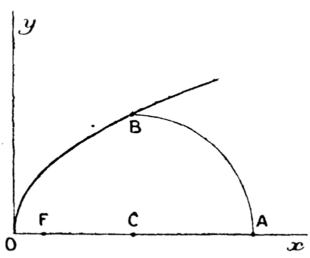
$$\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + x\sqrt{3} = \sin t,$$
$$\frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt} + y\sqrt{3} = \sin t,$$
$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + z\sqrt{3} = \sin t.$$

III. *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface représentée en coordonnées cartésiennes par l'équation*

$$x^2 y^2 z + x^2 - y^2 = 0,$$

et montrer que ce sont des cubiques gauches.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'aire et les coordonnées du centre de gravité du triangle curviligne* OAB *compris*



entre l'axe des x, l'arc OB *de la parabole $y^2 - 2ax = 0$, et l'arc* AB *du cercle $x^2 + y^2 - 4ax = 0$, les axes étant rectangulaires.*

(Toulouse, novembre 1901.)

Épreuve écrite. — *$Oxyz$ étant des axes rectangulaires, un point M décrit une surface jouissant de la propriété suivante : La normale au point M à la surface coupe le plan xOy en un point P tel que* PM = PO.

On demande de :

1° *Former l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces;*

2° *Intégrer cette équation et former l'équation générale des surfaces considérées;*

3° *Déterminer les lignes de courbure de l'une quelconque de ces surfaces, et montrer que l'un des systèmes de lignes de courbure est formé de circonférences situées dans des plans passant par l'axe Oz;*

4° *Montrer que, pour une surface particulière, le point P décrit une courbe du plan xOy, qui peut être quelconque, et déterminer la surface particulière telle que cette courbe ait pour équation*

$$y = ae^{-x}.$$

Épreuve pratique. — *On donne l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

et le paraboloïde

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x - \lambda}{\mu - \lambda} \frac{a^2 - \mu^2}{a^2}$$

rapportés à des axes de coordonnées rectangulaires. On suppose

$$-a < \lambda < \mu < +a.$$

1° *Montrer que ces deux surfaces se coupent suivant une ellipse située dans le plan $x = \mu$, et que le paraboloïde divise le volume de l'ellipsoïde en deux parties;*

2° *Évaluer les deux portions du volume de l'ellipsoïde limitées par le paraboloïde;*

3° *Déterminer λ de façon que l'ellipsoïde soit divisé en deux volumes équivalents.*

(Montpellier, juillet 1902.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1901.

(1901, p. 47.)

Sur une biquadratique, il existe seize points où le plan osculateur à cette courbe la suroscule, et ces seize points sont à l'intersection de la biquadratique avec les faces du tétraèdre ayant pour sommets les sommets des quatre cônes du second degré passant par la biquadratique.

(H. LÉAUTÉ.)

1902.

(1901, p. 47.)

Si, par une génératrice quelconque de l'un des quatre cônes du second degré qui passent par une biquadratique, on mène les plans tangents à cette courbe, les quatre points de contact sont dans un même plan. (H. LÉAUTÉ.)

1904.

(1901, p. 47.)

Si l'on considère quatre plans osculateurs à une biquadratique en quatre points situés dans un même plan, leurs quatre autres points d'intersection avec la courbe sont aussi dans un même plan. (H. LÉAUTÉ.)

1906.

(1901, p. 48.)

Par un point d'une biquadratique, on peut mener neuf plans osculateurs à cette courbe (sans y comprendre le plan osculateur au point choisi); les neuf points d'osculation ainsi déterminés sont trois à trois situés dans trois plans passant par le point donné. (H. LÉAUTÉ.)

1907.

(1901, p. 48.)

Si, par l'une des génératrices d'une quadrique passant par une biquadratique, on mène les quatre plans tangents *à cette courbe, les quatre points de contact sont fixes, quelle que soit la génératrice choisie sur la quadrique considérée.* (H. LÉAUTÉ.)

SOLUTIONS

Par M. MAX GENTY, Lieutenant de vaisseau.

Ces questions concernent toutes des propriétés projectives d'une biquadratique gauche.

Or, on peut toujours, par une transformation homographique convenable, ramener les équations d'une telle courbe à la forme

$$f = x^2 + y^2 - 1 = 0,$$
$$\varphi = k^2 x^2 + z^2 - 1 = 0$$

ou bien à la forme paramétrique

$$x = \operatorname{sn} u, \qquad y = \operatorname{cn} u, \qquad z = \operatorname{dn} u,$$

u désignant un paramètre variable et les fonctions elliptiques sn, cn et dn étant construites avec le module k. Dans ce qui suit nous désignerons par 2ω et $2\omega'$ un couple de périodes primitives communes à ces trois fonctions.

Rappelons alors que la relation

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2m\omega + 2m'\omega',$$

dans laquelle m et m' sont deux entiers quelconques positifs, nuls ou négatifs, exprime que les quatre points de la courbe définis par les valeurs u_1, u_2, u_3 et u_4 du paramètre sont dans un même plan.

Remarquons aussi que les sommets des quatre cônes du second degré passant par la biquadratique sont ici l'origine et les trois points à l'infini sur chacun des axes de coordonnées.

Cela posé, nous allons donner les solutions de certaines des questions proposées en nous servant de la représentation paramétrique précédente.

1901. Si les quatre points d'intersection de la courbe avec un plan viennent se confondre en un seul de paramètre u, le plan est surosculateur en ce point, et la relation (1) devient alors

$$4u = 2m\omega + 2m'\omega'$$

ou

$$u = \frac{m}{2}\omega + \frac{m'}{2}\omega'.$$

Il suffit, pour avoir des points distincts, de donner à m et à m' les valeurs 0, 1, 2, 3 associées de toutes les manières possibles.

On trouve donc bien 16 points de surosculation, appelés *sommets de la courbe*. On voit immédiatement qu'ils sont situés à l'infini ou dans les plans de coordonnées, c'est-à-dire qu'ils sont les points d'intersection de la biquadratique avec les faces du tétraèdre déterminé par les sommets des quatre cônes du second degré qui passent par cette courbe.

1902. Considérons une corde joignant deux points quelconques M_1, M_2 de la biquadratique, et menons par cette droite un plan qui soit tangent à la courbe en un point M de paramètre u. On a

$$2u + u_1 + u_2 = 2m\omega + 2m'\omega'$$

ou bien

$$u = -\frac{u_1 + u_2}{2} + m\omega + m'\omega'.$$

Il suffit, pour avoir des points distincts, de donner à chacun des entiers m et m' les valeurs 0 et 1 et, par suite, de considérer quatre valeurs de u, savoir :

$$-\frac{u_1 + u_2}{2}, \qquad -\frac{u_1 + u_2}{2} + \omega,$$

$$-\frac{u_1 + u_2}{2} + \omega', \qquad -\frac{u_1 + u_2}{2} + \omega + \omega'.$$

Il y a donc bien quatre plans tangents à la biquadratique qui passent par la corde M_1M_2. La condition pour que les points de contact de ces quatre plans tangents soient dans un même plan s'écrit immédiatement sous la forme

$$(u_1 + u_2) = \frac{m}{2}\omega + \frac{m'}{2}\omega'.$$

Cette relation exprime, on le voit immédiatement en se reportant aux propriétés élémentaires des fonctions elliptiques, que la corde M_1M_2 passe par l'origine, ou bien qu'elle est parallèle à l'un des axes de coordonnées. La corde $M_1 M_2$ est dès lors une génératrice de l'un des quatre cônes du second degré qui passent par la biquadratique.

1904. Soient quatre points de la courbe M_1, M_2, M_3 et M_4 situés dans un même plan. La relation

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2m\omega + 2m'\omega'$$

est dès lors satisfaite par hypothèse. Menons les plans osculateurs à la biquadratique en ces quatre points et déterminons leurs quatre autres points d'intersection avec la courbe. Si v_1, v_2, v_3, v_4 sont les paramètres de ces points, on doit avoir

$$\begin{aligned}
3u_1 + v_1 &= 2m_1\omega + 2m'_1\omega',\\
3u_2 + v_2 &= 2m_2\omega + 2m'_2\omega',\\
3u_3 + v_3 &= 2m_3\omega + 2m'_3\omega',\\
3u_4 + v_4 &= 2m_4\omega + 2m'_4\omega'.
\end{aligned}$$

Si nous ajoutons ces relations, nous obtenons

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 2M\omega + 2M'\omega',$$

M et M′ étant des nombres entiers.

Les quatre points N sont donc dans un même plan.

1906. Par un point M_1 de la biquadratique menons un plan tel que les trois autres points d'intersection avec la courbe soient confondus en un seul, M.

La relation entre les paramètres de ces quatre points devient

$$u_1 + 3u = 2m\omega + 2m'\omega'$$

ou bien

$$u = -\frac{u_1}{3} + 2\frac{m}{3}\omega + 2\frac{m'}{3}\omega'.$$

Il suffit de donner à m et à m' les valeurs 0, 1, 2 associées de toutes les manières possibles.

On trouve ainsi neuf points d'osculation dont les paramètres sont

$$\begin{matrix}
u_{0,0}, & u_{0,1}, & u_{0,2},\\
u_{1,0}, & u_{1,1}, & u_{1,2},\\
u_{2,0}, & u_{2,2}, & u_{2,2}.
\end{matrix}$$

$u_{m,m'}$ désignant la valeur de u correspondant à un choix déterminé des entiers m et m'.

Ces points sont trois à trois dans des plans passant par le point donné M_1. Le plan passant par M_1 et par deux quelconques de ces points passe encore par un troisième; on a, par exemple,

$$u_1 + u_{0,0} + u_{1,2} + u_{2,1} = 2\omega + 2\omega'.$$

Ainsi, par un point d'une biquadratique on peut mener neuf plans osculateurs à cette courbe (sans y comprendre le plan osculateur au point choisi); les neuf points d'osculation ainsi déterminés sont trois à trois situés dans trois plans passant par le point donné.

Quand on projette la courbe, le point de vue étant en M_1, les traces de ces plans osculateurs deviennent les tangentes d'inflexion de la cubique plane, projection de la biquadratique. Sur les neuf plans osculateurs, il y en a donc seulement trois qui soient réels.

1907. Considérons une corde joignant deux points quelconques M_1, M_2 de la biquadratique; il existe une quadrique S passant par la courbe gauche et admettant M_1M_2 comme génératrice rectiligne. Si l'on mène un plan par la corde M_1M_2 et si M'_1, M'_2 sont les deux nouveaux points d'intersection de la courbe par ce plan, la droite $M'_1M'_2$ est une génératrice de la surface S du second système, en appelant *premier système* celui auquel appartient la droite M_1M_2. En tenant compte de la relation qui exprime que les quatre points M_1, M_2, M'_1, M'_2 sont dans un même plan

$$u_1 + u_2 + u'_1 + u'_2 = 2m\omega + 2m'\omega',$$

on voit qu'une génératrice d'un système déterminé de S rencontre la biquadratique en deux points dont les arguments ont une somme constante.

Ceci posé, les paramètres des points de contact des quatre plans tangents menés à la biquadratique par la corde M_1M_2 sont déterminés par la relation

$$2u + u_1 + u_2 = 2m\omega + 2m'\omega'$$

ou bien

$$u = -\frac{u_1 + u_2}{2} + m\omega + m'\omega'.$$

La somme $u_1 + u_2$ étant constante pour les génératrices du premier système de la quadrique S, on voit que les points de contact sont fixes et indépendants de la génératrice du premier choisie sur la quadrique considérée.

Cette propriété est d'ailleurs évidente géométriquement; car les points de contact cherchés ne sont autres que les points de contact de la biquadratique avec les génératrices du second système de la quadrique S qui lui sont tangentes.

Autres solutions de MM. G. FONTENÉ et FRIZAC.

QUESTIONS.

1937. Étant donné un parallélogramme articulé ABCD, on fixe sur les côtés AB, BC, CD, en des points m, n, p, des tiges Mm, Nn, Pp, perpendiculaires respectivement à ces côtés, et déterminées par les relations

$$\frac{pP}{Cp} = \frac{Cn}{Nn};\quad \frac{Mm}{Bm} = \frac{Bn}{Nn}.$$

On a d'ailleurs

$$Bm = Cp.$$

Démontrer que le triangle MNP reste semblable à lui-même dans toutes les déformations du parallélogramme, qui peut ainsi servir de pantographe. (J. RÉVEILLE.)

1938. Le centre de gravité des pieds des normales menées d'un point quelconque C à une conique de centre O est au milieu de la distance du point O au centre de gravité des points d'intersection de la conique et d'un cercle de centre C et de rayon quelconque. (M. D'OCAGNE.)

1939. Soient A et B deux points fixes, C un point du segment AB, Δ une tangente commune aux cercles de diamètres CA et CB, P la projection de C sur Δ :

1° La droite CP enveloppe l'hypocycloïde à quatre rebroussements dont deux sont en A et B.

2° Le point P décrit une développante de cette hypocycloïde. (E.-N. BARISIEN.)

1940. Deux triangles T et T′ circonscrits à une même conique C sont, comme on sait, inscrits à une conique Γ. Si Γ passe par le point de Brianchon de l'un des triangles, elle passe aussi par celui de l'autre. (E. DUPORCQ.)

1941. Soient abc, $a'b'c'$ et $a''b''c''$ trois triangles inscrits à une hyperbole équilatère et d'orthocentres d, d' et d''. Si α, β, γ et δ sont les orthocentres des triangles $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$ et $dd'd''$, δ est l'orthocentre du triangle $\alpha\beta\gamma$.

(E. DUPORCQ.)

1942. Soient a, b, c et d quatre points d'une conique Γ, et soient a', b', c', d' les points où cette courbe coupe les cercles bcd, cad, dab, abc. Les droites aa', bb', cc' et dd' touchent une conique homothétique et concentrique à Γ.

(E. DUPORCQ.)

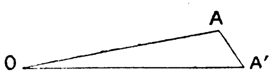
1943. Si une conique variable a un contact du quatrième ordre avec une courbe fixe quelconque, le lieu de son centre est une courbe tangente à la droite qui joint ce centre au point de contact. (X. STOUFF.)

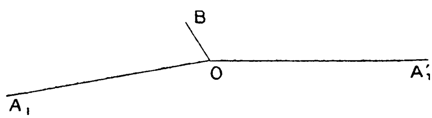
1944. La recherche d'une courbe telle que le lieu du centre d'une conique qui a avec cette courbe un contact du quatrième ordre soit une parabole donnée se ramène à la résolution de l'équation de Ricatti :

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2. \qquad \text{(X. Stouff.)}$$

ERRATA.

Page 344, les deux figures doivent être remplacées par celles-ci :





Page 347, ligne 8 en remontant, *au lieu de* $d^2\frac{1}{\rho}$, *lisez* $d^2\frac{1}{r}$.

[O2e]

COMPLÉMENT A LA NOTE DE LA PAGE 337;

PAR M. MANNHEIM.

Conservons les notations de cette Note et la figure de la page 339.

Nous avons démontré que, lorsque le point m' parcourt la courbe (r), le point g, pied de la perpendiculaire abaissée du centre de courbure c sur le rayon vecteur mm', décrit un cercle (g) de centre m. Le segment gm étant de grandeur constante, il en est de même de gh, puisque

$$\frac{gm}{gh} = \frac{m'm}{m'c},$$

et que, par définition de la courbe (r), ce dernier rapport est constant.

Voici maintenant quelques résultats faciles à démontrer :

La courbe (h), lieu des points tels que h, a pour normale la perpendiculaire abaissée de h sur mm'.

Cette normale rencontre la parallèle à cm', menée de m, en un point qui est le centre de courbure de (h) pour le point h.

La courbe (h) est une développante de la polaire réciproque de (r), par rapport au cercle (g).

La polaire de h, par rapport au cercle (g), est la perpendiculaire abaissée de m' sur mc.

Lorsque m' décrit (r), cette perpendiculaire a une enveloppe qu'elle touche au point où elle rencontre ml.

Ces résultats pourront être utiles lorsqu'on étudiera les courbes (r).

[P5]

SUR UNE NOTE DE M. FRÉCHET;

PAR M. E. DUPORCQ.

Dans une Note récemment publiée dans ce Recueil (p. 446), M. Fréchet a établi que :

Si trois surfaces se correspondent point par point, il existe, en général, quatre systèmes de courbes correspondantes isogonales.

Ces quatre systèmes de courbes ont entre eux des relations assez remarquables, qu'on peut mettre en évidence de la manière suivante.

Si m_1, m_2 et m_3 sont trois points correspondants sur les trois surfaces S_1, S_2 et S_3, les tangentes aux courbes correspondantes passant par ces points, forment, comme le remarque M. Fréchet, trois faisceaux homographiques : à chaque groupe de trois rayons homologues on peut faire correspondre de manière univoque un point d'une conique Γ, de sorte que le rapport anharmonique de quatre rayons de chaque faisceau soit égal à celui des quatre points correspondants sur Γ.

Soient i_1 et j_1 les points de Γ qui correspondent ainsi aux tangentes isotropes menées à S_1 au point m_1, i_2 et j_2, i_3 et j_3 les points analogues par rapport aux surfaces S_2 et S_3. A trois couples de tangentes correspondantes sur les trois surfaces correspondent sur Γ, si les angles de ces couples sont égaux, deux points, α et β, tels que les rapports anharmoniques

$$(\alpha\beta i_1 j_1),\quad (\alpha\beta i_2 j_2),\quad (\alpha\beta i_3 j_3),$$

par exemple, soient égaux. Ces points sont donc les points doubles de l'homographie définie sur Γ par les trois couples :

$$i_1 j_1,\quad i_2 j_2,\quad i_3 j_3;$$

ce sont donc les points de contact de l'une, C, des coniques bitangentes à Γ et touchant les droites $i_1 j_1$, $i_2 j_2$ et $i_3 j_3$. Or, on sait qu'il existe trois autres coniques jouissant de cette propriété; soient C_1, C_2 et C_3 ces coniques, C_1, par exemple, touchant Γ aux points α_1 et β_1 tels que

$$(\alpha_1 \beta_1 j_1 i_1) = (\alpha_1 \beta_1 i_2 j_2) = (\alpha_1 \beta_1 i_3 j_3).$$

Or, il est facile de déduire ces points α_1 et β_1 des points α et β précédemment obtenus; on voit, en effet, sans difficulté que les droites $\alpha\beta$ et $\alpha_1\beta_1$ se coupent sur la droite $i_1 j_1$ et qu'elles divisent harmoniquement les segments $i_2 j_2$ et $i_3 j_3$.

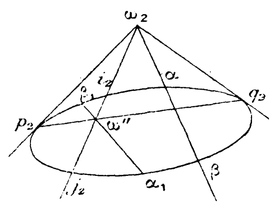
Soient donc A_1, A_2 et A_3 les trois angles égaux correspondants, de sommets m_1, m_2 et m_3, associés au couple $\alpha\beta$; A'_1, A'_2 et A'_3 les angles analogues qui correspondent au couple $\alpha_1\beta_1$; les notations A'' et A''' désignant de même les angles associés aux couples $\alpha_2\beta_2$ et $\alpha_3\beta_3$.

De ce que $\alpha\beta$ et $\alpha_1\beta_1$ se coupent sur $i_1 j_1$, on déduit d'abord que les trois couples

$$\alpha\beta,\quad \alpha_1\beta_1,\quad i_1 j_1$$

sont en involution sur Γ. Par suite, les côtés des angles A_1, A'_1 et les droites isotropes tangentes en m_1 à S_1 sont en involution : autrement dit, *les angles* A_1 *et* A'_1 *ont les mêmes bissectrices;* il en est de même des angles A_2 et A''_2, A_3 et A'''_3, A''_1 et A'''_1, A'_2 et A'''_2, A'_3 et A''_3.

Interprétons maintenant la propriété des droites $\alpha\beta$ et $\alpha_1\beta_1$ de diviser harmoniquement le segment i_2j_2 :



soient ω_2 et ω'' les points où elles coupent la droite i_2j_2 : ω'' est sur la polaire p_2q_2 de ω_2; par conséquent, les couples

$$i_2j_2, \quad p_2q_2, \quad \alpha_1\beta_1$$

sont en involution; or, p_2 et q_2 sont les points doubles de l'involution

$$\alpha\beta, \quad i_2j_2.$$

A ces points correspondent donc, autour de m_2, les bissectrices de l'angle A_2, et celles-ci déterminent avec les côtés de l'angle A'_2 une involution comprenant les droites isotropes; autrement dit, l'angle A'_2 a les mêmes bissectrices que l'angle formé par les bissectrices de l'angle A_2, ou encore, *les angles* A_2 *et* A'_2 *ont leurs bissectrices inclinées à* 45°.

En résumé, si l'on se fixe sur S_1, S_2 et S_3 autour des points m_1, m_2 et m_3 des sens de rotation positifs, il existera seulement un système de trois angles correspondants égaux A_1, A_2 et A_3. On en obtiendra un autre, A'_1, A'_2 et A'_3, en changeant le sens de rotation autour de m_1, et deux autres analogues, A''_1, A''_2, A''_3 et A'''_1,

A''_2, A'''_3, en changeant le sens de rotation respectivement autour de m_2 et de m_3. *Les quatre angles obtenus ainsi autour de chaque point auront deux à deux les mêmes bissectrices, et les deux systèmes de bissectrices obtenus feront entre eux des angles de* 45°. Le Tableau suivant indique la manière d'associer les angles : dans chacun des trois groupes formés, les angles inscrits sur une même ligne ont deux à deux les mêmes bissectrices :

$$A_1 A'_1, \quad A_2 A''_2, \quad A_3 A'''_3,$$
$$A''_1 A'''_1, \quad A'_2 A'''_2, \quad A'_3 A''_3.$$

[D]

SUR LA DÉTERMINATION DES FONCTIONS QUI ADMETTENT LES SUBSTITUTIONS D'UN GROUPE DONNÉ, ET SEULEMENT CES SUBSTITUTIONS-LÀ;

Par M. E. Iaggi.

Nous avons vu (¹) que les fonctions uniformes $F(x)$, qui admettent les substitutions d'un groupe donné, et seulement ces substitutions-là, sont les intégrales de l'équation

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & 2\frac{F'''(x)}{F'(x)} - 3\frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} \\ & \quad = 6\frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)} - 3\frac{\Phi'^2(x)}{\Phi^2(x)} - 4\Psi(x) = \chi(x), \end{aligned} \right.$$

et que ces fonctions sont les quotients des fonctions

(¹) *Détermination des fonctions qui admettent les substitutions d'un groupe quelconque donné, et seulement ces substitutions-là* (*Nouvelles Annales*, août 1902, p. 368).

entières Θ, intégrales de l'équation

$$(2)\qquad \Phi\Theta'' - \Phi'\Theta' + (\Phi'' - \Phi\Psi)\Theta = 0,$$

où

$$(3)\quad \Phi = \lambda e^{2\sum\limits_i \int \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right) dx}, \qquad \Psi = \frac{3}{4}\frac{\Phi'^2}{\Phi} + 3\sum_i \left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right),$$

les quantités $p_i(x)$ étant les *périodes* du groupe

$$p_i(x) = s_i(x) - x,$$

et les quantités $h_i(x)$, $k_i(x)$ rendant convergentes les séries

$$\sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right), \qquad \sum_i \left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right)$$

et devant être annulées lorsque $\sum\limits_i \frac{1}{p_i}$, $\sum\limits_i \frac{1}{p_i^2}$ sont des séries convergentes.

Lorsqu'on se propose de déterminer les fonctions $F(x)$ d'un groupe donné, par les équations précédentes, la détermination se fait sans ambiguïté lorsque les séries $\sum\limits_i \frac{1}{p_i}$, $\sum\limits_i \frac{1}{p_i^2}$ sont convergentes; lorsque ces séries ne sont pas convergentes, il faut choisir des quantités h_i, k_i qui rendent convergentes les séries indiquées. Mais ce choix présente une ambiguïté, et l'on n'est pas assuré que les fonctions $F(x)$ obtenues ainsi sont bien des fonctions admettant les substitutions du groupe donné et seulement ces substitutions-là, en sorte que, dans ce cas, il devient nécessaire de vérifier ensuite si les fonctions $F(x)$ obtenues sont bien les fonctions du groupe donné, ou si les fonctions Θ, intégrales de l'équation (2) ont toutes le multiplicateur dont la formule est, comme on sait,

$$(4)\qquad \theta = \sqrt{\frac{\Phi(s)\,ds}{\Phi(x)\,dx}},$$

pour une substitution $s(x)$ quelconque du groupe. Il suit de là que le choix des quantités h_i, k_i ne peut être arbitraire et soumis à la seule condition que les séries indiquées soient convergentes; cela est d'ailleurs évident si l'on remarque que les intégrales Θ seraient arbitraires si les h_i, k_i et, par suite, les fonctions Φ et Ψ étaient arbitraires.

Mais on peut se donner *arbitrairement* les fonctions $h_i(x)$, sous la condition que $\sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)$ soit convergente; les fonctions k_i sont alors déterminées.

En effet, supposons que l'on connaisse des fonctions Φ, Ψ, telles que l'équation (1) ait pour intégrales les fonctions *périodiques* $F(x)$ du groupe donné et, par suite, que l'équation (2) ait pour intégrales des fonctions à multiplicateur Θ du groupe qui, par leurs quotients, donnent les fonctions $F(x)$. Changeons les fonctions $h_i(x)$ dans la formule

$$\frac{\Phi'(x)}{2\Phi(x)} = \sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right).$$

Ceci revient à ajouter à la série du second membre une certaine fonction que nous désignerons par $g'(x)$, car la nouvelle série obtenue avec les nouvelles fonctions h_i doit être convergente comme la précédente, et, par conséquent, la différence de ces deux séries est une série convergente, c'est-à-dire une fonction $g'(x)$. La fonction Φ est alors remplacée par la nouvelle fonction

$$\Phi_1(x) = \lambda e^{2g(x)} \Phi(x),$$

dans laquelle λ est un facteur constant arbitraire qui provient de $g(x)$, intégrale de $g'(x)$; [la fonction $\Phi(x)$ n'a d'ailleurs été déterminée qu'à un facteur constant près].

Déterminons maintenant les k_i de manière que les fonctions $F(x)$ déterminées par l'équation (1) restent les mêmes : la fonction $\chi(x)$ doit rester invariable lorsqu'on y remplace Φ par Φ_1. Or, $\chi(x)$ s'écrit

$$\chi(x) = 6\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{L}\,\Phi(x) - 12\sum_i\left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right).$$

Posons

$$\sum_i\left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right) = \psi(x),$$

en sorte que

$$(5)\qquad \chi(x) = 6\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{L}\,\Phi(x) - 12\psi(x).$$

Lorsqu'on remplace Φ par Φ_1, le premier terme de cette expression s'augmente de

$$12g'';$$

il s'ensuit que, pour que $\chi(x)$ reste invariable, ψ doit être augmenté également de $12g''$, c'est-à-dire que les premières fonctions $k_i(x)$ doivent être remplacées par de nouvelles fonctions telles que la différence des deux séries $\psi(x)$ et $\psi_1(x)$ soit $g''(x)$, dérivée de la fonction $g'(x)$ que nous avons choisie *arbitrairement*.

Cherchons ce que deviennent les fonctions Θ. Les nouvelles fonctions à multiplicateur, $\Theta_1(x)$, sont les intégrales de l'équation

$$(6)\qquad \Phi_1\Theta_1'' - \Phi_1'\Theta_1' + (\Phi_1'' - \Phi_1\Psi_1)\Theta_1 = 0,$$

où l'on a

$$(7)\qquad \Phi_1 = \lambda e^{2g}\Phi,$$

$$\Psi_1 = \frac{3}{4}\frac{\Phi_1'^2}{\Phi_1^2} + 3\psi_1 = 3(g'^2 + g'') + 3g'\frac{\Phi'}{\Phi} + \Psi,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\Phi_1'}{\Phi_1} = 2g' + \frac{\Phi'}{\Phi}, \qquad \frac{\Phi_1''}{\Phi_1} = 2g'' + 4g'^2 + 4g'\frac{\Phi'}{\Phi} + \frac{\Phi''}{\Phi}.$$

D'ailleurs, on peut désigner par

$$\Theta_1 = e^{\rho(x)}\,\Theta,$$

l'intégrale de l'équation (6), où $\rho(x)$ est une fonction jusqu'ici inconnue que nous allons déterminer. On a

$$\frac{\Theta_1'}{\Theta_1} = \rho' + \frac{\Theta'}{\Theta}, \qquad \frac{\Theta_1''}{\Theta_1} = \rho'' + \rho'^2 + 2\rho'\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Remplaçant $\frac{\Phi_1'}{\Phi_1}$, $\frac{\Phi_1''}{\Phi_1}$, $\frac{\Theta_1'}{\Theta_1}$, $\frac{\Theta_1''}{\Theta_1}$, Ψ_1, par les expressions précédentes dans l'équation (6) mise sous la forme

$$\frac{\Theta_1''}{\Theta_1} - \frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\frac{\Theta_1'}{\Theta_1} + \frac{\Phi_1''}{\Phi_1} - \Psi = 0,$$

nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned} \rho'' + \rho'^2 + 2\rho'\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{\Theta''}{\Theta} - \left(2g' + \frac{\Phi'}{\Phi}\right)\left(\rho' + \frac{\Theta'}{\Theta}\right) & \\ + 2g'' + 4g'^2 + 4g'\frac{\Phi'}{\Phi} + \frac{\Phi''}{\Phi} & \\ - 3(g'^2 + g'') - 3g'\frac{\Phi'}{\Phi} - \Psi = 0&, \end{aligned}$$

qui doit se réduire à l'équation (2) mise sous la forme

$$\frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\Phi'}{\Phi}\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{\Phi''}{\Phi} - \Psi = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante est

$$\rho' = g'$$

et les nouvelles fonctions Θ_1 sont donc données par la formule

$$\Theta_1(x) = \lambda e^{g(x)}\,\Theta(x).$$

où $\Theta(x)$ est l'intégrale générale de l'équation (2) et où $g(x)$ est l'intégrale de $g'(x)$, à une constante près qui est mise en évidence par le facteur arbitraire λ.

Cherchons enfin quel est le multiplicateur θ_1 des nouvelles fonctions; on a, par la formule connue,

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \theta_1(s, x) &= \sqrt{\frac{\Phi_1(s)\,ds}{\Phi_1(x)\,dx}} \\ &= \sqrt{\frac{e^{2g(s)}\,\Phi(s)\,ds}{e^{2g(x)}\,\Phi(x)\,dx}} = e^{g(s)-g(x)}\,\theta(s, x). \end{aligned} \right.$$

Ainsi, lorsqu'on multiplie la fonction $\Phi(x)$ par un facteur *arbitraire* $\varphi^2 = e^{2g(x)}$ et que l'on augmente $\psi(x)$ de g'', les fonctions $F(x)$ restent les mêmes, mais les fonctions à multiplicateur $\Theta(x)$ sont multipliées par $e^{g(x)}$, racine carrée de φ^2, et leur multiplicateur est multiplié par $e^{g(s)-g(x)}$.

Il résulte de là la possibilité, évidente *a priori*, d'obtenir une infinité de systèmes de fonctions à multiplicateur Θ qui, par leurs quotients, donnent les fonctions périodiques $F(x)$ du groupe donné; on passe d'un système à un autre en multipliant les fonctions Θ du premier système par une même fonction *arbitraire* $\varphi(x)$. $\varphi(x) = e^{g(x)}$ étant arbitraire, on voit qu'on pourra obtenir un système de fonctions Θ dans lequel une de ces fonctions *est donnée a priori*; toutes les autres sont alors déterminées complètement. On peut, au contraire, se donner arbitrairement $\Phi_1(x)$. Mais il est évident que les fonctions $\Phi_1(x)$ et $\Theta_1(x)$ obtenues ainsi ne satisfont pas toutes à la condition d'être entières, condition dont nous nous sommes servi tout d'abord pour déterminer les équations (1) et (2). Si $\Phi(x)$ et les intégrales $\Theta(x)$ sont des fonctions entières, on n'obtiendra de nouvelles fonctions entières $\Phi_1(x)$, $\Theta_1(x)$ qu'autant que $\varphi(x)$ sera entière.

Rappelons que nous nous sommes servi, dans une Note précédente, de l'indétermination des fonctions $h_i(x)$, c'est-à-dire de la possibilité de la transformation de $\Phi(x)$, pour obtenir, dans le cas du groupe de $\operatorname{sn}(x \mid K, iK')$, soit les fonctions H, Θ de Jacobi, soit les fonctions σu, $\sigma_3 u$ de Weierstrass, et ajoutons qu'on pourrait obtenir également les fonctions $\mathrm{Al}(x)$ de Weierstrass, par un choix convenable de $\varphi = e^{g(x)}$, puisque ces dernières fonctions ne diffèrent des précédentes que par un facteur exponentiel.

De ce fait qu'on peut obtenir, pour un groupe donné, un système de fonctions $\Theta(x)$ dans lequel l'une est arbitraire ([1]), on ne peut conclure que le multiplicateur donné par les formules (8) et (4) soit arbitraire, ce qui reviendrait à dire qu'on peut choisir $g(x)$ de manière que θ_1 soit une fonction donnée de $s(x)$ et de x, ou encore que, pour toutes les substitutions $s(x)$ du groupe, on ait

$$g(s) = g(x) + \xi(x),$$

où $\xi(x)$ serait une fonction donnée. Toutefois, dans quelques cas, on peut vérifier que, quel que soit le groupe donné, on peut choisir $g(x)$ ou $\Phi_1(x)$ de manière que le multiplicateur soit une fonction donnée; soit, par exemple,

$$\theta_1 = \pm\sqrt{\frac{ds}{dx}}.$$

On voit immédiatement qu'il faut et qu'il suffit que

$$\Phi_1(s) = \Phi_1(x),$$

c'est-à-dire que Φ_1 doit être une fonction périodique

([1]) Nous raisonnons toujours dans l'hypothèse où existent des fonctions uniformes $F(x)$ du groupe donné et ne considérons ici que des fonctions $\Theta(x)$ uniformes.

du groupe, et il est évident qu'on peut toujours prendre $g(x)$ pour qu'il en soit ainsi. Cependant, si l'on exigeait que Φ_1 et les nouvelles fonctions Φ_1 fussent, comme les premières, des fonctions entières, il faudrait qu'il y eût des fonctions entières $(\lambda\Phi_1 + \mu)$ du groupe; or, dans ce cas, on sait que Φ_1 est la dérivée (à un facteur constant près) de ces fonctions $F(x)$ entières; toutes les fonctions $F(x)$ du groupe étant fonctions linéaires de l'une d'elles, les fonctions entières du groupe satisferaient à une équation de la forme

$$F'(x) = \frac{\lambda F(x) + \mu}{\nu F(x) + \rho},$$

et par conséquent ces fonctions entières seraient de la forme

$$F(x) = \lambda e^{\alpha x} + \mu.$$

Le cas où $\Phi(x)$ est une fonction entière et où le multiplicateur θ est égal à la racine carrée de s'_x ne peut donc se présenter que pour un groupe particulier pour lequel d'ailleurs $\theta = s' = 1$.

Mais si l'on n'assujettit pas Φ à être entière, on voit qu'on peut toujours former un système de fonctions Θ, en général non entières, pour lequel le multiplicateur est la racine carrée de $s'(x)$.

Pour que l'on eût

$$\theta = \frac{dx}{ds},$$

c'est-à-dire

$$\Theta(s)\,ds = \Theta(x)\,dx,$$

il faudrait que l'on pût trouver une fonction $\Phi(x)$ telle que

$$\Phi(s)\,ds^3 = \Phi(x)\,dx^3,$$

et il n'est guère possible, dans l'état actuel de cette théorie, de voir dans quels cas on pourra déterminer une fonction $\Phi(x)$ qui satisfasse à cette condition *pour toutes les substitutions du groupe, et seulement pour celles-là.*

Si l'on remarque que, $F(x)$ étant une fonction du groupe, on a pour toutes les substitutions s du groupe

$$F'(s)\,ds = F'(x)\,dx,$$

on voit qu'on pourrait obtenir des fonctions que laissent invariables les substitutions du groupe, par les quotients des fonctions F' qui, d'autre part, ont toutes pour multiplicateur $\frac{dx}{ds}$ quand on fait à x une substitution s du groupe. Mais il faut remarquer que ces quotients admettent, outre les substitutions du groupe donné, d'autres substitutions. En effet, soient deux fonctions d'un groupe quelconque donné, c'est-à-dire deux fonctions qui admettent toutes les substitutions du groupe donné et *seulement ces substitutions-là :*

$$F_{1,2} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}, \qquad F_{3,4} = \frac{\Theta_3}{\Theta_4}.$$

On a

$$F'_{1,2} = a\,\frac{\Phi}{\Theta_2^2}, \qquad F'_{3,4} = b\,\frac{\Phi}{\Theta_4^2},$$

où a et b sont deux constantes. Si c^2 désigne le rapport de a à b, le quotient de ces deux fonctions

$$f(x) = \frac{F'_{1,2}}{F'_{3,4}} = c^2\,\frac{\Theta_4^2}{\Theta_2^2} = (c\,F_{4,2})^2$$

est donc le carré de l'une des fonctions du groupe et par conséquent admet, outre les substitutions du groupe, qui sont les racines de l'équation

$$F_{4,2}(s) = F_{4,2}(x),$$

toutes les substitutions qui font changer de signe cette fonction $c\,F_{4,2}$ et sont les racines de l'équation

$$F_{4,2}(s) - F_{4,2}(x) = o.$$

Ce quotient $f(x)$ *n'est donc pas une fonction du groupe donné ; son groupe contient comme sous-groupe le groupe donné.*

Les considérations qui précèdent nous amènent à montrer qu'avec un système de fonctions à multiplicateur d'un groupe donné l'on peut facilement former, outre les fonctions $F(x)$ du groupe, quotients de ces fonctions Θ, une infinité d'autres fonctions qui admettent toutes les substitutions du groupe donné, mais admettent en outre d'autres substitutions.

Soient Θ_1 et Θ_2 deux des fonctions à multiplicateur considérées ; ces deux fonctions suffisent à déterminer tout le système des fonctions Θ, pourvu que leur rapport ne soit pas constant, ce que nous pouvons supposer. Soient

$$P_m(x) = a_0\Theta_1^m + a_1\Theta_1^{m-1}\Theta_2 + \ldots,$$
$$Q_m(x) = b_0\Theta_1^m + b_1\Theta_1^{m-1}\Theta_2 + \ldots$$

deux polynomes homogènes et de degré m en Θ_1 et Θ_2. Si $\theta(s, x)$ est le multiplicateur des fonctions Θ, on a visiblement, pour toute substitution $s(x)$ du groupe,

$$P_m[s(x)] = P_m(x)\,\theta^m(s, x),$$
$$Q_m[s(x)] = Q_m(x)\,\theta^m(s, x),$$

et, par conséquent,

$$\frac{P_m[s(x)]}{Q_m[s(x)]} = \frac{P_m(x)}{Q_m(x)}.$$

Le rapport de P_m à Q_m est donc une fonction qui admet toutes les substitutions du groupe ; mais elle en admet d'autres, à moins que m ne soit égal à *un*.

En effet, si l'on pose

$$y = F_{1,2}(x) = \frac{\theta_1(x)}{\theta_2(x)},$$

le rapport de P_m à Q_m s'écrit

$$f(x) = \frac{a_0 F_{1,2}^m(x) + a_1 F_{1,2}^{m-1}(x) + \dots}{b_0 F_{1,2}^m(x) + b_1 F_{1,2}^{m-1}(x) + \dots},$$

ou encore

$$\varphi(y) = \frac{a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \dots}{b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + \dots}.$$

Cette fonction rationnelle, de degré m, de y admet $m - 1$ substitutions :

$$s_1(y), \quad s_2(y), \quad \dots, \quad s_{m-1}(y),$$

et par conséquent $f(x)$ admet, outre les substitutions du groupe donné qui laissent $F_{1,2}(x)$ invariable, toutes les substitutions qui transforment $F_{1,2}(x)$ en l'une quelconque des fonctions

$$s_1[F_{1,2}(x)], \quad s_2[F_{1,2}(x)], \quad \dots, \quad s_{m-1}[F_{1,2}(x)],$$

et le groupe de $f(x)$ n'est pas identique au groupe donné, mais contient celui-ci comme sous-groupe.

On peut donc former une infinité de fonctions uniformes, autres que les fonctions $F(x)$, qui admettent les substitutions du groupe donné; mais ces fonctions admettent en outre d'autres substitutions qui, généralement, seront d'une forme toute différente de celle des fonctions du groupe donné. Entre deux des fonctions formées comme nous venons de l'indiquer existe une relation algébrique que l'on obtient par l'élimination de y entre les formules de ces deux fonctions :

$$\varphi(y) = \frac{a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \dots}{b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + \dots},$$

$$\psi(y) = \frac{a'_0 y^n + a'_1 y^{n-1} + \dots}{b'_0 y^n + b'_1 y^{n-1} + \dots}.$$

Cette relation ne dépend que des coefficients a, b, a', b', ... qui sont d'ailleurs arbitraires dans la formation de ces fonctions; cette relation ne dépend donc en aucune manière du groupe de substitutions donné.

Ajoutons enfin qu'on peut former des fonctions d'un ordre encore plus général que les précédentes et qui admettent, avec d'autres, les substitutions du groupe donné. Nous avons montré, en effet, dans une Note précédente, que, pour qu'une fonction admette toutes les substitutions d'un groupe, il est nécessaire et suffisant que cette fonction se mette sous la forme

$$\Phi[F(x)],$$

où $\Phi(y)$ est une fonction complète uniforme *quelconque* et $F(x)$ une fonction complète uniforme qui admette les substitutions du groupe donné et *seulement ces substitutions-là*. Dans ce qui précède, la fonction $\Phi(y)$ est une fonction *algébrique rationnelle;* mais cette fonction peut également être une fonction *uniforme transcendante* quelconque. Nous avons vu aussi que le groupe de la fonction $\Phi[F(x)]$ contient comme sous-groupe le groupe de $F(x)$ et n'est identique à ce groupe qu'autant que $\Phi(y)$ est une fonction rationnelle *linéaire*.

[B1]

EXPRESSIONS DE $\tan^n \alpha$ ET $\cot^n \alpha$ SOUS FORME DE CONTINUANTS;

PAR M. TSURUICHI HAYASHI, à Tokio.

En posant

$$\alpha + \beta = p, \qquad \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = u_n,$$

$$\alpha\beta = q, \qquad \alpha^n + \beta^n = v_n,$$

on a les deux formules de récurrence

$$u_{n+2} = pu_{n+1} - qu_n,$$
$$v_{n+2} = pv_{n+1} - qv_n;$$

par suite

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \begin{vmatrix} p & q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & p & q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & p & q & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p \end{vmatrix} \quad \text{(déterminant d'ordre } n-1\text{)}$$

et

$$\alpha^n + \beta^n = \begin{vmatrix} p & q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & p & q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & p & q & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p \end{vmatrix} \quad \text{(déterminant d'ordre } n\text{).}$$

Supposons $p = 2\zeta$ et $q = 1$; les formules précédentes deviennent

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^n - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^n \\ &\quad = 2 \begin{vmatrix} \sqrt{\zeta^2 - 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\zeta & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\zeta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\zeta & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\zeta \end{vmatrix} \quad \text{(d'ordre } n\text{).} \end{aligned} \right.$$

et

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^n + (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^n \\ &\quad = 2 \begin{vmatrix} \zeta & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\zeta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\zeta & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\zeta \end{vmatrix} \quad \text{(d'ordre } n\text{).} \end{aligned} \right.$$

En ajoutant et retranchant, on en tire

$$(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})^n = \begin{vmatrix} \zeta+\sqrt{\zeta^2-1} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2\zeta & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2\zeta & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & .. & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\zeta \end{vmatrix} \quad (\text{d'ordre } n)$$

et

$$(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})^n = \begin{vmatrix} \zeta-\sqrt{\zeta^2-1} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2\zeta & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2\zeta & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & .. & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\zeta \end{vmatrix}.$$

En posant dans ces relations

$$\zeta = \sqrt{-1}\cot 2\alpha,$$

et en se servant du théorème mentionné par M. C.-A. Laisant dans les *Archiev d. Math. u. Physik*, t. III, 1^re^ série, p. 370, on trouve aisément

$$\cot^n\alpha = \begin{vmatrix} \cot\alpha & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2\cot 2\alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2\cot 2\alpha & 1 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & \ldots\ldots & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\cot 2\alpha \end{vmatrix}$$

et

$$\operatorname{tang}^n\alpha = \begin{vmatrix} \operatorname{tang}\alpha & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & -2\cot 2\alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & -2\cot 2\alpha & 1 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & \ldots\ldots & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -2\cot 2\alpha \end{vmatrix}.$$

De même, en posant

$$\zeta = \operatorname{coséc}\alpha$$

on pourrait obtenir

$$\cot^n\alpha = \begin{vmatrix} \cot\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,2\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,2\alpha & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots\dots\dots & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,2\alpha \end{vmatrix}$$

et

$$\tan^n\alpha = \begin{vmatrix} \tan\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,2\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,2\alpha & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots\dots\dots & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,2\alpha \end{vmatrix}.$$

Ces formes de $\cot^n\alpha$ et $\mathrm{tang}^n\alpha$ sont aussi remarquables que celles qui ont été trouvées par M. Studnicka pour $\cos n\alpha$ et $\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}$ (Pascal, *Die Determinanten*, p. 155-156, traduction allemande du Dr Leitzmann), et qui peuvent être déduites de (2) et (1) en posant

$$\zeta = \cos\alpha.$$

CORRESPONDANCE.

Un abonné. — Dans le Volume des *Nouvelles Annales* pour 1902 (p. 411), M. Barisien indique 20 solutions du problème de Malfatti. MM. Fontené et Gérard ont donné les 32 solutions du problème dans le *Bulletin de Mathématiques élémentaires*, 1900 (p. 209); Gergonne annonçait ce nombre de solutions dès 1810 ou 1811.

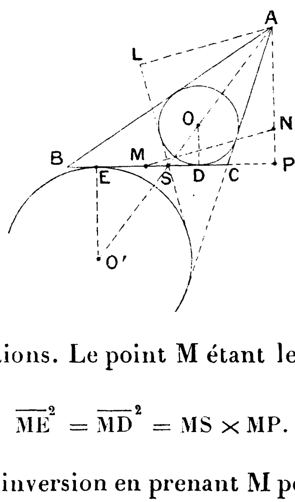
Un abonné. — La démonstration du théorème de Feuerbach par l'inversion, donnée comme nouvelle à la page 254 du présent Volume, est connue depuis longtemps; on la trouve reproduite dans l'Ouvrage de MM. Rouché et de Comberousse. J'ai souvenir d'avoir lu cette démonstration dans les *Nouvelles Annales;* M. Mansion s'en était fort approché (*Nouvelles Annales,* 1850, p. 401), et il est possible que la démonstration lui appartienne; je ne serais pas surpris qu'elle fût de M. Mansion ou de P. Serret.

[K2c]

AUTRE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE FEUERBACH;

PAR M. CANON.

Les points A, O, S, O′ forment une division harmonique, par suite aussi les points P, D, S, E qui en



sont les projections. Le point M étant le milieu de ED, on a

$$\overline{ME}^2 = \overline{MD}^2 = MS \times MP.$$

Faisons une inversion en prenant M pour pôle et $\overline{ME}^2$ pour puissance.

Les cercles O, O′ se transforment en eux-mêmes et leur tangente intérieure SL devient un cercle passant par P, d'après ce qui précède, et par M, qui est aussi le milieu de BC. Ce cercle a pour diamètre MN perpendiculaire à SL; mais AL, menée perpendiculairement à SL, est symétrique de AP, par rapport à la bissectrice AS, et appartient au diamètre du cercle ABC en A, donc MN, parallèle à AL, est le diamètre du cercle des neuf points du triangle ABC. Ainsi le transformé de SL est le cercle des neufs points; celui-ci est tangent à O, O′ puisque SL est une tangente commune à ces cercles, qui sont à eux-mêmes leurs transformés.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1902. SOLUTION DU PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. MARCEL DUBOIS,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée Carnot.

Soient (Γ) *et* (Γ_1) *les traces d'un ellipsoïde* (E) *et de son cône asymptote* (E_1) *sur le plan* (T) *qui passe par les extrémités* A, B, C *de trois diamètres conjugués* ωA, ωB, ωC *de cet ellipsoïde.*

1° *On sait que ces traces sont des coniques homothétiques et concentriques; démontrer que le rapport de similitude ne change pas quand on fait varier soit les trois diamètres conjugués* ωA, ωB, ωC, *soit l'ellipsoïde* (E).

2° *Cela étant, on donne trois points* A, B, C *non en ligne droite et l'on considère tous les ellipsoïdes* (E) *dont les points* A, B, C *sont les extrémités de trois diamètres conjugués.*

Démontrer que tous ces ellipsoïdes (E) *et leurs cônes asymptotes* (E_1) *sont coupés suivant des coniques fixes* (Γ) *et* (Γ_1).

3° *On prend pour axes de coordonnées les axes de symétrie* Ox, Oy *de* (Γ) *et la perpendiculaire* Oz *à* (T).

Trouver l'équation de celui des ellipsoïdes (E) *qui a pour centre un point* ω *de coordonnées* x_1, y_1, z_1.

4° *Soient* P, Q, R *les traces sur* (T) *des axes de symétrie de cet ellipsoïde* (E), *ayant pour centre* ω. *Montrer que* PQR *est conjugué par rapport à* (Γ_1). *Déterminer le cercle* (C_1) *conjugué au même triangle* PQR.

5° *Montrer que* P, Q, R *peuvent être obtenus par l'intersection d'un cercle* (C_2) *et d'une hyperbole équilatère* (H) *ayant ses asymptotes parallèles aux axes de symétrie de* (Γ_1).

Le cercle (C_2) *coupe l'hyperbole* (H) *en un quatrième point* S *que l'on construira. Déterminer les puissances par rapport à* (C_2) *de l'origine* O *des coordonnées et du point de rencontre des hauteurs du triangle* PQR. *Construire* (C_2).

6° *Examiner le cas particulier où* (Γ) *est un cercle.*

I. Prenons ωA, ωB, ωC comme axes des x, y, z et soient a, b, c les longueurs respectives de ces trois segments.

Pour abréger, nous substituerons aux coordonnées courantes les coordonnées

$$X = \frac{x}{a}, \qquad Y = \frac{y}{b}, \qquad Z = \frac{z}{c}.$$

(E) a pour équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0;$$

(E_1) a pour équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0;$$

(T) a pour équation

$$X + Y + Z - 1 = 0.$$

Le centre O des moyennes distances des trois points A, B et C a pour coordonnées

$$X' = Y' = Z' = \frac{1}{3}.$$

Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes en O.

L'équation de (E) devient

$$\left(X + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(Y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(Z + \frac{1}{3}\right)^2 - 1 = 0;$$

l'équation de (E_1) devient

$$\left(X + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(Y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(Z + \frac{1}{3}\right)^2 = 0;$$

l'équation de (T) devient

$$X + Y + Z = 0.$$

En tenant compte de la troisième équation dans chacune des deux premières, on voit que (Γ) et (Γ_1) peuvent être définies comme sections par (T) des deux quadriques dont les équations sont

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - \frac{2}{3} = 0 \qquad \text{et} \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 + \frac{1}{3} = 0,$$

quadriques homothétiques et concentriques, le centre commun étant O et le rapport de similitude $i\sqrt{2}$.

(Γ) et (Γ_1) sont elles-mêmes homothétiques et concentriques. Leur centre commun est le centre de gravité O du triangle ABC et le rapport de similitude est constant et égal à $i\sqrt{2}$.

II. Si l'on se donne A, B et C non en ligne droite, (Γ) est déterminé par son centre et trois de ses points. (Γ_1) s'en déduit par homothétie, le centre et le rapport d'homothétie étant connus.

Si l'on se donne en outre le centre ω de l'ellipsoïde (E), celui-ci est complètement déterminé par son cône asymptote (E_1) et un point quelconque de (Γ), (E_1) étant défini par son sommet ω et sa base (Γ_1). (E) ne dépend donc que de (Γ) et ω : les sommets d'un triangle quelconque inscrit à (Γ) et dont le centre de gravité est en O sont les extrémités de trois diamètres conjugués de (E).

III. Supposons (Γ) donné par ses axes de longueurs 2α et 2β. L'équation de (Γ) dans le plan (T), rapportée au système d'axes stipulé dans l'énoncé, est

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0;$$

on en déduit celle de (Γ_1)

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{1}{2} = 0.$$

On obtiendrait facilement l'équation de (E_1) :

$$\frac{(xz_1 - zx_1)^2}{\alpha^2} + \frac{(yz_1 - zy_1)^2}{\beta^2} + \frac{(z - z_1)^2}{2} = 0.$$

Celle de (E), qui n'en diffère que par un terme constant que l'on détermine immédiatement, est :

$$\frac{xz_1 - zx_1)^2}{\alpha^2} + \frac{(yz_1 - zy_1)^2}{\beta^2} + \frac{(z - z_1)^2}{2} - \frac{3z_1^2}{2} = 0.$$

IV. Le trièdre des axes de (E) etant un système de trois diamètres conjugués est conjugué au cône asymptote (E_1); étant trirectangle, il est conjugué au cône isotrope de même sommet ω. C'est donc le trièdre conjugué commun à ces deux cônes. (T) le coupe suivant le triangle PQR conjugué commun aux sections (Γ_1) et (C_1) des deux cônes. (C_1) est le cercle de centre ω_1, projection de ω sur (T), et de rayon $i.\overline{\omega\omega_1} = iz_1$.

V. Les diamètres conjugués d'une même direction dans (Γ_1) et (C_1), c'est-à-dire les polaires par rapport à ces coniques d'un même point à l'infini du plan (T), décrivent deux faisceaux homographiques dont les sommets sont les centres O et ω_1 de (Γ_1) et (C_1); leur point de rencontre décrit une conique (H) passant par O et ω_1.

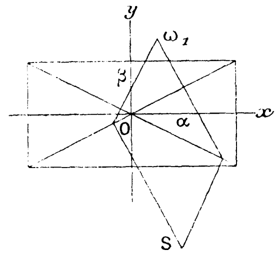
Si la direction devient celle d'un des côtés du triangle conjugué commun à (Γ_1) et (C_1), le point correspondant de (H) est évidemment le sommet opposé. (H) est donc circonscrit à PQR.

Soit M un des points de rencontre de (H) avec (Γ_1). La direction de la tangente en M à (Γ_1) est la direction conjuguée de OM dans (Γ_1); par suite du mode de génération de (H) elle est aussi conjuguée de ω_1M dans (C_1), c'est-à-dire qu'elle lui est perpendiculaire. ω_1M est donc normale à (Γ_1). (H) passant par O et les pieds des normales de ω_1 sur (Γ_1) coïncide avec l'hyperbole d'Apollonius de ω_1 par rapport à (Γ_1).

Le centre de (H), circonscrite à PQR, est sur le cercle des neuf points de ce triangle, cercle qui passe par le milieu des segments des hauteurs compris entre leur point de rencontre ω_1 et chaque sommet. L'homothétique dans le rapport 2, le centre d'homothétie étant ω_1, est le cercle (C_2) circonscrit à PQR. Le point symétrique de ω_1

par rapport au centre de (H) est donc le quatrième point commun S à (C_2) et à (H).

La construction de S se déduit de celle du centre de l'hyperbole d'Apollonius (H). De ω_1 abaissons sur chacun des diamètres conjugués égaux de l'ellipse une per-



pendiculaire que nous prolongeons jusqu'à son point de rencontre avec l'autre diamètre. Le quatrième sommet du parallélogramme ainsi commencé sera S.

(C_2) est circonscrit au triangle conjugué commun à (Γ_1) et (C_1). Étant harmoniquement circonscrit à ces deux coniques, il est orthogonal à leurs cercles de Monge, c'est-à-dire que les carrés des puissances de O et ω_1 par rapport à (C_2) sont

$$-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \quad \text{et} \quad -2z_1^2.$$

On en déduit les seconds points de rencontre de (C_2) avec OS et ω_1S, soient S′ et S″, et (C_2) est déterminé par trois points : S, S′, S″.

VI. ωABC étant un système de trois diamètres conjugués de (E) est un trièdre conjugué à (E_1). Le triangle ABC est donc conjugué à (Γ_1). Si (Γ) est un cercle, (Γ_1) est un cercle concentrique et ABC inscrit au premier et conjugué au second est évidemment équilatéral. Tous les triangles équilatéraux inscrits dans (Γ) ont pour sommets les extrémités de trois diamètres conjugués de (E).

L'un des sommets du triangle PQR conjugué commun aux deux cercles (Γ_1) et (C_1) est à l'infini sur leur axe radical. Les deux autres sont les points doubles de l'involution déterminée par ces deux cercles sur la ligne des centres. On construit facilement ces points doubles réels en définissant l'involution par deux cercles réels rencontrant $O\omega_1$ aux mêmes points imaginaires que (Γ_1) et (C_1).

(H) et (C_2) se réduisent tous deux à $O\omega_1$ et la droite de l'infini de (T).

Nous pouvons reprendre par le calcul les parties traitées géométriquement :

IV. Soient x', y', o et x'', y'', o les coordonnées de Q et R. L'équation du plan diamétral conjugué, dans E, de la direction ωQ est

$$(x'-x_1)\frac{z_1(xz_1-zx_1)}{\alpha^2}+(y'-y_1)\frac{z_1(yz_1-zy_1)}{\beta^2}$$
$$-z_1\left(-\frac{x_1(xz_1-zx_1)}{\alpha^2}-\frac{y_1(yz_1-zy_1)}{\beta^2}+\frac{z-z_1}{2}\right)=0.$$

R y étant contenu on a

$$z_1^2\left(\frac{x'x''}{\alpha^2}+\frac{y'y''}{\beta^2}+\frac{1}{2}\right)=0.$$

Comme nous supposons $z_1\neq 0$, ceci exprime que Q et R sont conjugués par rapport à (Γ_1). On démontrerait qu'il en est de même de R et P et de P et Q.

ωQ et ωR étant rectangulaires, on a

$$(x'-x_1)(x''-x_1)+(y'-y_1)(y''-y_1)+z_1^2=0,$$

ce qui exprime que Q et R sont conjugués par rapport au cercle (C_1), dont l'équation est

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z_1^2 = 0.$$

On démontrerait qu'il en est de même de R et P, P et Q.

V. On obtient les coordonnées x, y, o des traces sur (T) des axes de (E) en exprimant que la direction d'un axe est perpendiculaire au plan diamétral conjugué : $\varphi(x, y, z)$ désignant l'ensemble des termes du second degré de E, on doit avoir

$$\frac{\varphi'_{x-x_1}}{x - x_1} = \frac{\varphi'_{y-y_1}}{y - y_1} = \frac{\varphi'_{-z_1}}{-z_1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\dfrac{xz_1^2}{\alpha^2}}{x - x_1} = \frac{\dfrac{yz_1^2}{\beta^2}}{y - y_1} = \frac{-\dfrac{x_1xz_1}{\alpha^2} - \dfrac{y_1yz_1}{\beta^2} - \dfrac{z_1}{2}}{-z_1},$$

équations qui peuvent être remplacées par le système des équations (1) et (2)

$$(1) \qquad \frac{\dfrac{x}{\alpha^2}}{x - x_1} = \frac{\dfrac{y}{\beta^2}}{y - y_1},$$

$$(2) \qquad \frac{z_1^2\left(\dfrac{x}{x_1} + \dfrac{y}{y_1}\right)}{\left(\dfrac{x}{x_1} - 1\right)\alpha^2 + \left(\dfrac{y}{y_1} - 1\right)\beta^2} = \frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} + \frac{1}{2},$$

en supposant $z_1 \neq 0$.

Nous introduisons d'ailleurs une solution étrangère définie par (3) et (4) :

$$(3) \qquad \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{x - x_1}{\dfrac{x_1}{\alpha_2}} + \frac{y - y_1}{\dfrac{y_1}{\beta^2}} = 0.$$

En développant l'équation (2) on a

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2+y^2+xy\left(\frac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1}+\frac{\beta^2 x_1}{\alpha^2 y_1}\right) \\ & \qquad -(\alpha^2+\beta^2)\left(\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}\right) \\ & \qquad +\frac{1}{2}\left(\alpha^2\frac{x}{x_1}+\beta^2\frac{y}{y_1}\right) \\ & \qquad -z_1^2\left(\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}\right)-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=0. \end{aligned}\right.$$

En supposant $\alpha^2-\beta^2\neq 0$, de (1), on tire

$$xy=\frac{\alpha^2 x_1 y-\beta^2 y_1 x}{\alpha^2-\beta^2},$$

et, en portant dans (5), on a l'équation d'un cercle (C_2)

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+\frac{\alpha^2 xy_1-\beta^2 y_1 x}{\alpha^2-\beta^2}\left(\frac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1}+\frac{\beta^2 x_1}{\alpha^2 y_1}\right) \\ & \qquad -(\alpha^2+\beta^2)\left(\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}\right) \\ & \qquad +\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2 x}{x_1}+\frac{\beta^2 y}{y_1}\right)-z_1^2\left(\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}\right)-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=0. \end{aligned}$$

(1) est l'équation de l'hyperbole (H) d'Apollonius par rapport à (Γ) du point de coordonnées x_1, y_1, o, centre de (C_1), par conséquent point de rencontre ω_1 des hauteurs du triangle PQR.

(H) et (C_2) se coupent en P, Q, R et un quatrième point S correspondant à la solution étrangère définie par (3) et (4). On vérifie immédiatement que S est symétrique de ω_1 par rapport au centre de (H) et l'on en déduit la construction déjà donnée pour le point S.

Il suffit de substituer aux coordonnées courantes celles de O et ω_1 dans l'équation de (C_2) pour constater que les puissances de ces points par rapport à (C_2) ont pour carrés

$$-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \quad \text{et} \quad -2z_1^2.$$

VI. Comme pour PQR, nous montrerions que ABC est conjugué à (Γ_1). Si (Γ) est un cercle $\alpha = \beta = \rho$. Soient x', y', o et x'', y'', o les coordonnées de B et C. On a, puisque B et C sont sur (Γ),

$$x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2 = \rho^2$$

et, puisqu'ils sont conjugués par rapport à (Γ_1),

$$2x'x'' + 2y'y'' + \rho^2 = 0.$$

En portant dans l'expression de $\overline{BC}^2$ on trouve pour $\overline{BC}$ la valeur $\rho\sqrt{3}$, évidemment la même pour $\overline{CA}$ et $\overline{AB}$; ABC est équilatéral.

Comme $\alpha^2 - \beta^2 = 0$, les équations de (C_2) et (H) qui se réduisent toutes deux à celle de $O\omega_1$ ne peuvent plus définir PQR.

P et Q sont définis par (1) et (5) et sont donc sur $O\omega_1$.

R est passé à l'infini.

S est à l'infini sur la droite $\dfrac{x}{x_1} + \dfrac{y}{y_1} = 0$.

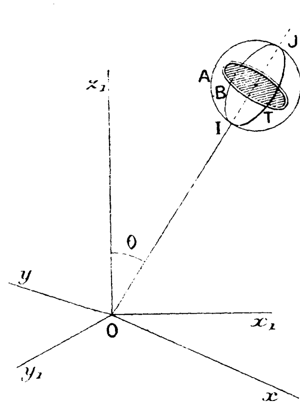
CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Question de cours. — *Établir en Cinématique le théorème de Coriolis et montrer comment on l'utilise en Dynamique.*

Problème. — *Une tige* OI, *mobile autour de son extrémité* O, *est terminée par deux anneaux identiques* IAJ, IBJ *assemblés à angle droit suivant un diamètre commun* IJ *prolongement de la tige.*

Un tore ayant cette droite IJ *comme axe peut tourner librement autour de cet axe.*

La position du système est définie par les angles θ, φ, ψ *d'Euler fixant l'orientation du trièdre* $Oxyz$ (Oz *coïncide avec* OI, Ox *et* Oy *sont dans les plans respectifs des anneaux*) *et par l'angle* χ *dont le tore a tourné autour de son axe à partir d'une position initiale prise arbitrairement.*



Toutes les pièces sont d'ailleurs supposées homogènes et pesantes.

Après avoir écarté la tige de la verticale et donné un mouvement de rotation, autour de OI, *au tore d'une part, et à l'ensemble d'autre part, on abandonne le système à lui-même.*

1° *Établir les équations du mouvement du système par la méthode de Lagrange;*

2° *En déduire que la vitesse de rotation propre du tore autour de son axe reste constante;*

3° *En déduire aussi que le mouvement du trièdre défini par* θ, φ, ψ *est celui d'un solide de révolution homogène et pesant, suspendu par un point de son axe.*

SOLUTION.

Prenons suivant la verticale ascendante l'axe Oz_1 du trièdre de référence.

Soient

A et C les moments d'inertie du tore par rapport à Ox ou Oy et Oz;

A' et C' les moments d'inertie pour l'ensemble de la tige et des anneaux;

P le poids total;

d la distance au point O du centre de gravité du système.

On a

$$2T = (A + A')(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) + C(\chi' + \varphi' + \psi' \cos\theta)^2 + C'(\varphi' + \psi' \cos\theta)^2,$$

$$U = Pd\cos\theta.$$

Les équations de Lagrange relatives à χ et à φ donnent deux intégrales premières, desquelles on déduit immédiatement

$$\chi' = \text{const.} = \chi'_0,$$

$$\varphi' + \psi' \cos\theta = \text{const.} = r_0.$$

L'équation de Lagrange relative à ψ et le théorème des forces vives donnent les deux intégrales premières,

$$(A + A')\psi' \sin^2\theta + \left(C + C' + C' \frac{\chi'_0}{r_0}\right) r_0 \cos\theta = \text{const.},$$

$$(A + A')(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) = 2Pd\cos\theta + \text{const.},$$

qui, jointes à

$$\varphi' + \psi' \cos\theta = r_0,$$

définissent le mouvement du trièdre. On reconnaît qu'elles définissent ainsi le mouvement, autour de O, d'un solide de révolution autour de Oz, de même poids et de même centre de gravité que le système donné, mais de moments d'inertie

$$A + A'$$

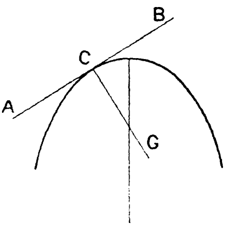
et

$$C + C' + \frac{C'\chi'_0}{r_0},$$

animé de la rotation initiale r_0 autour de son axe.

(Lille, novembre 1900.)

Une barre homogène repose par son milieu sur le sommet



d'une chaînette renversée dont l'axe est vertical. On écarte la barre de sa position d'équilibre et l'on suppose qu'elle recule sans glisser sur la chaînette. On suppose en outre que le centre du système mobile est en G *à une distance* $CG = a$ *sur la perpendiculaire au milieu de la barre; déterminer le mouvement de la barre.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Il n'y a pas d'épreuve pratique.*

(Besançon, juillet 1901.)

I. *Dans un plan fixe* P *on donne un cercle* C *et un de ses diamètres* D; *un plan* Π *glisse sur* P *de manière qu'une droite* Δ *du plan* Π *reste tangente à* C *et qu'un point* A *de* Δ *glisse sur* D *avec une vitesse constante. Lieux du centre instantané dans les plans* P *et* Π. *Lieux des points dont l'accélération centripète ou tangentielle est nulle à un instant donné.*

II. *Une plaque pesante, très mince et homogène, a la forme d'un triangle* PQR *rectangle en* P : *les côtés* PQ, PR *ont une même longueur* $6a$; PQ *est assujetti à glisser sans frottement sur un plan horizontal fixe* H. *A l'instant initial la plaque est immobile au-dessus du plan* H *et on* *l'abandonne à l'action de la pesanteur. Déterminer son mouvement en admettant qu'elle puisse passer d'un côté à l'autre du plan* H.

SOLUTION.

Par le centre de gravité G, menons Gx, Gy parallèles à PQ et à PR, Gz normal à la plaque, et trois axes de directions invariables, Gx_1, Gy_1 horizontaux, Gz_1 en sens contraire de la pesanteur. La position de la plaque peut être déterminée par les trois angles d'Euler, ψ, θ, φ (φ étant toujours nul) et par les coordonnées ξ, η, $\zeta = 2a\sin\theta$, de G par rapport à des axes parallèles à Gx_1, y_1, z_1 ayant leur origine dans le plan H. La force vive est de la forme

$$M(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \\ - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq;$$

or on a

$$p = \theta', \qquad q = \psi'\sin\theta, \qquad r = \psi'\cos\theta,$$

et l'on trouve

$$A = B = 2Ma^2, \qquad C = 4Ma^2, \qquad D = E = 0, \qquad F = -Ma^2,$$

$$2T = M[\xi'^2 + \eta'^2 + 2(1 + 2\cos^2\theta)a^2\theta'^2 \\ + 2(1 + \cos^2\theta)a^2\psi'^2 + 2a^2\theta'\psi'\sin\theta].$$

Les équations de Lagrange relatives à ξ, η, ψ donnent

$$\xi' = \eta' = 0, \qquad 2(1 + \cos^2\theta)\psi' + \theta'\sin\theta = 0,$$

$$2\psi = \text{arc tang}\cos\theta - \text{arc tang}\cos\theta_0;$$

l'intégrale des forces vives donne ensuite

$$\theta'^2 = 8\frac{g}{a}\,\frac{(1 + \cos^2\theta)(\sin\theta_0 - \sin\theta)}{8\cos^4\theta + 13\cos^2\theta + 3}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer à* 0,001 *près le paramètre de la chaînette dessinée par un fil de longueur* 17, *dont une extrémité est à l'origine, l'autre au point* $x_1 = 14$, $y_1 = 8$, y_1 *en sens contraire de la pesanteur* ($a = 10{,}805$).

(Caen, juillet 1901.)

Un rectangle ABCD, *de grandeur invariable, de masse nulle, à deux sommets consécutifs* A, B *situés sur un axe fixe* Oz *faisant un angle donné avec la verticale. Ce rectangle peut tourner autour de* Oz *et glisser le long de cet axe. Le côté* CD *du rectangle est l'axe de révolution d'un solide* S, *homogène et pesant, qui peut tourner autour de* CD.

Étudier le mouvement du système en supposant les liaisons sans frottement.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Deux cylindres de révolution ont même centre et même axe de révolution. Le premier a pour rayon* R, *pour hauteur* h; *le second a pour rayon* R' *et pour hauteur* h', *et l'on suppose* $R' < R$, $h' < h$. *Le volume compris entre les deux cylindres est rempli d'une matière homogène de densité* ρ.

Calculer : 1° *le moment d'inertie du solide ainsi constitué par rapport à l'axe de révolution;* 2° *le moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire au précédent mené par le centre de gravité;* 3° *son énergie cinétique lorsqu'il tourne avec une vitesse angulaire donnée* ω *autour de l'axe de révolution.*

On évaluera l'énergie cinétique en kilogrammètres, avec une erreur relative inférieure à 0,01, *en posant* $R = 1^{m}$, $R' = 0^{m},80$, $h = 0^{m},10$, $h' = 0^{m},05$, $\rho = 7,5$ *et en supposant que le solide fasse* 180 *tours à la minute. On posera*

$$g = 9^{m},81.$$

(Grenoble, juillet 1901.)

QUESTION DE COURS. — *Théorème de Lejeune-Dirichlet sur la stabilité de l'équilibre.*

PROBLÈME. — *Un cône pesant de révolution, de rayon de base* $0^{m},1$, *d'arête* $0^{m},2$, *a pour sommet un point fixe* O *autour duquel il peut tourner librement. Il est assujetti à s'appuyer par son arête circulaire sur la face* INTÉRIEURE *d'un cylindre creux fixe, de révolution autour d'un axe* Oz_1 *horizontal contenant le sommet* O *du cône; le rayon de ce cylindre est* $\sqrt{3}$ *décimètre.*

Étudier le mouvement de ce cône, en supposant qu'il n'y ait pas de frottement, et que le cône soit abandonné sans *vitesse lorsque la génératrice du cône passant par le point d'appui est horizontale.*

SOLUTION.

L'axe du cône fait un angle constant de 30° avec Oz_1. Les forces sollicitant le cône rencontrent son axe et le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à cet axe donne une intégrale première; le théorème des forces vives donne une seconde intégrale, en sorte que le problème est ramené aux quadratures.

Attachons au cône le trièdre positif qui, *dans la position initiale,* est défini par l'axe Oz du cône et la verticale descendante Ox du sommet O; soient θ, φ, ψ les angles d'Euler fixant la position de ce trièdre à l'instant t. En notant qu'initialement φ, ψ et leurs dérivées sont nulles, on obtient les équations

$$\theta = 30^\circ, \qquad \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\psi, \qquad \alpha t = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{\sin\psi}},$$

où

$$\alpha = \frac{8}{3}\sqrt{g\sqrt{3}} \qquad (g \text{ exprimée en décimètres}),$$

ψ s'exprime en fonction elliptique de αt comme dans la théorie du pendule simple

$$\sin\psi = \frac{1}{\wp\left(\frac{4}{3}\sqrt{g\sqrt{3}}\,t\right)} \qquad [\wp(u; -1, 0, +1)].$$

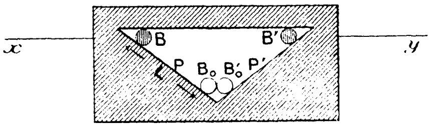
(Lille, juillet 1901.)

I. *Principe d'Archimède. Généralisation de ce principe dans le cas où les forces distribuées sur le solide rigide plongé dans le fluide envisagé sont quelconques.*

II. *Un point matériel* M, *de masse égale à* 1g, *est soumis à l'action de deux forces, l'une attractive, l'autre répulsive, émanant d'un même centre fixe* O. *La force attractive varie en raison inverse du carré de la distance du point* M *au centre* O, *la force répulsive en raison inverse du cube de cette même distance. A l'instant initial, le point* M *est placé en un point donné* M_0 *situé à* $0^m,01$ *de distance du centre* O; *le segment qui représente sa vitesse initiale fait un angle de* 30° *avec le prolongement du vecteur* OM_0, *et la longueur de ce segment est de* $0^m,04$; *à cet instant initial,* *l'intensité de la force attractive est de* 14 *dynes, celle de la force répulsive est de* 12 *dynes. On demande la trajectoire et la loi du mouvement du point* M.

(Nancy, juillet 1901.)

Épreuve écrite. — *Un système* pesant *est formé de deux billes homogènes sphériques identiques* B, B′ *et d'un corps*



rigide R *dont la* surface externe *est celle d'un parallélépipède rectangle* π, *mais dont la surface interne comprend deux plans inclinés* P, P′ *supportant les billes* B *et* B′. *Le corps* R *admet deux des trois plans de symétrie du parallélépipède* π *et dans l'un de ces deux plans (plan de la figure) sont placées les deux boules qui reposent,* retenues, *sur les plans* P *et* P′.

Dans une position où le troisième plan de symétrie *du parallélépipède* π *est horizontal, et les billes étant toujours retenues sur les plans inclinés et à un même niveau, le système est d'abord en équilibre* sous l'action de la pesanteur *et* sous l'action des pressions *exercées sur les éléments de la surface* π qui sont situés au-dessous *d'un plan horizontal* fixe XY, *avec une intensité* proportionnelle a la profondeur *de l'élément* au-dessous *de ce plan.*

Puis, au moyen de glissières verticales (supposées sans frottement) on ne permet plus au corps R *qu'un mouvement de translation verticale. Le système étant resté jusqu'ici dans sa même position d'équilibre,* on abandonne alors sans impulsion relative *les billes* B, B′; *celles-ci se mettent à rouler sur les plans inclinés et l'on demande :*

1° *D'étudier le mouvement du système sous l'action des forces ci-dessus définies, et de calculer la pression d'une bille sur son plan incliné;*

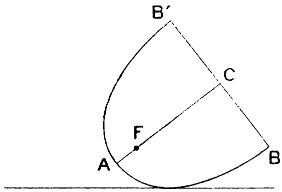
2° *De définir l'effet produit sur le système par le choc des billes* B, B′ *que l'on supposera devoir se figer en contact mutuel dès qu'elles se rencontreront;*

3° *Étudier le mouvement du système après le choc.*

Données :

M *masse du corps* R;
m *masse de chaque bille;*
g *gravité;*
K *pression rapportée à l'unité de surface et s'exerçant sur tout élément superficiel situé à l'*UNITÉ *de profondeur au-dessous de* XY;
B *inclinaison des plans* P, P′ *sur le* TROISIÈME PLAN DE SYMÉTRIE *de* π;
L *distance du centre de la bille* B *au centre de la même bille supposée venue dans le plan de la figure en sa position* B_0 *de contact avec l'autre bille supposée venue aussi dans la rigole formée par les deux plans inclinés;*
S *aire limitée par la ligne commune au plan* XY *et à la surface externe du corps* R.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque homogène a la forme d'un segment de parabole* BAB′. *Ce segment est limité à*



une droite BB′ *perpendiculaire à l'axe de la courbe et distant du sommet* A *d'une longueur* AC *égale à* 16AF, F *étant le foyer. La plaque pèse* 25^{kg}. *On la place verticalement sur un plan horizontal, son axe faisant un angle de* 45° *avec l'horizon. Quel poids faut-il appliquer au foyer pour que la plaque soit en équilibre?*

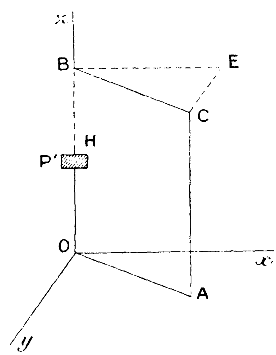
(Montpellier, juillet 1901.)

Étudier le mouvement d'un point non pesant, assujetti à rester sur un paraboloïde de révolution et attiré par une force perpendiculaire à l'axe en raison inverse du carré de la distance. Le plan attirant est le lieu des directrices des *paraboles méridiennes. Le mobile est lancé avec une vitesse tangente au parallèle du point de départ et égale à* $\sqrt{\frac{\mu}{z_0}}$, μ *étant le coefficient d'attraction (la masse est égale à* 1) *et* z_0 *le* z *du point de départ. On pourra supposer* $z_0 = 2p$. *Calcul de la réaction. On prendra le plan attirant pour plan des* xy.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un cylindre à section elliptique, homogène, pesant, est suspendu par diverses arêtes (supposées horizontales) passant par une extrémité du grand axe de l'ellipse. Il forme ainsi un pendule composé. Sachant que le petit axe de la section est égal à* 26, *quelle doit être la longueur du grand axe pour que le pendule simple synchrone ait une longueur donnée* l? *Minimum de* l.

(Poitiers, juillet 1901.)

Un châssis rectangulaire très mince, homogène, pesant OBCA *est assujetti à tourner autour de deux de ses*



sommets O *et* B *situés sur une verticale* Oz. *Il est mis en mouvement par un poids* P′ *attaché à l'extrémité d'un cordon inextensible* CEBH *qui a son extrémité fixée au sommet* C, *qui passe sur deux poulies très petites placées en* E *et en* B *et qui, ensuite, descend suivant la verticale du point* B. *On suppose* BE *perpendiculaire à* OB *et* BE = BC. *On négligera la masse du cordon.*

On demande :

1° *D'étudier le mouvement du châssis en supposant qu'à* *l'instant initial il est au repos dans une position* CBOA *faisant un angle* θ_0 *avec le plan* EBO *et qu'on l'abandonne à lui-même à partir de cette position;*

2° *De calculer la tension du cordon;*

3° *D'évaluer les pressions exercées sur les deux points fixes* O *et* B.

Données :

$OA = 2a$, $OB = 2b$;
e épaisseur très petite du châssis;
ρ *sa densité;*
l longueur du cordon;
θ_0 *écart initial sur le plan* EBOx.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer les coordonnées du centre de gravité d'un arc homogène de spirale logarithmique dont l'équation est*

$$r = ae^{m\theta}.$$

On prendra l'arc compris entre les limites $\theta = 0$ *et* $\theta = \alpha$.

(Toulouse, juillet 1901.)

Un cylindre circulaire droit, limité, homogène, pesant, de masse M, *est posé sur un plan fixe, incliné sur l'horizon d'un angle* α. *Deux points matériels de masse m sont fixés aux extrémités d'un même diamètre d'une section du cylindre. Étudier le mouvement, en supposant le plan et le cylindre parfaitement polis. Qu'arrive-t-il en particulier si, au début, les deux masses additionnelles sont à la même distance du plan incliné, le cylindre n'étant animé d'aucun mouvement de rotation autour de son axe?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère une lame homogène infiniment mince, ayant la forme d'un secteur de cercle* AOB. *Déterminer l'ouverture du secteur par la condition que les moments d'inertie de la lame, par rapport à la bissectrice de l'angle* AOB *et à la tangente au milieu* C *de l'arc* AB, *soient entre eux dans le rapport des nombres* 1 *et* 5.

(Paris, octobre 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Deux cylindres géométriquement identiques, homogènes et de masses différentes, sont placés de façon à être tangents tout le long d'une génératrice et leurs* *axes sont dans un plan horizontal* P. *Ils peuvent librement tourner autour de leurs axes et ceux-ci sont soumis à des liaisons sans frottements, qui ne leur permettent d'autre mouvement qu'une translation perpendiculaire à leur direction commune et située dans le plan* P. *Une sphère pesante de même rayon que les cylindres repose sur eux, et on lui donne un mouvement initial absolument quelconque. On suppose que les masses de la sphère et des deux cylindres sont liées par la relation*

$$m^2 = 4m'm'',$$

et l'on demande d'étudier le mouvement du système, les réactions de la sphère sur les cylindres, l'instant où la sphère quitte les cylindres et le mouvement qui suit cette séparation.

SOLUTION.

Pour chaque cylindre, on applique les équations de Lagrange en introduisant, comme force extérieure, la réaction de la sphère. On a ainsi quatre équations dont deux montrent que les rotations des cylindres sont constantes.

Les équations d'Euler appliquées à la sphère montrent que sa rotation est constante en grandeur et direction.

Enfin, on écrit les équations du mouvement du centre de gravité pour la sphère; l'une d'elles montre que son mouvement dans le sens des cylindres est uniforme.

Il reste finalement quatre équations pour déterminer les mouvements perpendiculaires aux cylindres et les deux réactions. En prenant comme variables l'abscisse x du centre de la sphère et le demi-angle θ des rayons de contact avec les deux cylindres on a immédiatement, par une intégration facile, x en fonction de θ, et l'équation pendulaire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{2R}\sin\theta.$$

On en déduit les deux réations en fonction de θ et l'on constate que le contact de la sphère cesse simultanément avec les deux cylindres quand θ atteint la valeur déterminée par l'équation

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Le mouvement qui suit est très simple et il ne reste qu'à étudier la distance des axes des cylindres, ainsi que celles du centre de la sphère à ces axes, ce qui revient à voir si une équation du premier degré et deux équations du troisième degré ont des racines positives.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère, dans le plan des xy, la région limitée par la parabole $y^2 = x$ et la droite $x = 1$ et le solide* S *engendré en faisant tourner cette région autour de l'axe des x.*

1° *Déterminer complètement l'ellipsoïde central d'inertie du solide* S *supposé homogène et de densité égale à* 1.

2° *Calculer la force vive du solide* S *tournant avec une vitesse constante égale à l'unité autour de la droite $x = y = z$.*

(Grenoble, novembre 1901.

I. *On considère trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ *et un fil flexible, de masse négligeable, de longueur* $12a$, *dont une extrémité est fixée à l'origine, l'autre en un point de coordonnées $x = 0$, $y = 2a$, $z = 4a$. Sur ce fil sont enfilés trois anneaux très petits, pouvant glisser sans frottement; le premier à partir de l'origine est sollicité par une force* 2P *parallèle à* OX, *le suivant par une force* 4P *parallèle à* OY, *le dernier par une force* 4P *parallèle à* OZ. *Déterminer la figure d'équilibre et la tension du fil.*

II. *On donne une sphère homogène non pesante, de rayon a, dont chaque élément est attiré vers un point fixe* P *suivant la loi de Newton; l'attraction sur l'unité de masse à l'unité de distance est $\frac{11}{5}a^3\omega^2\sqrt{2}$, ω étant une constante. Le centre* S *de la sphère est relié à un point fixe* O *par une tige droite, infiniment mince, de longueur $2a$, passant dans un canal infiniment étroit creusé suivant un rayon de la sphère : la tige* OS *peut tourner librement autour du point* O *et la sphère autour de* OS : *la distance* OP *est égale à $2a$. A l'instant initial l'angle* POS *est droit, la droite* OS *tourne avec une vitesse ω autour de* OP *et la sphère avec une vitesse 11ω autour de* OS. *Former les intégrales premières du mouvement de la sphère : montrer quelle serait la forme de la trajectoire* *du point* S *si l'on ne se préoccupait pas de la rencontre de la sphère avec le point* P.

III. Épreuve pratique. — *Une barre très mince et homogène longue de* $0^m,60$ *à son extrémité inférieure sur un plan horizontal poli, avec lequel elle fait un angle de* 30^o : *on l'abandonne sans vitesse à l'action de la pesanteur. Calculer, à* $0^s,001$ *près, le temps qu'elle met à tomber sur le plan.*

Solutions.

(I). Soit $\omega\alpha\beta\gamma\delta\omega$ le polygone de Varignon : $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$, $\omega\delta$, qui représentent les tensions des quatre parties du fil sont égales; les points α, ω, δ sont en ligne droite, et l'on trouve pour les longueurs des quatre portions du fil, $6a$, $\frac{3}{2}a$, $\frac{3}{2}a$, $3a$; la tension est 3P.

(II). Prenant trois axes fixes, dont OZ, dirigé suivant OP, on définit la position de la sphère par les angles d'Euler θ, ψ, φ. La constance de la projection sur OS et sur OP de l'axe du couple des quantités de mouvement et l'intégrale des forces vives (ou les équations de Lagrange) donnent

$$r = 11\omega,$$

$$\psi' = \frac{\omega}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}, \qquad \theta'^2 = \omega^2\frac{1-\sin^2\frac{1}{2}\theta-\sqrt{2}\sin^3\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\theta\cos^2\frac{1}{2}\theta},$$

θ décroît de $\frac{\pi}{2}$ à zéro dans un temps fini.

$$\text{(III).}\qquad T = \sqrt{\frac{a}{2g}}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{\frac{1}{3}+\cos^2\theta}}{\sqrt{\frac{1}{2}-\sin\theta}}\,d\theta,$$

on peut poser $\sin\theta = \frac{1}{2}\sin^2\mu$,

$$T = \sqrt{\frac{a}{3g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{32}\sin^4\mu+\frac{15}{2048}\sin^8\mu+\ldots\right)\sin\mu\,d\mu = 0^s,208.$$

(Caen, novembre 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une plaque carrée* ABCD *homogène et pesante, dont on néglige l'épaisseur, repose par le côté* AB *sur un plan horizontal fixe. On demande d'étudier le mouvement de la plaque dans l'hypothèse suivante : à l'époque initiale la plaque est inclinée de* 60° *sur le plan horizontal, le côté* AB *est immobile, et la plaque tourne autour de lui, en se dirigeant au-dessus du plan horizontal, avec la vitesse angulaire* $\sqrt{\frac{12g}{13a}}$; $2a$ *est la longueur de* AB, g *désigne l'accélération de la pesanteur. On supposera qu'il n'y a pas de frottement, et l'on se dispensera d'étudier la réaction du plan fixe sur la plaque.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Justifier la construction suivante de l'axe instantané de rotation et de glissement, qui a été indiquée par Poncelet :*

On mène, par un point arbitraire O *de l'espace, trois vecteurs* OV, OV′, OV″, *égaux aux vitesses de trois points* M, M′, M″ *du corps. L'axe instantané est perpendiculaire au plan* Π *des trois points* V, V′, V″. *On projette sur le plan* Π *les points* M *et* M′ *en* m *et* m', *et leurs vitesses en* mv *et* $m'v'$; *les perpendiculaires élevées en* m *et* m' *à* mv *et* $m'v'$ *se coupent au pied de l'axe sur le plan* Π.

(Montpellier, novembre 1901.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1927.

(1902, p. 287.)

On considère six points A, B, C, D, E, F *tels que chacun des quatre couples de plans*

(EFA, BCD), (EFB, CDA), (EFC, DAB), (EAB, FCD)

est formé de deux plans rectangulaires.

1° *Démontrer que toutes les quadriques passant par ces six points sont des hyperboloïdes équilatères, de sorte que, en particulier, le plan de trois quelconques des six points est perpendiculaire au plan des trois autres; un tel système de six points peut être dit* ORTHOGONAL.

2° *Démontrer que le système de cinq quelconques des six points a une sphère conjuguée dont le centre est le sixième point du système.* (*On dit qu'une sphère est conjuguée à un système de cinq points lorsque le pôle du plan de trois quelconques des cinq points est sur la droite qui joint les deux autres.*)

3° *Réciproquement, si un système de cinq points admet une sphère conjuguée, les cinq points et le centre de la sphère forment un système orthogonal de six points.*

(G. Fontené.)

1935.

(1902, p. 384.)

On dit qu'un pentagone gauche est conjugué à une quadrique quand la droite qui joint deux quelconques de ses sommets passe par le pôle du plan des trois autres :

1° *Les sommets de deux pentagones conjugués à une même quadrique sont sur une même quadrique.*

2° *Les sommets d'un pentagone et d'un tétraèdre conjugués à une même quadrique sont sur une même biquadratique.* (E. Duporcq.)

1936.

(1902, p. 384.)

On dit qu'un hexagone gauche est conjugué à une quadrique quand le plan défini par trois quelconques de ses sommets est conjugué du plan des trois autres :

1° *Les sommets d'un hexagone et d'un tétraèdre conjugués à une même quadrique sont sur une même quadrique.*

2° *Il existe deux sphères conjuguées à un même hexagone. Leurs centres appartiennent à tous les hyperboloïdes équilatères circonscrits à l'hexagone.* (E. Duporcq.)

SOLUTIONS

Par M. R. Gilbert.

Soient 1, 2, 3, 4, 5 les sommets d'un pentagone gauche conjugué à la quadrique Q. Le pôle du plan 123 est sur 45 dans le plan P polaire du point 1. De même pour les plans 124, 125, 134, 135, 145. Donc la conique C, section de Q par le plan P, est une conique conjuguée au pentagone des cinq points.

Toute quadrique S qui passe par les points 1, 2, 3, 4, 5 coupe P suivant une conique harmoniquement circonscrite à C; on peut tracer dans P un triangle abc inscrit à S et conjugué à Q. Donc S est harmoniquement circonscrite à Q.

Réciproquement, si une quadrique Q est harmoniquement inscrite à cinq quadriques S passant par les points 1, 2, 3, 4, 5 et linéairement indépendantes, elle l'est à toute quadrique passant par ces cinq points, en particulier aux quadriques composées de couples de plans, et, par suite, est conjuguée au penpentagone 12345.

Réciproquement encore : si une quadrique, S, passant par quatre des sommets, par exemple 1, 2, 3, 4, est harmoniquement circonscrite à la quadrique Q conjuguée au pentagone 12345, elle passe par le point 5. En effet, elle coupe le plan P polaire du point 1 suivant une conique Σ, harmoniquement circonscrite à C. Or une quadrique qui passe par 1, 2, 3, 4, 5 et quatre des points de Σ coupe P suivant une conique harmoniquement circonscrite à C et passant par quatre points de Σ; elle se confond donc avec Σ et la quadrique auxiliaire avec S.

Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6 les sommets d'un hexagone gauche conjugué à la quadrique Q. Le pôle du plan 123 est sur la droite d'intersection D du plan 456 par le plan P, polaire du point 1. Le plan P coupe la quadrique Q suivant une conique C, et le plan 123 suivant une droite, Δ, conjuguée de D par rapport à C. On trouve ainsi, dans P, dix couples de droites (D, Δ) conjuguées à C. Or les quadriques S, qui passent par les sommets de l'hexagone, coupent le plan P suivant des coniques appartenant à un réseau ponctuel défini par quatre de ces coniques linéairement indépendantes. La conique C est harmoniquement inscrite à dix de ces coniques constituées par les dix couples (D, Δ) et, par suite, à toutes ces coniques. Donc toutes les quadriques S sont harmoniquement circonscrites à Q.

Réciproquement, on voit que, si Q est harmoniquement inscrite à quatre quadriques S, linéairement indépendantes et passant par les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, elle est conjuguée à l'hexagone qui a ces points pour sommets.

Réciproquement aussi, toute quadrique S qui passe par les cinq sommets 1, 2, 3, 4, 5 d'un hexagone conjugué à une quadrique Q passe par le sixième. En effet, elle coupe le plan P suivant une conique Σ, harmoniquement circonscrite à C et à C_1 de ce plan à laquelle sont harmoniquement circonscrites les coniques sections par P des quadriques qui passent par 1, 2, 3, 4, 5. Une quadrique passant par 1, 2, 3, 4, 5, 6 et par trois des points de Σ coupe P suivant une conique qui est aussi harmoniquement circonscrite à C et C_1; donc elle se confond avec Σ et la quadrique auxiliaire avec S.

On peut dire, d'une façon générale, qu'une quadrique, Q, est conjuguée à un polygone gauche de n sommets $(9 \geqq n \geqq 4)$ lorsqu'elle est harmoniquement inscrite à $10 - n$ quadriques linéairement indépendantes qui passent par ces n points.

On peut établir les propositions suivantes :

Si une quadrique, Q, est conjuguée à un polygone gauche de n sommets 1, 2, 3, ..., n, parmi les quadriques Q′ circonscrites à Q suivant la section de Q par le plan polaire P d'un sommet, 1, on peut trouver une quadrique conjuguée au polygone des $n - 1$ autres sommets 2, 3, 4, ..., n.

En effet, soit S une quadrique qui passe par les points 1, 2, 3, ..., n; il y a un tétraèdre de sommet 1 inscrit à S et conjugué à Q et, par suite, à Q′. Autrement dit, toutes les quadriques Q′ sont conjuguées au polygone $123\ldots n$. On peut en déterminer une de façon qu'elle soit harmoniquement inscrite à une quadrique qui passe par les points 2, 3, 4, ..., n sans passer par le point 1. Elle sera conjuguée au polygone $234\ldots n$.

Réciproquement, si un polygone de $n - 1$ sommets est conjugué à une quadrique Q, à toute quadrique Q′ circonscrite à Q correspond le pôle du plan de contact qui forme avec les $n - 1$ points un polygone gauche de n sommets conjugué à Q′.

Car toutes les quadriques S qui passent par ce pôle sont harmoniquement circonscrites à Q et, par suite, à Q′.

D'après ces résultats, on a immédiatement les solutions des questions **1927**, **1935**, **1936**.

1927. 1° Supposons que parmi les quadriques conjuguées à un hexagone gauche se trouve l'ombilicale : toutes les coniques Σ sections par le plan de l'infini des quadriques S circonscrites à l'hexagone seront harmoniquement circonscrites à l'ombilicale, c'est-à-dire que les quadriques S sont des hyperboloïdes équilatères.

Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que quatre des quadriques S, linéairement indépendantes, soient des hyperboloïdes équilatères.

2° Dans l'hypothèse précédente, on peut trouver une sphère conjuguée au pentagone 23456; son centre est le point 1.

3° Réciproquement, si le pentagone 23456 est conjugué à la sphère de centre 1, l'hexagone 123456 est conjugué à l'ombilicale.

1935. 1° Soient 12345 et 1'2'3'4'5' deux pentagones gauches conjugués à une quadrique Q; une quadrique S qui passe par les neuf points 1, 2, 3, 4, 5, 1', 2', 3', 4' est harmoniquement circonscrite à Q; donc elle passe par S'.

2° Soient 12345 et 1'2'3'4' un pentagone et un tétraèdre conjugués à Q. Toutes les quadriques qui passent par 1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4' passent par 5.

1936. 1° Même démonstration.

2° Nous allons faire voir d'abord que toutes les quadriques S qui passent par six points 1, 2, 3, 4, 5, 6 et coupent un plan fixe P suivant des coniques Σ harmoniquement circonscrites à une conique fixe, C, passent par deux autres points fixes.

En effet, soit 7 un autre point commun à trois de ces quadriques S_1, S_2, S_3. Une quadrique S coupe P suivant une conique Σ harmoniquement circonscrite à trois coniques C, C', C''. Toute quadrique qui passe par les sept points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 coupe P suivant une conique qui fait partie du réseau ponctuel déterminé par les sections par P de S_1, S_2, S_3 et, par suite, est aussi harmoniquement circonscrite à c, c', c''. Si donc on assujettit cette quadrique à passer par deux points de Σ, sa section par P se confond avec Σ et la quadrique elle-même avec S; cette dernière passe par le point 7 et par le huitième point commun aux quadriques S_1, S_2, S_3.

Les hyperboloïdes équilatères qui passent par les points 1, 2, 3, 4, 5, 6 se coupent en deux points fixes 7, 8.

Les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sont les sommets d'un heptagone conjugué à l'ombilicale; donc il y a une sphère de centre 7 conjuguée à l'hexagone 123456.

[H2cγ]

UNE LEÇON SUR L'ÉQUATION DE RICCATI;

PAR M. L. RAFFY.

I.

1. On appelle *équation de Riccati* toute équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} + X_0 y^2 + X_1 y + X_2 = 0, \tag{1}$$

où X_0, X_1 et X_2 sont des fonctions de x. Cette équation, qu'on ne sait pas intégrer en général, jouit de propriétés remarquables. Pour démontrer les premières de ces propriétés, nous invoquerons trois lemmes bien connus, qu'il suffira d'énoncer.

LEMME I. — *L'intégrale générale de l'équation linéaire*

$$\frac{dz}{dx} + F(x)z + G(x) = 0 \tag{2}$$

s'obtient par deux quadratures; c'est une fonction linéaire

$$z = C.f(x) + g(x)$$

de la constante arbitraire.

LEMME II. — *Connaissant une solution particulière z_1 de l'équation linéaire* (2), *on obtient son intégrale générale au moyen d'une seule quadrature, par la formule*

$$z = z_1 + Ce^{-\int F(x)\,dx}.$$

Lemme III. — *Connaissant deux solutions particulières z_1 et z_2 de l'équation linéaire* (2), *on obtient son intégrale générale, sans quadrature, par la formule*

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = \text{C}.$$

Les théorèmes qui vont suivre sont des conséquences immédiates de ces propositions.

2. Théorème I. — *Connaissant une solution d'une équation de Riccati, on obtient son intégrale générale par deux quadratures.*

Soit, en effet, y_1 une solution de l'équation (1); par l'hypothèse, on a identiquement

$$(1)' \qquad \frac{dy_1}{dx} + \text{X}_0 y_1^2 + \text{X}_1 y_1 + \text{X}_2 = 0.$$

Si l'on pose

$$(3) \qquad y = y_1 + \frac{1}{z},$$

z étant une nouvelle fonction inconnue, et qu'on substitue cette expression de y dans l'équation (1) en ayant égard à l'identité (1)', on reconnaît que z dépend d'une équation linéaire

$$(4) \qquad \frac{dz}{dx} - (2\text{X}_0 y_1 + \text{X}_1) z - \text{X}_0 = 0.$$

Il est visible que la transformation (3) fait correspondre à toute intégrale de l'équation (4) une intégrale de l'équation (1) et réciproquement; de sorte que l'intégrale générale de l'équation (1) sera connue quand on connaîtra celle de l'équation (4), ce qui exige deux quadratures (lemme I).

Remarque I. — Ce théorème, qui est dû à Euler (*Institutiones Calculi integralis,* Vol. I, p. 383), fait connaître la *forme* de l'intégrale générale de l'équation (1).

En effet, si, dans la relation (3), on substitue à z l'intégrale générale de l'équation (4)

$$z = \mathrm{C}\, f(x) + g(x)$$

qui est linéaire (lemme I) par rapport à la constante arbitraire, on trouve

$$y = \frac{\mathrm{C}\,\alpha(x) + \beta(x)}{\mathrm{C}\,\gamma(x) + \delta(x)}. \tag{5}$$

Donc, *l'intégrale générale de toute équation de Riccati est une fraction rationnelle et du premier degré par rapport à la constante arbitraire.*

Réciproquement, *toute fonction de cette forme satisfait à une équation de Riccati.* Il suffit, pour s'en assurer, de résoudre l'équation (5) par rapport à la constante C et de différentier.

Remarque II. — Grâce à la formule (5), nous sommes d'ores et déjà en mesure de démontrer une propriété de l'équation de Riccati, qui est fondamentale, et que nous retrouverons tout à l'heure par un autre procédé : *le rapport anharmonique de quatre solutions quelconques de l'équation de Riccati est constant.*

En effet, si l'on donne successivement à C, dans la formule (5), quatre valeurs quelconques $\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3$, le rapport anharmonique des quatre intégrales correspondantes y_0, y_1, y_2, y_3 est, comme on sait, indépendant de α, β, γ, δ et égal au rapport anharmonique de $\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3$, c'est-à-dire à une constante.

3. Théorème II. — *Connaissant deux solutions*

d'une équation de Riccati, on obtient son intégrale générale par une seule quadrature. (Minding.)

Soient, en effet, y_1 et y_2 ces deux solutions. On a vu précédemment que la fonction

$$z = \frac{1}{y - y_1}$$

satisfait à l'équation linéaire (4); or on connaît *une* solution de cette équation, savoir

$$z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1},$$

Donc, on obtient son intégrale (lemme II) et, par suite y, au moyen d'une seule quadrature.

Minding, qui fut conduit à ce théorème dès 1845, par une tout autre voie ([1]), en a donné deux démonstrations, dont voici l'une :

Retranchant membre à membre l'équation (1) et l'identité (1)', puis divisant par $y - y_1$, on trouve

$$\frac{1}{y - y_1}\,\frac{d(y - y_1)}{dx} + X_0(y + y_1) + X_1 = 0.$$

([1]) La Note où se trouve ce résultat (*Journal de Crelle*, t. 40, p. 361) est consacrée à la démonstration d'un théorème qui paraît peu connu, bien qu'il soit fort remarquable. Je crois devoir en reproduire ici l'énoncé.

Étant donnée l'équation différentielle

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

où l'on suppose

$$M = a_0 y^{p-1} + a_1 y^{p-2} + \ldots + a_{p-1},$$
$$N = b_0 y^{p-1} + b_1 y^{p-2} + \ldots + b_{p-1},$$

chacune des fonctions a_r et b_r étant un polynome entier en x, de degré égal à son indice, si cette équation admet comme intégrales

Comme y_2 est aussi une solution de l'équation (1), on aura pareillement

$$\frac{1}{y-y_2}\frac{d(y-y_2)}{dx}+X_0(y+y_2)+X_1=0.$$

Retranchant membre à membre ces deux dernières équations, on trouve

$$\frac{d\log(y-y_1)}{dx}-\frac{d\log(y-y_2)}{dx}+X_0(y_1-y_2)=0,$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}e^{\int X_0(y_1-y_2)\,dx}=\text{const.}$$

4. Théorème III. — *Connaissant trois solutions d'une équation de Riccati, on obtient son intégrale générale sans quadrature.*

En effet, l'équation linéaire (4) à laquelle satisfait la fonction

$$z=\frac{1}{y-y_1}$$

---

particulières p droites

$$y-m_r x-n_r=0\qquad (r=1,2,\ldots,p)$$

ayant toutes des directions différentes, l'expression

$$\frac{M\,dx+N\,dy}{(y-m_1x-n_1)(y-m_2x-n_2)\ldots(y-m_px-n_p)}$$

est une différentielle exacte, et l'intégrale générale de l'équation proposée est

$$\prod_{r=1}^{r=p}(y-m_rx-n_r)^{h_r}=\text{const.},$$

les nombres h_r ayant des valeurs déterminées (à un facteur commun près).

admet deux solutions connues

$$z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}, \qquad z_2 = \frac{1}{y_3 - y_1}.$$

Par suite (lemme III), on connaît son intégrale générale

$$\left(z - \frac{1}{y_2 - y_1}\right) : \left(z - \frac{1}{y_3 - y_1}\right) = \text{const.} = C.$$

Celle de l'équation de Riccati est donc

$$\left(\frac{1}{y - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1}\right) : \left(\frac{1}{y - y_1} - \frac{1}{y_3 - y_1}\right) = C,$$

ce qui démontre le théorème. Cette formule, qu'on peut écrire

$$\frac{y - y_2}{y - y_3} : \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = C,$$

prouve à nouveau que *le rapport anharmonique de quatre solutions quelconques d'une équation de Riccati est une constante,* ainsi que nous l'avons déjà vu (n° 2, remarque II).

5. Nous avons jusqu'ici rattaché les propriétés de l'équation de Riccati à celles de l'équation linéaire du premier ordre. Il n'est pas moins important de rapprocher cette équation de l'équation linéaire du second ordre. Posons, à cet effet,

$$(6) \qquad y = \frac{1}{X_0} \frac{d \log t}{dx} = \frac{t'}{X_0 t}.$$

Cette substitution, opérée dans l'équation (1), donne

$$(7) \qquad t'' + \left(X_1 - \frac{X'_0}{X_0}\right) t' + X_0 X_2 t = 0;$$

d'où cette conclusion :

Toute intégrale de l'équation (1), *multipliée par* *la fonction* X_0, *est la dérivée logarithmique d'une des intégrales d'une équation linéaire du second ordre.*

Comme on sait, d'autre part, que toute intégrale d'une équation linéaire du second ordre rentre dans le type à deux constantes

$$C_1\,\varphi(x) + C_2\,\psi(x),$$

on voit que *toute intégrale d'une équation de Riccati est de la forme*

$$y = \frac{1}{X_0}\,\frac{\varphi'(x) + C\,\psi'(x)}{\varphi(x) + C\,\psi(x)} \qquad \left(C = \frac{C_2}{C_1}\right),$$

ce qui confirme et précise un énoncé antérieur (nº **2**, remarque I).

Il résulte évidemment de la relation (6) que, si l'on connaît une intégrale de l'équation de Riccati, on obtiendra l'intégrale correspondante de l'équation (7) par une quadrature.

Ajoutons que l'équation de Riccati peut être rattachée à l'équation du second ordre *d'une infinité de manières* : le procédé très particulier que nous venons d'indiquer est le plus simple et le plus direct.

II.

6. La forme de l'équation de Riccati n'est point altérée par certaines substitutions (changements de variable et de fonction) auxquelles on est conduit tout naturellement.

1º On voit en effet que l'équation

$$\text{(1)} \qquad \frac{dy}{dx} + X_0 y^2 + X_1 y + X_2 = 0$$

ne change pas de forme quand on effectue un changement de variable $x = x(\xi)$.

2° Il en est de même si l'on fait le changement de fonction

$$y = ru + s,$$

u étant la nouvelle fonction inconnue, r et s deux fonctions arbitrairement choisies de la variable indépendante.

3° Si, dans une équation de Riccati où la fonction inconnue est désignée par u, on fait le changement de fonction

$$u = \frac{1}{v},$$

on obtient encore pour v une équation de Riccati.

4° En conséquence, on peut, dans l'équation (1), poser

$$y = \frac{r}{v} + s;$$

la fonction v satisfera à une équation de même forme. On peut, dès lors, y faire le changement de fonction

$$v = pw + q,$$

où p et q sont deux fonctions arbitrairement choisies de la variable indépendante, et l'on aura encore, pour w, une équation de Riccati. Or, l'effet de ces deux substitutions successives est évidemment le même que celui de la substitution

$$y = \frac{r}{pw + q} + s = \frac{mw + n}{pw + q},$$

où m, n, p, q sont quatre fonctions arbitrairement choisies de la variable indépendante.

Rapprochant ce dernier résultat du premier, on conclut :

Une équation de Riccati, où la variable est x et la *fonction inconnue y, se change en une autre équation de Riccati quand on effectue la substitution*

$$x = x(\xi), \qquad y = \frac{m(x)w + n(x)}{p(x)w + q(x)},$$

où toutes les fonctions mises en évidence peuvent être choisies arbitrairement.

7. Ceci conduit à simplifier l'équation de Riccati, à lui donner une *forme canonique*. On choisit souvent comme telle la forme

$$(8) \qquad \frac{du}{d\xi} + u^2 = \mathrm{U}(\xi),$$

à laquelle on peut arriver de la manière suivante :

L'équation proposée

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + \mathrm{X}_0 y^2 + \mathrm{X}_1 y + \mathrm{X}_2 = 0$$

peut être écrite

$$\frac{dy}{\mathrm{X}_0\, dx} + \left(y + \frac{\mathrm{X}_1}{2\mathrm{X}_0}\right)^2 + \frac{4\mathrm{X}_0\mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1^2}{4\mathrm{X}_0^2} = 0.$$

On voit qu'elle prendra la forme (8) si l'on fait à la fois *un changement de fonction et un changement de variable* en posant

$$y + \frac{\mathrm{X}_1}{2\mathrm{X}_0} = u, \qquad \int \mathrm{X}_0\, dx = \xi.$$

Mais, quand on procède ainsi, il faut, pour calculer le second membre de l'équation (8), qu'on puisse exprimer x en fonction de ξ; or, on ne sait pas, en général, effectuer l'inversion de l'intégrale ξ.

C'est pourquoi nous indiquerons un autre moyen d'arriver à la forme canonique *par un simple change-*

ment de fonction : posons

$$y = \frac{1}{Au + B},$$

A et B étant deux fonctions de x que nous allons déterminer. L'équation transformée est

$$-A\frac{du}{dx} + A^2X_2u^2 + (2ABX_2 + AX_1 - A')u + B^2X_2 + BX_1 + X_0 - B' = 0.$$

Écrivons que u^2 et u' ont même coefficient; nous trouvons

$$A = -\frac{1}{X_2}.$$

Exprimons que l'équation ne contient pas de terme en u; il viendra

$$2ABX_2 + AX_1 - A' = 0.$$

Comme on connaît A, on tire de là

$$B = -\frac{1}{2}\left(\frac{X_1}{X_2} - \frac{X_2'}{X_2^2}\right).$$

En conséquence, *si, dans l'équation*

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + X_0y^2 + X_1y - X_2 = 0,$$

on fait le changement de fonction [1]

$$y = -\frac{X_2}{u + \frac{1}{2}\left(X_1 - \frac{X_2'}{X_2}\right)},$$

on obtient la forme canonique

$$(9) \qquad \frac{du}{dx} + u^2 = X(x).$$

---

[1] Ce procédé tombe en défaut si la fonction X_2 se réduit à zéro ; mais alors l'équation (11) est *linéaire* par rapport à $\frac{1}{y}$.

Enfin, si l'on pose

$$u = \frac{d \log t}{dx},$$

on arrive à l'équation du second ordre

$$(7)' \qquad \frac{d^2 t}{dx^2} - \mathrm{X} t = 0,$$

qui n'est autre chose que l'équation (7) où l'on a fait

$$\mathrm{X}_0 = 1, \qquad \mathrm{X}_1 = 0, \qquad \mathrm{X}_2 = - \mathrm{X}.$$

III.

8. Nous allons maintenant nous occuper de l'équation

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \mu x^m \qquad (\mu = \text{const.}),$$

qui est la seule que Riccati ait considérée. On peut réduire le coefficient μ à l'unité en multipliant x et y par des facteurs numériques convenables; l'hypothèse $\mu = 1$, que nous ferons désormais pour simplifier les calculs, n'est donc nullement restrictive.

Théorème. — *L'intégrale générale de l'équation*

$$(10) \qquad \frac{dy}{dx} + y^2 = x^m$$

s'exprime en termes finis, quand l'exposant m rentre dans l'un des deux types

$$-\frac{4k}{2k+1}, \quad -\frac{4k}{2k-1},$$

où k désigne un entier positif quelconque, y compris zéro.

La démonstration qui suit et que nous empruntons à

Cayley (*Philosophical Magazine*, 4ᵉ série, Vol. XXXVI) précisera ce qu'il faut entendre par les mots *en termes finis*.

Il sera commode d'écrire

$$m = 2n - 2.$$

Nous aurons alors à considérer l'équation

$$(11) \qquad \frac{dy}{dx} + y^2 = x^{2n-2},$$

et nous savons (nᵒˢ 5 et 7) que l'intégrale générale de cette équation est la dérivée logarithmique de l'intégrale générale de l'équation

$$(12) \qquad \frac{d^2 t}{dx^2} - x^{2n-2} t = 0.$$

Tout revient donc à intégrer celle-ci. Or, on vérifie immédiatement que, *quand n est une fraction irréductible à dénominateur impair*, si $f(x)$ est une intégrale, $f(-x)$ en est une autre, de sorte que l'intégrale générale de l'équation (11) est

$$(13) \qquad y = \frac{f'(x) - C f'(-x)}{f(x) + C f(-x)}.$$

Voici, maintenant, un moyen d'obtenir une intégrale particulière $f(x)$ de l'équation (12), où n est supposé différent de zéro (le cas $n = 0$ sera traité plus loin à part). Faisons

$$t = z e^{\frac{x^n}{n}},$$

ce qui transforme l'équation (12) en la suivante :

$$(14) \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} + 2x^{n-1} \frac{dz}{dx} + (n-1)x^{n-2} z = 0.$$

Cherchons à vérifier cette dernière équation par une série procédant suivant les puissances entières et positives de x^n, savoir

$$(15) \quad z = 1 + a_1 x^n + a_2 x^{2n} + \ldots + a_k x^{kn} + a_{k+1} x^{(k+1)n} + \ldots.$$

Si l'on substitue cette expression dans le premier membre de l'équation (14), on reconnaît immédiatement que toutes les puissances de x ont des exposants de la forme $rn - 2$ $(r = 1, 2, \ldots)$.

Égalant à zéro le coefficient de x^{n-2}, on trouve

$$a_1 = -\frac{1}{n}.$$

en supposant n différent de 1; dans l'hypothèse $n = 1$, l'équation (11) s'intègre par une quadrature.

Si l'on égale à zéro le coefficient de $x^{(k+1)n}$, on obtient la formule de récurrence très simple

$$(k+1)n\,[(k+1)n - 1]a_{k+1} + [(2k+1)n - 1]a_k = 0.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{1}{n},\\
a_2 &= -\frac{(3n-1)}{2n(2n-1)}a_1,\\
a_3 &= -\frac{(5n-1)}{3n(3n-1)}a_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_{k+1} &= -\frac{[(2k+1)n-1]}{(k+1)n\,[(k+1)n-1]}a_k,
\end{aligned}$$

et il suffit de multiplier ces égalités membre à membre pour trouver

$$a_{k+1} = (-1)^{k+1}\frac{(3n-1)(5n-1)\ldots[(2k+1)n-1]}{2n(2n-1)\,3n(3n-1)\ldots(k+1)n\,[(k+1)n-1]}.$$

On connaît donc l'expression générale des coefficients de la série (15).

D'autre part, on peut s'assurer que cette série est convergente, ses coefficients ayant été ainsi déterminés. Formons, en effet, le rapport de deux termes consécutifs

$$\frac{a_{k+1} x^{(k+1)n}}{a_k x^{kn}} = -\frac{[(2k+1)n-1]}{(k+1)n\,[(k+1)n-1]}\,x^n.$$

Quel que soit x, ce rapport tend vers zéro lorsque k augmente indéfiniment : la série (15) n'est donc pas seulement une solution *formelle,* mais bien une solution effective de l'équation (14). Si nous la représentons par $\varphi(x)$, l'intégrale générale de l'équation (14) sera

$$z = C_1\,\varphi(x)\,e^{\frac{x^n}{n}} + C_2\,\varphi(-x)\,e^{\frac{(-x)^n}{n}},$$

sous la condition que n soit une fraction irréductible de dénominateur impair.

Cherchons maintenant pour quelles valeurs de n la série (15) est limitée. Pour qu'elle se termine, il faut et il suffit que l'un de ses coefficients soit nul ; car, alors, en vertu de la loi de récurrence, tous les suivants seront nuls aussi.

Si l'on veut que le terme d'exposant kn soit le dernier, on devra poser $a_{k+1} = 0$, ce qui donne

$$n = \frac{1}{2k+1}.$$

Donc *la série* (15) *se termine et l'intégrale générale de l'équation* (11) *s'exprime en termes finis, quand n est l'inverse d'un entier positif impair.* En vertu de la relation

$$m = 2n - z,$$

la valeur correspondante de m est

$$m = -\frac{4k}{2k+1};$$

ce qui prouve la proposition énoncée pour l'une des séries de valeurs de l'exposant m.

Pour achever la démonstration, effectuons dans l'équation

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = x^m \tag{10}$$

la substitution

$$x = \frac{1}{\xi}, \qquad y = -\xi^2 u + \xi; \tag{16}$$

on obtient, par un calcul facile, l'équation

$$\frac{du}{d\xi} + u^2 = \xi^{-m-4}, \tag{17}$$

qui ne diffère de la proposée que par le changement de m en $-m-4$.

L'intégrale générale de cette dernière s'exprimera donc en termes finis quand on aura

$$-m-4 = -\frac{4h}{2h+1} \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots),$$

c'est-à-dire

$$m = -\frac{4(h+1)}{2h+1}.$$

Si l'on remplace h par $k-1$, on trouve la forme annoncée

$$m = -\frac{4k}{2k-1},$$

où k prend les valeurs $1, 2, 3, \ldots$. On peut même supposer $k=0$, puisqu'on retrouve alors $m=0$, cas d'intégrabilité déjà signalé.

En vertu des relations (16), il est évident que l'intégrale générale de l'équation (10) s'exprimera aussi en termes finis, par les produits de divers termes algébriques et de deux exponentielles.

Ajoutons que, d'après la formule (13), l'équation (10) admettra *deux intégrales algébriques,* celles qui répondent aux valeurs $C = 0$ et $C = \infty$.

Comme exemple, nous donnons ci-dessous les expressions de la fonction $f(x)$ qui correspondent dans cette formule (13) aux valeurs les plus simples de k.

$$1^\circ \quad m = -\frac{4k}{2k+1}:$$

$$k = 0, \qquad m = 0, \qquad f(x) = e^x,$$

$$k = 1, \qquad m = -\frac{4}{3}, \qquad f(x) = \left(1 - 3x^{\frac{1}{3}}\right) e^{3x^{\frac{1}{3}}},$$

$$k = 2, \qquad m = -\frac{8}{5}, \qquad f(x) = \left(1 - 5x^{\frac{1}{5}} + \frac{25}{3} x^{\frac{2}{5}}\right) e^{5x^{\frac{1}{5}}};$$

$$2^\circ \quad m = -\frac{4k}{4k-1}:$$

$$k = 1, \qquad m = -4, \qquad f(x) = x e^{-\frac{1}{x}},$$

$$k = 2, \qquad m = -\frac{8}{3}, \qquad f(x) = x\left(1 + 3x^{-\frac{1}{3}}\right) e^{-3x^{-\frac{1}{3}}}.$$

Le cas limite $k = \infty$ conduit, pour l'une et l'autre série des valeurs de m, à l'unique équation

$$(18) \qquad \frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{1}{x^2},$$

qui reste en dehors de notre analyse. Mais on aperçoit immédiatement les *deux* solutions

$$y_1 = \frac{r_1}{x}, \qquad y_2 = \frac{r_2}{x},$$

r_1 et r_2 étant les racines de l'équation $r^2 - r - 1 = 0$, savoir

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Appliquant à ces deux solutions le théorème de Minding (n° 3), on trouve

$$\frac{2xy-(1+\sqrt{5})}{2xy-(1-\sqrt{5})}x^{\sqrt{5}} = \text{const.}$$

pour intégrale générale de l'équation (18). On pourrait aussi faire usage de l'équation (12), qui est ici

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{t}{x^2},$$

et admet visiblement pour intégrale générale

$$C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}.$$

[L¹17d]

SUR UNE FIGURE DE L'ESPACE DÉDUITE DES POLYGONES DE PONCELET;

Par M. G. FONTENÉ.

1. Soient S et S′ deux quadriques admettant *abcd* pour tétraèdre conjugué commun, et représentées par les équations

$$\begin{gathered}Ax^2+By^2+Cz^2+t^2=0,\\ A'x^2+B'y^2+C'z^2+t^2=0.\end{gathered}$$

Désignons par Σ une quadrique circonscrite à S, de sorte que le plan de contact passe par *d* : son équation pourra s'écrire :

$$\begin{gathered}Ax^2+By^2+Cz^2+t^2\\ +(\lambda x\sqrt{A-A'}+\mu y\sqrt{B-B'}+\nu z\sqrt{C-C'})^2=0;\end{gathered}$$

cette quadrique Σ coupe la quadrique S' suivant une courbe située sur le cône d'équation

$$(A - A')x^2 + (B - B')y^2 + (C - C')z^2$$
$$+ (\lambda x \sqrt{A - A'} + \mu y \sqrt{B - B'} + \nu z \sqrt{C - C'})^2 = 0,$$

cône de sommet d. Ce cône se décomposera en deux plans si l'on a

$$\begin{vmatrix} 1 + \lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\nu \\ \mu\lambda & 1 + \mu^2 & \mu\nu \\ \nu\lambda & \nu\mu & 1 + \nu^2 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 1 = 0, \tag{1}$$

et ces deux plans auront alors pour équations

$$x\sqrt{A - A'}(1 + \lambda^2) + y\sqrt{B - B'}(\lambda\mu \pm \nu)$$
$$+ z\sqrt{C - C'}(\lambda\nu \mp \mu) = 0.$$

Ces plans, qui paraissent dépendre de deux paramètres λ et μ, sont néanmoins tangents à un cône fixe; en effet, leurs coordonnées sont

$$u = \sqrt{A - A'}(1 + \lambda^2),$$
$$v = \sqrt{B - B'}(\lambda\mu \pm \nu),$$
$$w = \sqrt{C - C'}(\lambda\nu \mp \mu),$$

ce qui donne, en tenant compte de la relation (1),

$$\frac{u^2}{A - A'} + \frac{v^2}{B - B'} + \frac{w^2}{C - C'} = 0;$$

on voit donc que : *Si Σ est bitangente à* S', *les plans de leurs courbes communes touchent le cône* D, *de* *sommet d, qui passe par l'intersection des quadriques* S *et* S′ [1].

Désignons de même par Σ' une quadrique circonscrite à S′, le pôle du plan de contact étant dans le plan *abc* ou, ce qui revient au même, ce plan passant encore en *d*. En transformant le résultat précédent par dualité, on voit que : *Si* Σ' *est bitangente à* S, *les sommets des deux cônes circonscrits à la fois à ces quadriques appartiennent à la conique d du plan* ABC, *qui touche les plans tangents communs à* S *et* S′.

2. Supposons maintenant que Σ soit un cône bitangent à S′; il coupera S′ suivant deux coniques dont le plan sera tangent au cône D; chacune de ces deux coniques peut donc être considérée comme une des quadriques Σ' envisagées précédemment, et il en résulte que le sommet de Σ est sur *d*. Ainsi donc :

Si l'on prend un point quelconque sur d et un plan tangent à D, *le point est le sommet d'un cône* Σ *circonscrit à* S, *et le plan coupe* S′ *suivant une conique* Σ' : *sous une condition unique, le cône* Σ *passe par la conique* Σ', *et il existe évidemment entre le sommet de* Σ *et le plan de* Σ' *une correspondance doublement quadratique.*

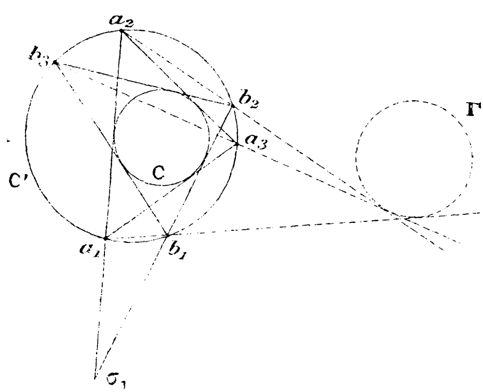
3. Représentons sur le plan *abc* les traces C, C′ et Γ des quadriques S, S′ et du cône D. Soit Σ'_1 une conique de S′, dont le plan touche le cône D; elle coupe

---

[1] Ce théorème résulte immédiatement de ce que les plans qui coupent deux quadriques suivant des coniques bitangentes touchent un cône de leur faisceau ponctuel.

Remarque analogue pour le théorème corrélatif. (E. D.)

le plan abc en deux points a_1 et b_1 de C' tels que la droite $a_1 b_1$ touche Γ. Par cettte conique il passe, d'après ce qui précède, deux cônes circonscrits à S, et dont les sommets sont sur la conique d; soit σ_1 le sommet de l'un de ces cônes : les droites $\sigma_1 a_1$ et $\sigma_1 b_1$ toucheront la conique C. Ce cône coupera S' suivant une autre conique Σ'_2, dont le plan aura pour trace la droite $a_2 b_2$, a_2 et b_2 étant les points où les droites $\sigma_1 a_1$ et $\sigma_1 b_1$ coupent à nouveau C'. Par Σ'_2 passe un second cône Σ_2, circonscrit à S, qui coupe S' suivant une autre



conique Σ'_3, les traces a_3 et b_3 de celle-ci s'obtenant en prenant les points où C' coupe les tangentes qu'on peut encore amener à C par les points a_2 et b_2, et ainsi de suite.

S'il existe des polygones de n côtés inscrits à C' et circonscrits à C, la droite $a_n b_n$ viendra coïncider avec $a_1 b_1$. (Dans la figure on suppose $n = 3$.)

On a donc le théorème suivant :

Soit Σ'_1 une conique de S', *dont le plan touche le cône* D, *et Σ_1 l'un des deux cônes circonscrits à* S *qu'on* *peut mener par cette conique; il coupe S′ suivant une autre conique Σ'_2; par Σ'_2 passe un second cône, Σ_2, circonscrit à S, et qui coupe S′ suivant une autre conique Σ'_3, et ainsi de suite. S'il existe des polygones de n côtés inscrits à la conique C′ et circonscrits à la conique C (C et C′ étant les traces de S et S′ sur le plan abc), le cône Σ_n vient passer par la conique initiale Σ'_1.*

[H4j]

FORMULES POUR L'INTÉGRATION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES;

PAR M. A. GARBASSO,

Privat docent de Physique à l'Université de Turin.

On donne un système de $n+1$ équations qui renferment, sous un forme linéaire et homogène, $n+1$ fonctions et leurs dérivées par rapport à une variable x, jusqu'à l'ordre s.

Nous appellerons

$$y_1,\quad y_2,\quad \ldots,\quad y_\nu,\quad \ldots,\quad y_n \quad \text{et} \quad z$$

les fonction inconnues, et désignerons par

$$a_{\mu,\nu},\quad b_{\mu,\nu,\sigma},\quad c_\mu \quad \text{et} \quad d_{\mu,\sigma}$$

des quantités constantes. Les équations proposées pourront s'écrire sous la forme :

$$(1)\quad \sum_1^n{}^{\nu} a_{\mu,\nu} y_\nu + \sum_1^n{}^{\nu} \sum_1^s{}^{\sigma} b_{\mu,\nu,\sigma} \frac{d^\sigma y_\nu}{dx^\sigma} + c_\mu z + \sum_1^s{}^{\sigma} d_{\mu,\sigma} \frac{d^\sigma z}{dx^\sigma} = 0$$

$$[\mu = 1, 2, \ldots, (n+1)].$$

Nous posons maintenant, pour abréger,

$$\frac{d}{dx} = \mathrm{D}$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^\sigma}{dx^\sigma} = \mathrm{D}^\sigma.$$

Si l'on introduit encore les définitions

$$a_{\mu,\nu} + \sum_1^s {}^\sigma\, b_{\mu,\nu\sigma}\,\mathrm{D}^\sigma = \mathrm{A}_{\mu,\nu},$$

$$c_\mu \quad + \sum_1^s {}^\sigma\, b_{\mu,\sigma}\,\mathrm{D}^\sigma = \mathrm{B}_\mu,$$

les équations (1) prendront la forme simple

$$(1') \qquad \sum_1^n {}^\nu\, \mathrm{A}_{\mu,\nu}\, y_\nu + \mathrm{B}_\mu z = 0.$$

Ce sont là $n+1$ équations algébriques et linéaires pour les y_ν. On en tire :

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{1,2} & \dots & \mathrm{A}_{1,\nu-1} & \mathrm{A}_{1,\nu} & \mathrm{A}_{1,\nu+1} & \dots & \mathrm{A}_{1,n} & \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{A}_{2,2} & \dots & \mathrm{A}_{2,\nu-1} & \mathrm{A}_{2,\nu} & \mathrm{A}_{2,\nu+1} & \dots & \mathrm{A}_{2,n} & \mathrm{B}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{A}_{\mu,1} & \mathrm{A}_{\mu,2} & \dots & \mathrm{A}_{\mu,\nu-1} & \mathrm{A}_{\mu,\nu} & \mathrm{A}_{\mu,\nu+1} & \dots & \mathrm{A}_{\mu,n} & \mathrm{B}_\mu \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{A}_{n+1,1} & \mathrm{A}_{n+1,2} & \dots & \mathrm{A}_{n+1,\nu-1} & \mathrm{A}_{n+1,\nu} & \mathrm{A}_{n+1,\nu+1} & \dots & \mathrm{A}_{n+1,n} & \mathrm{B}_{n+1} \end{vmatrix} z = 0.$$

et il en suit :

$$(3) \qquad z = \sum_1^p {}^\pi\, \mathrm{C}_\pi e^{c_\pi x}. \qquad [p = s(n+1)].$$

Dans la formule (3) les C_π sont des constantes arbitraires, et les c_π doivent se déterminer comme racines de l'équation (2), alors qu'on regarde dans cette dernière la lettre D non pas comme le symbole d'une opération, mais bien comme une inconnue.

Cela posé, nous allons considérer les n premières des équations (1') et les résoudre comme des équations algébriques entre les y_ν.

Il s'en tire :

$$y_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\Delta}\begin{vmatrix} B_1 & A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,\nu-1} & A_{1,\nu+1} & \ldots & A_{1,n} \\ B_2 & A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,\nu-1} & A_{2,\nu+1} & \ldots & A_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_\mu & A_{\mu,1} & A_{\mu,2} & \ldots & A_{\mu,\nu-1} & A_{\mu,\nu+1} & \ldots & A_{\mu,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_n & A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,\nu-1} & A_{n,\nu+1} & \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix} z,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{\mu,1} & \ldots & A_{\mu,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix}$$

ou, en substituant à z sa valeur (3),

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & y_\nu = (-1)^\nu \sum_1^p{}_\pi \frac{C_\pi e^{c_\pi x}}{\Delta(c_\pi)} \\ & \times \begin{vmatrix} B_1(c_\pi) & A_{1,1}(c_\pi) & \ldots & A_{1,\nu-1}(c_\pi) & A_{1,\nu+1}(c_\pi) & \ldots & A_{1,n}(c_\pi) \\ B_2(c_\pi) & A_{2,1}(c_\pi) & \ldots & A_{2,\nu-1}(c_\pi) & A_{2,\nu+1}(c_\pi) & \ldots & A_{2,n}(c_\pi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_\mu(c_\pi) & A_{\mu,1}(c_\pi) & \ldots & A_{\mu,\nu-1}(c_\pi) & A_{\mu,\nu+1}(c_\pi) & \ldots & A_{\mu,n}(c_\pi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_n(c_\pi) & A_{n,1}(c_\pi) & \ldots & A_{n,\nu-1}(c_\pi) & A_{n,\nu+1}(c_\pi) & \ldots & A_{n,n}(c_\pi) \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Par les notations $\Delta(c_\pi)$, $B_\mu(c_\pi)$ et $A_{\mu,\nu}(c_\pi)$ on veut indiquer que dans les $A_{\mu,\nu}$ et B_μ il faut substituer, à tour de rôle, à la place de D les racines c_π.

Les formules (3) et (4) donnent les intégrales cherchées.

Pour la détermination des constantes C_π, il faudra donner les valeurs initiales des y_ν, de z et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $(s - 1)$.

[K23a]

REPRÉSENTATION DES OBJETS AU MOYEN DE DEUX PERSPECTIVES SUR UN MÊME TABLEAU;

Par M. E. BAUDRAN,
Capitaine du Génie.

1. Une perspective ne permet pas de définir géométriquement un objet; parmi les systèmes que l'on peut employer pour compléter cette définition nous choisissons le suivant qui correspond aux vues stéréoscopiques :

Un corps sera représenté par ses perspectives sur un même tableau au moyen de deux points de vue différents.

2. Les deux points de vue $[O][O']$ seront définis par leurs projections orthogonales sur le tableau O, O' et leurs distances d, d' au tableau $(d < d')$ (*fig.* 1).

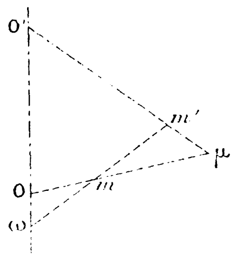
Nous appellerons *point de rappel* le point ω où la droite $[O][O']$ perce le tableau $\left(\dfrac{\omega O}{\omega O'} = \dfrac{d}{d'}\right)$ et *ligne de rappel* une droite du tableau passant par ω.

Nous désignerons une figure de l'espace par des lettres entre crochets $[a, A, \ldots]$; sa perspective par rapport à $[O]$ ou *perspective première* par les mêmes lettres sans crochets : a, A, ...; sa perspective par rapport à $[O']$ ou *perspective seconde* par les mêmes lettres accentuées : a', A', ...

3. *Les deux perspectives d'un point de l'espace sont sur une même ligne de rappel et réciproquement.*

Si (*fig.* 1) *m et m' sont les perspectives d'un même*

Fig. 1.



point [*m*] *de l'espace, les droites* O*m*, O'*m'* *se coupent en un point* μ *projection orthogonale du point* [*m*] *sur le tableau.*

4. *Deux droites quelconques du tableau* A, A' *représentent généralement les perspectives d'une même droite de l'espace et réciproquement.*

Deux droites parallèles sont les perspectives d'une frontale et réciproquement.

Remarque. — Lorsque, dans ce dernier cas, les deux plans [O]A, [O']A' sont parallèles, la droite [A] est rejetée à l'infini ou, ce qui revient au même, A et A' sont les lignes de fuite d'un même plan.

5. Trace d'une droite. — *La trace d'une droite sur le tableau est l'intersection de ses deux perspectives.*

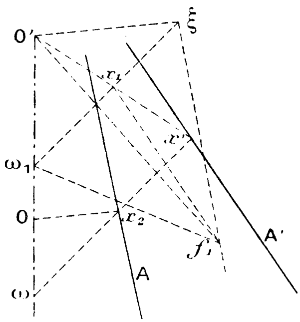
6. Problème I. — *Trouver les points de fuite d'une droite.*

Les deux points cherchés f, f' sont tels que Of, O'f' sont parallèles et doivent être sur une même ligne de rappel. On mènera une ligne de rappel quelconque $\omega x'$ coupant A′ en x', la parallèle Ox à $O'x'$ coupe $\omega x'$ en x.

Le point f est à l'intersection de A et de la parallèle à A′ menée par x; il se rappelle en f' sur A′.

Lorsque f et f' sortent des limites de l'épure on détermine facilement la direction Of, $O'f'$. Pour cela (*fig.* 2),

Fig. 2.



sur $O'x'$ on prend un point quelconque x, on mène $x\xi$ et $O'\xi$ parallèles à $\omega x'$ et $O'x_2$. Puis ξf_1 et $x_1 f_1$ parallèles à A et A′, $O'f_1$ est la direction cherchée. Cela résulte de l'homothétie de la figure ainsi construite et de la précédente ([1]).

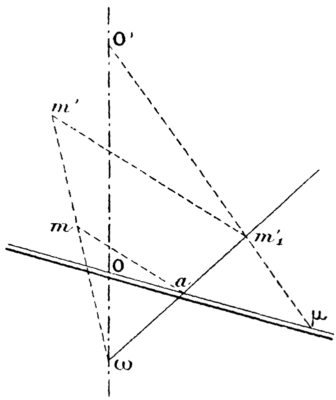
7. Problème II. — *Mener par un point une parallèle à une droite.*

Il suffit de joindre les perspectives du point aux points de fuite de la droite. Si ces points sont en dehors des limites de l'épure, on déduira très facilement de la construction indiquée au Paragraphe précédent une construction inverse résolvant le problème.

([1]) ξx_1 coupe OO_1 en ω_1 et $\omega_1 f_1$ est parallèle à ωf.

8. Proposons-nous de déterminer la profondeur d'un point m, m'. Imaginons une droite passant par [O]; sa perspective première est un point a (*fig.* 3) et sa

Fig. 3.



perspective seconde la droite ωa. Joignons le point $[m]$ au point de même profondeur $[m_1]$ de la droite $[Oa]$. La droite $[mm_1]$ est une frontale, et ses perspectives ma, $m'm'_1$ sont parallèles. La droite $O'm'_1$ coupe Oa en μ projection orthogonale de $[m_1]$, et l'on a en grandeur et en signe

$$\frac{a\mu}{aO} = \frac{p}{d}.$$

Si donc on prend $aO = d$ on a une certaine échelle numérique $\frac{1}{N}$; on mesurera ainsi en $a\mu$ la profondeur p à l'échelle $\frac{1}{N}$. On pourra prendre pour N telle valeur que l'on voudra, par exemple celle de l'échelle de la figure géométrale qui définit l'objet ou celle d'un plan de front quelconque.

La droite Oa constitue donc une véritable échelle de profondeur qui permet de résoudre tous les problèmes relatifs aux profondeurs.

9. *Deux droites se couperont et par suite définiront un plan lorsque les points de rencontre de leurs perspectives de même nom seront sur une même ligne de rappel.*

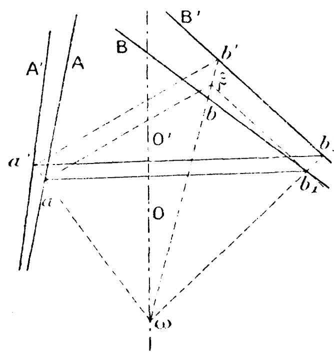
10. *La trace d'un plan est la droite qui joint les traces de deux droites du plan.*

11. Problème. — *Mener par un point d'un plan la frontale de ce plan.*

Si les traces des droites définissant le plan sont dans le tableau, on aura de suite la trace du plan et par suite la direction de la frontale.

Supposons (*fig.* 4) qu'il n'en soit pas ainsi. Par le

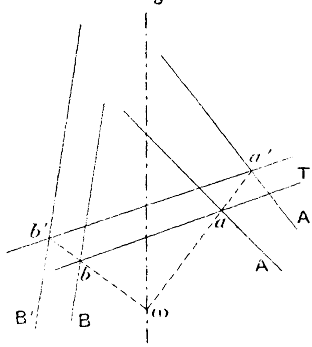
Fig. 4.



point a, a' de (A) menons une frontale quelconque dont la perspective seconde coupe B' au point b'. Par le point $b'\beta$ de cette frontale menons-en une autre B', βb, qui coupe [B] au point $b_1 b'_1$. Les trois points aa', $b'\beta$, $b_1 b'_1$ sont dans un même plan de front, donc ab, $a'b'$ est la frontale cherchée.

12. Problème. — *Trouver l'intersection d'un plan* [AB] *et d'un plan fuyant* (*fig.* 5).

Fig. 5.



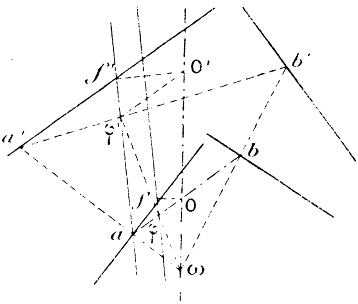
Supposons le plan fuyant déterminé par sa trace T et passant par [O]. Les perspectives premières de tous ces points sont sur T; donc a, b sont celles des points où il coupe [A] [B], par suite l'intersection est ab, $a'b'$.

13. Problème. — *Trouver les lignes de fuite d'un plan.*

Coupons le plan [AB] par un plan debout passant par [O] et de trace Oab, l'intersection des deux plans sera ab, $a'b'$. Le point de fuite de cette droite $\varphi\varphi'$ s'obtiendra en menant $O'\varphi'$ parallèle à Oa. On mènera ensuite par φ et φ' des parallèles aux frontales. Si celles-ci ne sont pas connues on déterminera par la même méthode un second point des lignes de fuite du plan.

Les pieds ff' des perpendiculaires abaissées de O et O′ (*fig.* 6) sur les lignes de fuite sont les points de fuite des droites du plan perpendiculaires aux frontales,

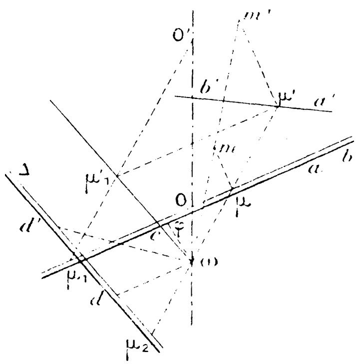
Fig. 6.



droites que, par analogie, nous appellerons *lignes de plus grande pente du plan.*

14. *Échelles de pente d'un plan* (*fig.* 7). — Pour avoir la profondeur d'un point $[m]$ d'un plan, il suffit

Fig. 7.



de prendre celle d'un point quelconque de la frontale qui passe par $[m]$, par exemple le point $[\mu]$ qui se trouve sur la droite Oab, $a'b'$ intersection du plan donné et d'un plan debout passant par [O]. Et il suffira de prendre pour échelle de profondeur O*a* avec une origine *c* quelconque.

Les faisceaux $O'\mu'_1\mu_1$ et $O\mu\mu'$ sont homographiques, il existe donc une direction de droites Δ telles que les rayons $O\mu$ interceptent sur elles des segments proportionnels à $C\mu_1$, c'est-à-dire à la profondeur du point $[\mu]$.

Pour déterminer une de ces droites Δ, il suffit de remarquer que, si φ est le point de fuite de $[ab]$, son homologue sur Δ doit être à l'infini. Donc Δ est parallèle à $\omega\varphi$, direction toujours connue. Les lignes de rappel des points situés aux profondeurs d et d' sur $[ab]$ sont respectivement parallèles à ab et $a'b'$. Pour avoir Δ il suffira donc de placer entre ces deux droites un segment parallèle à $\omega\varphi$ et égal à $\frac{d-d'}{N}$, $\frac{1}{N}$ étant l'échelle numérique. Cette échelle étant graduée, on aura la profondeur du point μ en le projetant avec ω comme centre en μ_2 sur Δ.

On voit que cette droite Δ jointe à ab définit le plan comme il l'est en Géométrie cotée, au moyen de son échelle de pente, c'est pourquoi nous avons donné ce nom à Δ jointe à ab, $a'b'$.

Remarque. — Cette échelle permet de construire, très simplement, la perspective d'une figure, connaissant les coordonnées de ces points par rapport à deux axes du plan, l'un étant une frontale, l'autre coordonnée étant en effet égale à la profondeur multipliée par une constante.

15. Les éléments que nous savons déjà déterminer sont suffisants pour effectuer les rabattements sur un plan de front; nous allons traiter cette question directement.

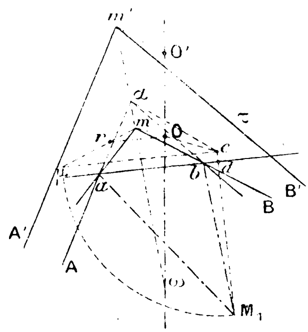
16. On sait que les éléments du rabattement sont le point de fuite des lignes de plus grande pente et le point de fuite des cordes de l'arc que, pour abréger le langage, nous appellerons *point de rabattement du plan,* et nous les désignerons par φ et r.

La connaissance de l'un entraîne celle de l'autre, r est le rabattement de [O] dans le plan de fuite du plan considéré.

Le rabattement autour d'une frontale, sur un plan de front, ayant deux perspectives semblables, il suffit d'en construire une.

17. Proposons-nous de rabattre le point [m], intersection des droites [A][B] autour d'une frontale de leur plan (*fig.* 8). Au moyen des parallèles $a\alpha$, αb à A' et B'

Fig. 8.



nous déterminons la frontale du point [a] dans le plan [AB]. En menant αc parallèle à O'm' nous avons le point de la droite debout Om, O'm', qui a même profondeur que [a], c'est-à-dire le pied de la perpendiculaire abaissée de m sur le plan de front de ab. Le point m devra donc se rabattre sur la perpendiculaire de cd à ad. Pour avoir la distance de [d] à [m], rabattons le plan debout $[mcd]$ autour de sa frontale $[cd]$. $[m]$ vient en μ, intersection de la perpendiculaire $c\mu$ à cd et de mr, r étant le point de rabattement du plan debout ($Or = d$), en prenant $dM_1 = d\mu$ on a le rabattement de M.

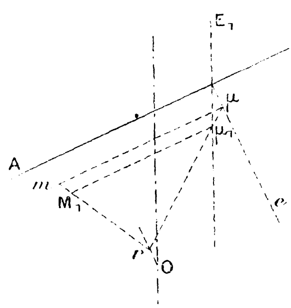
Si l'on joint $M_1 a$, $M_1 b$, nous avons en $aM_1 b$ l'angle des deux droites $[A][B]$.

La perpendiculaire menée de O sur ab coupe les droites md, mM, aux points φ et R.

18. Un point étant rabattu et par suite une droite du plan, on en déduit facilement, au moyen de l'un des points r ou φ, les rabattements de tous les points du plan.

Nous avons indiqué (*fig.* 9) comment, au moyen du

Fig. 9.



point r du rabattement E_1 d'une droite e et de frontales, on peut rabattre tous les points du plan. On verrait facilement que l'on pourrait transformer cette droite en une échelle graduée correspondant au plan.

19. Les éléments que nous venons de déterminer, soit les distances à des plans de front, soit ceux nécessaires pour effectuer les rabattements, permettent d'effectuer toutes les constructions nécessaires pour déterminer les grandeurs des droites et les angles, mener des perpendiculaires, etc. Ces constructions, une fois les éléments précédents déterminés, constituent les constructions directes énoncées dans tous les Traités de Perspective, ou de simples problèmes sur celles-ci; nous ne les traiterons donc pas, nous contentant d'avoir montré que l'on pourrait, au moyen de vues stéréoscopiques, reconstituer très facilement les objets représentés.

[R8a]

MOUVEMENT INITIAL D'UN SOLIDE INVARIABLE;

PAR M. R. GILBERT.

Soit S un solide invariable soumis à des forces quelconques F_1, F_2, ..., F_n. En supposant ce corps primitivement au repos, quelle sera la nature de son mouvement initial?

1° Les forces se réduisent à une seule, F, qui passe au centre de gravité, G, du solide. Cette force F agissant sur un corps de masse M peut se décomposer en forces, f, appliquées aux différents points, de masse m, du corps solide.

L'accélération, γ, du point m, due à la force f est

$$\gamma = \frac{f}{m} = \frac{F}{M} \text{ const.}$$

Le mouvement élémentaire est donc une translation parallèle à F, et, si dv est la vitesse élémentaire de translation,

$$dv = \frac{F}{M} dt. \tag{1}$$

2° Les forces se réduisent à une seule, F, qui ne passe pas au centre de gravité. On peut ajouter au système les forces F_1, $-F_1$ égales à F appliquées en G. L'action de F_1 est une translation élémentaire parallèle à F. L'action du couple $(F, -F_1)$ est une rotation élémentaire $d\omega$, autour d'un axe passant en G, perpendiculaire au plan, H, du couple. La translation et la rotation étant normales peuvent se composer pour donner une rotation instantanée normale au plan H. Soit O le point où l'axe instantané coupe ce plan, et x la distance OG : les points O et G sont sur une perpendiculaire à F puisque le déplacement initial de G est parallèle à F et le point O et la force F sont de part et d'autre de G.

D'ailleurs, O étant fixe à un infiniment petit du second ordre près, on a

$$dv = x\, d\omega. \tag{2}$$

Désignons par δ la distance du point G à la force F, par K le rayon de giration autour d'un axe passant par G et normal à H. Le théorème des moments des quantités de mouvement dans le mouvement relatif autour du centre de gravité donne

$$MK^2 \frac{d\omega}{dt} = F\delta. \tag{3}$$

Des équations (1), (2), (3) on tire

$$x = \frac{K^2}{\delta};$$

l'axe instantané est indépendant de la grandeur de F.

3° Le système des forces est quelconque. Il peut être ramené à un système équivalent de deux forces orthogonales F_1, F_2, la première passant en G. Si F_1 ou F_2 sont nulles, on est ramené à un cas précédent. Sinon la rotation élémentaire due à F_2 et la translation élémentaire due à F_1 ne se composent pas en une rotation ou une translation uniques. Le mouvement élémentaire est hélicoïdal.

La force F_2 donne comme ci-dessus (2°) l'axe du mouvement, et la force F_1 la translation élémentaire parallèle.

On peut, comme exemple, trouver l'axe initial de virage d'un bateau donné.

[O51α]

NOTE SUR LA COURBURE DES LIGNES GÉODÉSIQUES D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION;

PAR M. SOLON CHASSIOTIS.

M. H. Resal a étendu le théorème de Gudermann sur l'ellipsoïde aux autres surfaces du second degré de révolution. (*Nouv. Annales*, 1887, p. 57, et M. APPELL, *Mécanique*, t. I, p. 498, où cette question est proposée comme exercice.)

Nous allons chercher toutes les surfaces de révolution pour lesquelles, le long de toute géodésique, le rapport du rayon de courbure de la méridienne à celui de cette géodésique reste constant.

Soient

R et R′ les rayons de courbure principaux en un point M de la surface de révolution;

x le rayon du parallèle correspondant;
i l'inclinaison de la ligne géodésique considérée sur la méridienne;
ρ son rayon de courbure;
K la valeur constante du produit $r \sin i$ le long de la ligne géodésique considérée.

Posons

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{f(x)};$$

la formule

$$\frac{x^2}{R} + \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) K^2 = \frac{x^2}{\rho}$$

de M. Resal devient

$$(1) \qquad \frac{\rho}{R} = \frac{x^2}{x^2 - K^2 + K^2 f(x)}.$$

Pour que

$$\frac{\rho}{R} = C,$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$f(x) = 1 + \mu x^2,$$

où

$$(2) \qquad \mu = \frac{1}{K^2}\left(\frac{1}{C_0} - 1\right).$$

Comme la surface est de révolution, on a

$$R' = N,$$

N étant la normale à la méridienne jusqu'à l'axe de la surface; par suite, on a, en remplaçant R, N par leurs valeurs,

$$(3) \qquad \frac{y''}{y'(1 + y'^2)} = \frac{1}{x(1 + \mu x^2)}$$

ou

$$\frac{y''}{y'} - \frac{y'y''}{1+y'^2} = \frac{1}{x} - \frac{\mu x}{1+\mu x^2}$$

et, en intégrant une première fois, on a, en passant des logarithmes aux nombres,

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\sqrt{C_1}\,x}{\sqrt{1+\mu x^2}},$$

qui peut s'écrire

$$y' = \frac{2\sqrt{C_1}\,x}{2\sqrt{1+(\mu-C_1)x^2}},$$

d'où

$$y = \frac{\sqrt{C_1}}{(\mu - C_1)}\sqrt{1+(\mu-C_1)x^2} + C_0.$$

L'équation de la méridienne est donc celle d'une conique ayant pour axe l'axe de la surface, par suite :

Les seules surfaces de révolution pour lesquelles reste constant le long d'une géodésique le rapport des rayons de courbure de cette géodésique et de la méridienne sont des surfaces du second degré.

C'est la réciproque du théorème déjà cité.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1505.

1884, p. 447.)

De chaque point M *du cercle circonscrit à un triangle, on abaisse une perpendiculaire* MP *sur la droite de Simpson relative à ce point et à ce triangle; on demande :*

1° *Le lieu du pied* P *de cette perpendiculaire;*
2° *L'enveloppe de la droite* MP. (D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. H. Lez.

Prenant le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC pour origine des coordonnées, un point quelconque M de ce cercle pourra être représenté par

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi;$$

si α, β, γ sont les angles que les rayons OA, OB, OC font avec l'axe des X, les sommets du triangle auront des coordonnées analogues.

Choisissant l'axe des X de manière que $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, nous trouverons que les côtés du triangle ABC ont pour équations :

(1) AB..... $y\sin\frac{\gamma}{2} - x\cos\frac{\gamma}{2} = R\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$,

(2) AC..... $y\sin\frac{\beta}{2} - x\cos\frac{\beta}{2} = R\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)$,

(3) BC..... $y\sin\frac{\alpha}{2} - x\cos\frac{\alpha}{2} = R\cos\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)$.

Les hauteurs du même triangle étant représentées :

Pour le sommet A par $y\cos\frac{\alpha}{2} + x\sin\frac{\alpha}{2} = R\sin\frac{3\alpha}{2}$,

» B » $y\cos\frac{\beta}{2} + x\sin\frac{\beta}{2} = R\sin\frac{3\beta}{2}$,

» C » $y\cos\frac{\gamma}{2} + x\sin\frac{\gamma}{2} = R\sin\frac{3\gamma}{2}$,

l'orthocentre aura pour coordonnées :

$$\begin{aligned} x &= R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \\ &= -R\left(1 + 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right) = 2n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \\ &= 4R\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) = 2m. \end{aligned}$$

Mais les perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés du triangle ont pour équations

$$(4)\qquad \text{Sur AB}\ldots\ldots\quad y\cos\frac{\gamma}{2}+x\sin\frac{\gamma}{2}=\mathrm{R}\sin\left(\varphi+\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$(5)\qquad \text{» AC}\ldots\ldots\quad y\cos\frac{\beta}{2}+x\sin\frac{\beta}{2}=\mathrm{R}\sin\left(\varphi+\frac{\beta}{2}\right),$$

$$(6)\qquad \text{» BC}\ldots\ldots\quad y\cos\frac{\alpha}{2}+x\sin\frac{\alpha}{2}=\mathrm{R}\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Or, une droite passant par l'intersection des droites (1) et (4) aura pour équation :

$$-x\cos\frac{\gamma}{2}+y\sin\frac{\gamma}{2}-\mathrm{R}\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$
$$+\mathrm{K}\left[x\sin\frac{\gamma}{2}+y\cos\frac{\gamma}{2}-\mathrm{R}\sin\left(\varphi+\frac{\gamma}{2}\right)\right]=0;$$

l'équation de celle qui passe par l'intersection des droites (2) et (5) sera de même

$$-x\cos\frac{\beta}{2}+y\sin\frac{\beta}{2}-\mathrm{R}\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)$$
$$+\mathrm{K}'\left[x\sin\frac{\beta}{2}+y\cos\frac{\beta}{2}-\mathrm{R}\sin\left(\varphi+\frac{\beta}{2}\right)\right]=0.$$

Quand ces deux équations sont identiques, elles représentent la droite de Simpson; pour

$$\mathrm{K}=\cos\frac{\gamma-\varphi}{2}:\sin\frac{\gamma-\varphi}{2}$$

et

$$\mathrm{K}'=\cos\frac{\beta-\varphi}{2}:\sin\frac{\beta-\varphi}{2},$$

ce résultat est obtenu et, après réductions, nous avons pour l'équation de la pédale :

$$x\sin\frac{\varphi}{2}+y\cos\frac{\varphi}{2}$$
$$=\mathrm{R}\left(\begin{array}{r}\frac{1}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\\ -2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\end{array}\right)$$

que nous pouvons écrire sous la forme

$$\sin\frac{\varphi}{2}\left(x+\frac{R}{2}+2R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$+\cos\frac{\varphi}{2}\left(y-2R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{R}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}$$

ou

$$(7)\qquad (x-n)\sin\frac{\varphi}{2}+(y-m)\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{R}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}.$$

De plus, une perpendiculaire abaissée du point M sur la droite de Simpson a pour équation

$$y-R\sin\varphi=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}(x-R\cos\varphi)$$

ou

$$(8)\qquad -y\sin\frac{\varphi}{2}+x\cos\frac{\varphi}{2}=R\cos\frac{3\varphi}{2}.$$

En éliminant la variable φ entre les équations (7) et (8), nous aurions le lieu du point de rencontre cherché. Comme nous le verrons plus loin, l'équation de ce lieu est assez compliquée et il est plus simple d'avoir recours aux coordonnées du point de rencontre P; elles permettront de construire la courbe par points. Ces coordonnées sont :

$$(9)\qquad x=\frac{n}{2}(1-\cos\varphi)+\frac{m}{2}\sin\varphi+\frac{R}{4}(2\cos^2\varphi+3\cos\varphi-1)=0,$$

$$(10)\qquad y=\frac{n}{2}\sin\varphi+\frac{m}{2}(1-\cos\varphi)+\frac{R}{4}\sin\varphi(3-2\cos\varphi)\qquad=0.$$

Donnant à φ les valeurs ci-après, nous aurons quelques points remarquables de la courbe, savoir :

1° $\varphi=0$, $\sin\varphi=0$, $\cos\varphi=1$, $x=R$, $y=m$;

2° $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\quad\sin\varphi=1$, $\quad\cos\varphi=0$, $\quad x=\frac{m+n}{2}+\frac{R}{4}$,
$y=\frac{m+n}{2}+\frac{3R}{4}$;

3° $\varphi = \pi$, $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = -1$, $x = \frac{2n - R}{2}$, $y = 0$;

4° $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, $\sin\varphi = -1$, $\cos\varphi = 0$, $x = \frac{n - m}{2} - \frac{R}{4}$,
$y = \frac{m - n}{2} - \frac{3R}{2}$.

Mettons les équations (9) et (10) sous la forme

$$x = \frac{R}{4}\left\{\begin{array}{l} 2\cos^2\varphi - 1 - \cos(\alpha + \varphi) + \cos\alpha + 3\cos\varphi \\ \quad + 2\left[\cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\frac{\alpha}{2}\right]\cos\frac{\gamma - \beta}{2} \end{array}\right\},$$

$$y = \frac{R}{4}\left\{\begin{array}{l} \sin(\alpha + \varphi) + \sin\alpha + 3\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \quad - 2\left[\sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\frac{\alpha}{2}\right]\cos\frac{\gamma - \beta}{2} \end{array}\right\};$$

pour $\varphi = \alpha$, nous aurons

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\alpha;$$

la courbe passe donc par les sommets du triangle ABC. Pour $\varphi = \pi + \alpha$, le point M étant diamétralement opposé à A, nous avons

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{2}\left(2\cos^2\alpha - 1 - \cos\alpha - 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma - \beta}{2}\right) \\ &= -R\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma - \beta}{2}\right), \\ y &= \frac{R}{2}\left(-2\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma - \beta}{2}\right) \\ &= R\left(-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma - \beta}{2}\right), \end{aligned}$$

coordonnées du point où le centre touche le côté opposé au sommet A.

Quant aux tangentes, leur coefficient angulaire est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2n\cos\varphi - 2m\sin\varphi + R(3\cos\varphi - 2\cos2\varphi)}{2n\sin\varphi + 2m\cos\varphi - R(3\sin\varphi + 2\sin2\varphi}$$

Maintenant prenant la dérivée de l'équation (8), soit

$$(11) \qquad x \sin\frac{\varphi}{2} + y\cos\frac{\varphi}{2} = 3\,\mathrm{R}\sin\frac{3\varphi}{2},$$

et éliminant la variable φ entre les équations (8) et (11), nous aurons celle de l'enveloppe de la perpendiculaire MP.

Mais avant d'opérer cette élimination, remarquons l'analogie qui existe entre les deux systèmes d'équations (7) et (8), (8) et (11). Pour écrire l'équation de la courbe, il suffirait de connaître la relation qui résulte de l'élimination de la variable u entre les deux équations générales :

$$(12) \qquad a\sin u + b\cos u = \sin 3u,$$

$$(13) \qquad a'\sin u + b'\cos u = \cos 3u:$$

ce que nous déterminerons par les transformations ci-après :

Multipliant d'abord la première par $\cos u$ et la seconde par $\sin u$, nous aurons

$$a\sin u\cos u + b\cos^2 u = \sin 3u\cos u,$$
$$a'\sin^2 u + b'\sin u\cos u = \cos 3u\sin u,$$

et la soustraction donnera

$$(a - b')\sin u\cos u + b\cos^2 u - a'\sin^2 u = \sin 2u = 2\sin u\cos u$$

ou

$$(14) \qquad (a - b' - 2)\sin u\cos u + (b + a')\cos^2 u - a' = 0.$$

Multipliant ensuite la première par $\sin u$ et la seconde par $\cos u$, nous aurons encore

$$a\sin^2 u + b\cos u\sin u = \sin 3u\sin u,$$
$$a'\cos u\sin u + b'\cos^2 u = \cos 3u\cos u,$$

et l'addition donnera

$$(a' + b)\cos u\sin u + a\sin^2 u + b'\cos^2 u = \cos 2u = 2\cos^2 u - 1$$

ou

$$(15) \qquad (a' + b)\cos u\sin u - (a - b' + 2)\cos^2 u + 1 + a = 0.$$

De ces deux nouvelles équations (14) et (15), nous tirons facilement

$$\cos^2 u = \frac{a'(b+a')+(a+1)(a-b'-2)}{(b+a')^2+(a-b')^2-4}$$

et

$$\cos^2 u \sin^2 u = \left(\frac{a'(1-b')-b(1+a)}{(b+a')^2+(a-b')^2-4}\right)^2 = \cos^2 u - \cos^4 u,$$

puis la substitution de $\cos^2 u$ dans cette dernière égalité conduit à un résultant de la forme $UW + V^2 = 0$, soit

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &[a'(b+a')+(1+a)(a-b'-2)] \\ &\quad\times[(a-b')(1+b')-2(a-1)-b(b+a')] \\ &\qquad\qquad + [a'(1-b')-b(1+a)]^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Alors, pour l'élimination de φ entre les équations (7) et (8), nous aurons

$$a = \frac{2(x-n)}{R}, \qquad b = \frac{2(y-m)}{R}, \qquad a' = -\frac{y}{R} \qquad b' = \frac{x}{R}.$$

Portant ces valeurs dans la relation (16) nous trouverons pour l'équation générale du lieu du point P :

$$\begin{aligned} &(2x^2 - y^2 - 3Rx - 6nx + 2my + 4n^2 + 2Rn - 2R^2) \\ \times\, &(x^2 - 2y^2 - 3Rx - 2nx + 6my - 4m^2 + 2Rn - 2R^2) \\ &\qquad + (2Rm - 4mn + 4mx + 4ny - 3Ry - 3xy)^2 = 0 \end{aligned}$$

enveloppe d'une conique $\lambda^2 U + 2\lambda V - W = 0$.

Réduisant, nous obtenons la quartique unicursale

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &2(x^2+y^2)^2 - 10m(x^2+y^2)y \\ &- (10n + 9R)x^3 + (27R - 10n)xy^2 \\ &+ (16n^2 + 8m^2 + 30Rn + 11R^2)x^2 \\ &+ (8n^2 + 16m^2 - 30Rn + 11R^2)y^2 \\ &- 4m(15R - 4n)xy \\ &- 4m(2m^2 + 2n^2 - 14Rn + 5R^2)y \\ &- 4(2n^3 + 2m^2 n - 7Rm^2 + 7Rn^2 + 5R^2 n)x \\ &- 4R^4 - 24Rm^2 n + 12R^2 m^2 + 12R^2 n^2 + 8Rn^3 = 0, \end{aligned}\right.$$

courbe qui entoure le triangle ABC en passant par les sommets et en touchant chacun de ces côtés.

De même, pour l'élimination de φ entre les équations (8) et (11), nous aurons

$$a = \frac{x}{3R}, \qquad b = \frac{y}{3R},$$

$$a' = -\frac{y}{R}, \qquad b' = \frac{x}{R}.$$

Ces valeurs étant portées dans la relation (16), nous trouverons pour l'équation de l'enveloppe de la droite MP :

$$[3y^2 - x^2 - 3R(3R + 2x)][y^2 - 3x^2 + 3R(3R - 2x)] \\ + 4y^2(3R - 2x)^2 = 0,$$

soit en réduisant

$$(x^2 + y^2 - R^2)^2 + 8Rx(x^2 + 3y^2) \\ + 20R^2(x^2 + y^2) - 28R^4 = 0$$

ou

$$(18) \qquad (x^2 + y^2 + 9R^2 - 12Rx)^2 - 4R(3R - 2x)^2 = 0.$$

Cette enveloppe est une quartique tricuspidale ou hypocycloïde à trois rebroussements, courbe connue, tangente au cercle circonscrit et dont les trois rebroussements sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon triple.

En effet, si nous cherchons les abscisses des points de tangence de la quartique (18) avec le cercle circonscrit

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

nous aurons

$$(2x + R)^2(x - R) = 0;$$

de là, deux racines

$$x = R, \qquad x = -\frac{R}{2};$$

dont la dernière est double. Si, dans la même équation, nous remplaçons $x^2 + y^2$ par $9R^2$, elle se décomposera encore en produit de deux facteurs

$$(3R - 2x)^2(3R + x) = 0$$

qui sont les racines de l'équation

$$4x^3 - 27R^2x + 27R^3 = 0$$

donnant les abscisses des trois points de rebroussement.

Enfin, si, des équations (8) et (11), nous tirons la valeur des coordonnées de chaque point de l'hypocycloïde (18), nous trouverons

$$\begin{aligned} x &= R(2\cos\varphi - \cos 2\varphi), \\ y &= R(2\sin\varphi + \sin 2\varphi). \end{aligned} \tag{19}$$

Or, pour que les quartiques (17) et (18) aient des points communs, il faut que leurs coordonnées soient les mêmes; de là, les deux relations

$$\begin{aligned} &4R(2\cos\varphi - \cos 2\varphi) \\ &\quad = 2n(1 - \cos\varphi) + 2m\sin\varphi + R(3\cos\varphi + \cos 2\varphi), \\ &4R(2\sin\varphi + \sin 2\varphi) \\ &\quad = 2n\sin\varphi + 2m(1 + \cos\varphi) + R(3\sin\varphi - \sin 2\varphi). \end{aligned}$$

Réduites, elles deviennent :

$$\left\{ \begin{aligned} &2n(1 - \cos\varphi) - 2m\sin\varphi \\ &\quad - 5R(2\cos\varphi + 1)(1 - \cos\varphi) = 0, \\ &2n\sin\varphi + 2m(1 + \cos\varphi) \\ &\quad - 5R\sin\varphi(2\cos\varphi + 1) \qquad = 0. \end{aligned} \right. \tag{20}$$

Portant, par exemple, dans la première la valeur de $\sin\varphi = \dfrac{2m(1 + \cos\varphi)}{5R(2\cos\varphi + 1) - 2n}$ tirée de la seconde, nous aurons

$$4m^2(1 + \cos\varphi) - (1 - \cos\varphi)[5R(2\cos\varphi + 1) - 2n]^2 = 0,$$

relation du troisième degré, qui montre que les deux quartiques (17) et (18) ont trois points communs, comme il était facile de le voir d'après le mode de génération de ces courbes.

QUESTIONS.

1945. Déterminer les complexes tels que le couple [M, P] formé sur chaque droite par le point central M de la corrélation normale et par le plan P mené par la droite perpendiculairement au plan central de cette corrélation, forme un groupe de contact.

(On entend par là que les points M peuvent être distribués sur une famille de surfaces telles que le plan tangent en chaque point M à la surface qui y passe, soit précisément le plan P.) (A. PETOT.)

1946. Soient F et F′ les foyers d'une conique quelconque d'un faisceau tangentiel. Montrer qu'il existe deux couples de points M et M′ (l'un réel, l'autre imaginaire) tels que les quatre points F, F′, M, M′ soient sur un même cercle.

(E. DUPORCQ.)

1947. La condition nécessaire et suffisante pour que les points de contact des tangentes communes à deux coniques soient sur un cercle est que leurs foyers soient sur un même cercle et y forment une division harmonique.

(E. DUPORCQ.)

1948. Étant donnée une quadrique, trouver les surfaces :

1° Telles que la droite qui joint chacun de leurs points au pôle du plan tangent s'appuie sur une droite fixe;

2° Telles que la même droite passe par un point fixe.

(A. PELLET.)

1949. On considère dans un plan quatre couples de points AA′, BB′, CC′, DD′ et les six contours quadrangulaires :

$$D'BA'C,\quad DB'AC',$$
$$D'CB'A,\quad DC'BA',$$
$$D'AC'B,\quad DA'CB'.$$

On peut inscrire à ces contours six coniques qui soient bitangentes à une même conique. (G. FONTENÉ.)

1950. D'un point M du plan d'une ellipse on peut mener huit droites coupant l'ellipse en N_1, N_2, N_3, ..., N_8, sous un angle constant α. Le lieu des points M tels que

$$\sum_1^8 \overline{MN_i}^2 = \text{const.}$$

est une conique. (E.-N. Barisien.)

1951. Trouver les courbes telles que la distance de l'origine à la tangente soit proportionnelle à la normale limitée à l'axe.

(A. Pellet.)

1952. Trouver toutes les fractions rationnelles

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

jouissant de la propriété que, si on les développe suivant les puissances croissantes de x, les coefficients du développement soient égaux à zéro, à $+1$, ou à -1 [1].

(Laguerre.)

ERRATA.

4e série, Tome I, 1901, page 579, on a omis dans la Table des matières :

4e série, Tome II, 1902, page 500, deuxième ligne seulement, *au lieu de :* M. Mansion, *lire :* M. Mention.

[1] Cette question avait été posée par Laguerre dans le *J. S.* (1884, p. 19, quest. 142), où elle n'a pas été résolue.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME II, 4^e SÉRIE).

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

B. — Déterminants; substitutions linéaires; élimination; théorie algébrique des formes; invariants et covariants; quaternions; équipollences et quantités complexes.

D. — Théorie générale des fonctions et son application aux fonctions algébriques et circulaires; séries et développements infinis, comprenant en particulier les produits infinis et les fractions continues considérées au point de vue algébrique; nombres de Bernoulli; fonctions sphériques et analogues.

E. — Intégrales définies, et en particulier intégrales eulériennes.

F. — Fonctions elliptiques avec leurs applications.

H. — Équations différentielles et aux différences partielles; équations fonctionnelles; équations aux différences finies; suites récurrentes.

I. — Arithmétique et théorie des nombres; analyse indéterminée; théorie arithmétique des formes et des fractions continues; division du cercle; nombres complexes, idéaux, transcendants.

M^2. — Surfaces algébriques.

N^1. — Complexes.

O. — Géométrie infinitésimale et Géométrie cinématique; applications géométriques du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la théorie des courbes et des surfaces; quadrature et rectification; courbure; lignes asymptotiques, géodésiques; lignes de courbure; aires; volumes; surfaces minima; systèmes orthogonaux.

P. — Transformations géométriques; homographie; homologie et affinité; corrélation et polaires réciproques; inversion; transformations birationnelle et autres.

R. — Mécanique générale; Cinématique; Statique comprenant les centres de gravité et les moments d'inertie; Dynamique; Mécanique des solides; frottement; attraction des ellipsoïdes.

T. — Physique mathématique; élasticité; résistance des matériaux; capillarité; lumière; chaleur; électricité.

X. — Procédés de calcul; Nomographie; calcul graphique; planimètres; instruments divers.

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Questions de concours.

Correspondance.

Bibliographie.

Divers.

Questions proposées.

Solutions de questions proposées.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES NOMS CITÉS

(TOME II, 4e SÉRIE).

Les noms des AUTEURS sont en PETITES CAPITALES.
Les noms *cités* sont en *italiques*.

31032 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 1. *SUPPLÉMENT.* Janvier 1902.

CHRONIQUE.

M. **Jules Richard** a soutenu devant la faculté des Sciences de Paris, le 22 novembre, la thèse suivante : *Sur la surface des ondes de Fresnel.*

★

Collège de France. — Premier semestre 1901-1902.

Mécanique analytique et Mécanique céleste. — M. Maurice Lévy, professeur. M. Hadamard, suppléant, traitera du calcul des variations.

Mathématiques. — M. Jordan, membre de l'Institut, Académie des Sciences, traitera des travaux de M. Hermite.

Physique générale et mathématique. — M. Brillouin étudiera la propagation de l'électricité.

Physique générale et expérimentale. — M. Mascart étudiera les décharges électriques et les phénomènes qui en dérivent.

Histoire générale des Sciences. — M. Pierre Laffite, professeur. M. Camille Monier, suppléant, traitera du progrès des sciences et de ses rapports avec la marche générale de la civilisation.

★

Collège de France (fondation Claude-Antoine Peccot). — *Mathématiques :* M. Émile Borel traitera des fonctions méromorphes.

★

Cornell University. *Cours de l'année scolaire* 1901-1902. — M. Wait : Géométrie analytique supérieure, Calcul supérieur, Calcul différentiel. — M. Jones : Haute Algèbre et Trigonométrie, Théorie des probabilités et des moindres carrés. — M. Tanner : Mathématiques (en allemand), Invariants algébriques. — M. Mc Mahon : Quaternions et Analyse vectorielle. — M. Snyder : Géométrie projective, Théorie générale des courbes et surfaces algébriques, Théorie des fonctions. — M. Hutchinson : Calcul intégral supérieur, Théorie des fonctions. — M. Fite : Théorie des groupes, théorie des nombres. — M. X. : Équations différentielles, Équations supérieures.

★

John Hopkin's University. *Cours de l'année scolaire* 1901-1902. — M. Morley : Géométrie supérieure, Les équations différentielles en Physique. — M. Cohen : Équations différentielles supérieures, Théorie des nombres algébriques, Théorie élémentaire des fonctions. — M. Franklin : Probabilité.

Université de Pensylvanie. *Cours de l'année scolaire* 1901–1902. M. Crawley : Géométrie plane analytique, Courbes planes supérieures. — M. Fischer : Équations différentielles, Invariants et covariants, Théorie des fonctions à une variable réelle, Théorie des fonctions à une variable complexe. — M. Schwatt : Séries infinies et produits, Intégrales définies et fonctions de Bessel, Laplace et Lamé. — M. Hallett : Théorie des substitutions, Théorie des groupes.

★

Yale University. *Cours de l'année scolaire* 1901-1902. — M. Clark : Déterminants, Équations différentielles. — M. Gibbs : Analyse vectorielle, Analyse vectorielle supérieure. — M. Pierpont : Haute Algèbre, Équations différentielles et théorie de la fonction, Théorie des fonctions. — M. Smith : Géométrie différentielle supérieure, Fondements de la Géométrie. — M. Porter : Calcul supérieur, Choix d'équations différentielles topiques. — M. Grandville : Géométrie différentielle. — M. Wilson : Géométrie projective.

★

Certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire des jeunes filles (ordre des Sciences). *Programme du concours de* 1902. — *Arithmétique :* Opérations sur les nombres entiers. Produit de plusieurs facteurs. Caractères de divisibilité par 2, 5 ; 4, 25 ; 8, 125 ; 9, 3 ; 11. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres entiers. Nombres premiers. Décomposition d'un nombre entier en un produit de facteurs premiers. Diviseurs d'un nombre entier. Fractions ordinaires. Simplification. Réduction de plusieurs fractions au même dénominateur. Opérations sur les fractions. Nombre décimaux. Opérations en considérant les nombres décimaux comme des cas particuliers des fractions ordinaires. Conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale. Calcul d'une fraction à une approximation décimale donnée. Fractions décimales périodiques. Racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire. Définition et extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire à une approximation donnée. — *Algèbre :* Équation du premier degré. Équation du second degré à une inconnue. Variations et propriétés du trinome du second degré. Représentation graphique des variations de fonctions simples. Progressions arithmétiques et géométriques. Somme des carrés et des cubes des n premiers nombres entiers. — *Géométrie :* Mesure des angles. Des lignes proportionnelles. Triangles et polygones semblables. Figures planes homothétiques. Centres de similitude de deux cercles. Axes de similitude de trois cercles. Relations métriques dans le triangle. Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical. Centre radical. Transformation par rayons vecteurs réciproques. Polygones réguliers convexes et étoilés. Longueur de la circonférence d'un cercle. Calcul de π. Méthode des isopérimètres. Mesure des aires. Rectangle, parallélogramme, triangle, trapèze, polygone, cercle. Droites et plans perpendiculaires. Droites et plans parallèles. Plans parallèles. Trièdres symétriques. Trièdres supplémentaires.

Cas d'égalité des trièdres. Prisme. Parallélépipède. Pyramide. Volume de ces solides. Cylindre droit à base circulaire. Cône droit à base circulaire. Surface latérale. Volume. Sphère. Sections planes. Plan tangent. Aire. Volume. Ellipse et hyperbole. Définition par la propriété des foyers. Parabole. Définition de cette courbe par la propriété des foyers et de la directrice. Tangente en un point d'une ellipse, d'une hyperbole et d'une parabole. Tracé des tangentes. Équation de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à leur axe de symétrie. Équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet. Ellipse considérée comme la projection orthogonale d'un cercle. Intersection d'une droite et d'une ellipse. Tangente à l'ellipse. Tracé des tangentes. Diamètres conjugués. Théorèmes d'Apollonius. — *Cosmographie :* Forme de la Terre. Longitude et latitude. Déplacement du Soleil sur la sphère céleste. Écliptique. Zodiaque. Équinoxes. Solstices. Année tropique. Année civile. Calendrier. Corrections julienne et grégorienne. Mouvement des planètes. Lois de Képler.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

OUVRAGES RÉCENTS.

CHEMIN (O.), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, ancien Professeur à l'École nationale des Ponts et Chaussées, chargé de mission par M. le Ministre de l'Instruction publique. — *De Paris aux mines d'or de l'Australie occidentale.* Petit in-8, avec 124 figures dont 111 photogravures, 9 cartes dans le texte et 2 planches (Paris, Gauthier-Villars).

Chargé d'une mission par M. le Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts, l'Auteur a passé près d'une année dans la Westralie. L'étendue de cette colonie est si considérable, les distances à parcourir si grandes, qu'il n'a pu visiter qu'une partie seulement de son immense territoire. Dans cet Ouvrage, il se propose de résumer ce qu'il a vu et les renseignements qu'il a recueillis, particulièrement au point de vue minier, s'estimant heureux s'il peut attirer l'attention sur ce pays encore trop peu connu, même de ses légitimes possesseurs.

COLSON (C.), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Conseiller d'État. — *Cours d'Économie politique,* professé à l'École nationale des Ponts et Chaussées. Trois beaux volumes grand in-8 se vendant séparément.

TOME I. *Exposé général des Phénomènes économiques. Le travail et les questions ouvrières.* Volume de 600 pages; 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

Ce Cours d'Économie politique a un caractère assez spécial; en effet, professé à l'École des Ponts et Chaussées, il comprend, outre l'enseignement économique général, les applications spéciales des principes aux questions intéressant les Ingénieurs.

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHYSIQUE, Exposition universelle de 1900. — *Rapports présentés au Congrès international de Physique* réuni à Paris en 1900, rassemblés et publiés par Ch.-Ed. GUILLAUME et L. POINCARÉ, Secrétaires généraux du Congrès. 3 beaux volumes grand in-8, avec figures (1900) (Paris, Gauthier-Villars).

TOME I. *Questions générales. Métrologie. Physique mécanique. Physique moléculaire.*

TOME II. *Optique. Électricité et Magnétisme.*

TOME III. *Électro-optique et Ionisation. Applications. Physique cosmique. Physique biologique.*

L'intérêt de cette publication est plus général et plus durable que celui des comptes rendus ordinaires de congrès; les Secrétaires généraux ont su, en effet, grâce à leurs relations scientifiques, et aussi au prix d'un labeur acharné, réunir, mettre au point et publier une série de Rapports qui sont de véritables Mémoires de premier ordre. Les physiciens de tous les pays seront surpris de trouver dans ces documents un aussi grand nombre d'études nouvelles et intéressantes.

DONDER (DE), Docteur ès Sciences. — *Étude sur les invariants intégraux.* Grand in-8 de 66 pages, 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

L'auteur de cette étude présente d'une manière systématique toutes les notions acquises dans cette théorie, grâce à MM. Poincaré et Kœnigs. Il a en outre ajouté quelques résultats dus à ses recherches personnelles.

FLAMMARION (Camille). — *Les imperfections du calendrier.* Projet de réforme. Brochure de 20 pages in-8; 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

GODEFROY (Maurice), Bibliothécaire de la Faculté des Sciences de Marseille. — *La fonction gamma.* Théorie, histoire, bibliographie. Grand in-8; 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

On peut définir la fonction gamma, soit, d'après les procédés de l'ancienne Analyse, au moyen d'une expression déterminée, soit, conformément aux idées modernes sur la théorie des fonctions, en partant de certaines équations fonctionnelles. Si l'on fait abstraction de cette dernière méthode, on se trouve en présence de deux définitions, dues l'une et l'autre à Euler.

Le plus logique est de choisir celle des deux définitions qui nécessite les notions les moins élevées et permet, par là même, de réaliser le maximum de simplicité. Dans ce travail essentiellement synthétique, l'Auteur s'est proposé de justifier cette manière de voir, en considérant spécialement le cas où la variable est réelle, sans cependant négliger les idées récentes qui ont si profondément modifié la théorie de la fonction gamma. Enfin, il a tenu à donner de nombreux renseignements historiques et bibliographiques. Quelques-uns serviront à préciser certains faits; tous contribueront à augmenter l'intérêt de ce petit volume.

HERMITE (Charles). — *Notice sur ses Travaux scientifiques,* par M. C. JORDAN. — *Esquisse biographique et bibliographique,* par M. P. MANSION. Grand in-8 de 47 pages; 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

HILBERT (D.). — *Les Principes fondamentaux de la Géométrie.* Traduit par L. LAUGEL. In-4 de 114 pages, avec 50 figures; 1900 (Paris, Gauthier-Villars).

L'Auteur a cherché à établir la Géométrie sur un système *simple* et *complet* d'axiomes *indépendants* et de déduire de ceux-ci les principaux théorèmes géométriques, de telle sorte que le rôle des divers groupes d'axiomes et la portée des conclusions que l'on tire des axiomes individuels soient mis en pleine lumière.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 2. *SUPPLÉMENT.* FÉVRIER 1902.

CHRONIQUE.

Un nouveau périodique mathématique est annoncé en Italie, *Il Bolletino di Matematica,* dirigé par le profr Alberto Conti de l'École normale de Bologne.

★

La Société mathématique de France a renouvelé son bureau en janvier. Ont été élus : Président, M. Raffy; Vice-Présidents, MM. Blutel, Borel, Carvallo et Painlevé; Secrétaires, MM. Bricard et Duporcq.

★

M. **Jean Clairin** a soutenu, devant la Faculté des Sciences de Paris, la thèse suivante : *Sur les transformations de Baecklund.*

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

American Journal of Mathematics, number 4 (octobre 1901). — Memoir on the algebra of symbolic logic; by *A.-N. Whiteheard.* — Secular perturbations of the planets; by *G.-W. Hill.* — Representation of linear groups as transitive substitution groups; by *Leonard-Eugene Dickson.* — A class of number-systems in six units; by *G.-P. Starkweather.*

Atti della Reale Accademia dei Lincei, t. X (2e semestre 1901). — *Grassi* Intorno ad alcune corrispondenze per proiezione delle superficie. — *Bianchi.* Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann. — *Severi.* Sugli spazî di una simplice infinitá razionale di spazî.

Bulletin of the American mathematical Society (novembre 1901). — On Wronskians functions of a real variable; by profr *Maxime Bocher.* — The configurations of the 27 lines on a cubic surface and the 28 bitangents to a quartic; by profr *L.-E. Dickson.* — The fifthieth annual meeting of the american association for the advancement of Science, by profr *G.-A. Miller.* — Riemann-Weber : partial differential equations of mathematical physics; by profr *J.-S. Ames.*

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 124, Heft I et II. — *Farkas.* Theorie der einfachen Ungleichungen. — *Hamburger.* Ueber die Umformung von geschlossenen Integralen. — *Schlesinger.* Ueber das Gaussche Pentagramma mirificum. Ueber einen allgemeinen Satz aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen. — *Gundelfinger.* Drei Briefe Aronholds an Hesse, Briefentwurf von Hesse an Aronhold. — *Gundelfinder.* Ueber die muthmassliche Entstehung der Sätze Aronholds über die Invariante S und eine damit zusammenhängende neue Begründung der Theorie der ternären kubischen Formen. Zur Besechnung der gausschen Logarithmen für kleine Werthe von B resp. zugehörige Werth von A. — *Fischer*. Eine Anwendung der Quaternionentheorie auf die thermodynamischen Gleichungen. — *Hoyer*. Ueber Definition und Behandlung transitiver Gruppen. — *Landau*. Ein Satz über die Zerlegung homogener linear Differentialausdrücke in irreducible Factoren. — *Kühne*. Eine Wechselbeziehung zwischen Functionen mehrerer Unbestimmten, die zu Reciprocitätsgesetzen führt. — *Grünfeld*. Beiträge zur Theorie der einer linearer Differentialgleichung n ter Ordnung adjungirten Differentialgleichungen.— *Lemke*. Ueber das Gleichgewicht kosmicher Gasmassen. — *Thomé*. Ueber asymptotische Darstellungen von Functionen.— *Goebel*. Die Vertheilung der Electricität auf zwei leitenden Kugeln.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXIII, n° 7 à 27. — Un critère pour reconnaître les points singuliers de la branche uniforme d'une fonction monogène; par *M.-G. Mittag-Lefler*. — Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoïde élastique soumis à des efforts donnés sur la frontière; par MM. *Eugène* et *François Cosserat*. — Sur un problème de d'Alembert; par *F. Siacci*. — Sur un point critique particulier de la solution des équations de l'élasticité, dans le cas où les efforts sur la frontière sont donnés; par MM. *Eugène* et *François Cosserat*. — Sur les principes généraux des mécanismes; par M. *G. Kœnigs*. — Sur la transformation quadratique des fonctions abéliennes; par M. *Georges Humbert*. — Sur la déformation continue des surfaces; par M. *G. Tzitzéica*. — Esquisse d'une théorie générale des mécanismes; par M. *G. Kœnigs*. — Sur l'équilibre des corps élastiques; par M. *R. Liouville*. — Sur l'existence des fonctions fondamentales; par M. *W. Stekloff*. — Sur les invariants intégraux; par *Th. de Donder*. — Les systèmes binaires et les couples d'éléments cinématiques; par M. *G. Kœnigs*. — Sur les équations différentielles linéaires de second ordre à coefficients algébriques; par M. *Paul-J. Suchar*. — Sur l'extension d'une formule d'Euler et sur le Calcul des moments d'inertie principaux d'un système de points matériels; par M. *K. Bohlin*. — Propriétés générales des couples d'éléments cinématiques; par M. *G. Kœnigs*. — Sur les intégrales périodiques des équations différentielles binomes; par M. *A. Davidoglou*. — Sur les chaînes secondaires; par M. *G. Kœnigs*. — Sur les groupes de substitutions: par M. *G.-A. Miller*. — Sur les équations différentielles linéaires de second ordre à coefficients algébriques de deuxième et de troisième espèce; par M. *Paul-J. Suchard*. — Sur deux classes particulières de convergence de Ribaucour; par M. *A. Demoulin*. — Sur la toupie de Foucault; par M. *Alexander-S. Chessin*. — Sur l'analysis situs; par M. *H. Poincaré*. — Rapport sur les papiers laissés par Halphen. — Sur les équations différentielles rationnelles; par M. *Ed. Maillet*. — Sur le nombre de racines communes à plusieurs équations; par M. *A. Davidoglou*. — Sur les périodes des intégrales doubles dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables; par M. *Emile Picard*. — Sur le nombre de racines communes à plusieurs équations; par M. *A. Davidoglou*. — Sur les singularités essentielles des équations différentielles; par M. *Paul Painlevé*. — Sur la déformation des surfaces et, en particulier, des quadriques; par M. *L. Raffy*. — Calcul des racines réelles d'une équation; par M. *A. Pellet*. — Sur le nombre de racines communes à plusieurs équations; par M. *G. Tzitzéica*. — Sur la connexion des surfaces algébriques; par M. *H. Poincaré*. — Sur les systèmes conjugués persistants; par M. *A. Demoulin*. — Sur les équations et les nombres transcendants; par M. *Edmond Maillet*. — Sur les périodes des intégrales doubles; par M. *Émile Picard*. — Calcul des racines réelles des équations; par M. *A. Pellet*. — Sur le calcul par cheminement des intégrales de certains systèmes différentiels; par M. *Riquier*. — Sur la séparation et le calcul des racines réelles des équations; par M. *Raoul Perrin*. — Sur les nombres e et π et les équations transcendantes; par M. *Edmond Maillet.* — Sur le mouvement le plus général d'un corps solide qui possède deux degrés de liberté autour d'un point fixe; par M. *René de Saussure.* — Sur les séries de factorielles; par M. *Niels Nelsen.* — Sur les équations différentielles linéaires qui sont de la même espèce; par M. *Alfred Lœvy.* — Quelques théorèmes nouveaux sur les fonctions entières; par M. *Ernest Lindelöf.* — Sur les invariants intégraux et les paramètres différentiels; par M. *Alf. Guldberg.* — Sur le mouvement d'une droite qui possède trois degrés de liberté; par M. *René de Saussure.* — Tensions intérieures produites par deux forces égales et directement opposées, agissant sur un solide indéfini; application; par M. *Mesnager.*

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXIV, n° 1 à 3. — Stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système affecté d'un mouvement de rotation uniforme; par M. *P. Duhem.* — Sur certains systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales; par M. *Émile Cotton.* — Sur les vibrations universelles de la matière; par M. *A. Korn.* — Sur les périodes des intégrales doubles et sur une classe d'équations différentielles linéaires; par M. *Émile Picard.* — Sur les paramètres intégraux; par M. *Guldberg.* — Sur la théorie des fonctions entières; par M. *P. Boutroux.* — Sur la croissance des fonctions entières; par M. *Pierre Boutroux.* — Remarques sur la Communication de M. Boutroux; par M. *Paul Painlevé.* — Sur les séries de factorielles; par M. *Niels Nielsen.*

OUVRAGES RÉCENTS.

Hoüel (J.). — *Recueil de formules et de Tables numériques.* 3e édition, nouveau tirage. Grand in-8 de LXXI-64 pages; 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

En rédigeant ce Recueil de formules et de Tables, l'Auteur s'est proposé un double but. Il a voulu, d'une part, rassembler des Tables abrégées à l'usage des personnes qui s'occupent d'applications numériques n'exigeant pas beaucoup d'approximation, ce qui est le cas d'une grande partie des calculs d'Astronomie ou de Physique; mais, d'autre part, son dessein principal a été de venir en aide à ceux qui étudient les parties élevées des Mathématiques, et auxquels la mise en nombre des formules peut faciliter l'intelligence des théories, en jouant un rôle analogue à celui des expériences dans l'enseignement des sciences physiques.

Journal de l'École Polytechnique, publié par le Conseil d'Instruction de cet établissement. 2e série, 6e cahier. In-4; 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

La Gournerie (J. de), Membre de l'Institut. — *Traité de Géométrie descriptive.* IIIe Partie, 3e édition. In-4 de XX-230 pages, avec Atlas de 16 planches in-4; 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

Le *Traité de Géométrie descriptive* de Jules de la Gournerie est un Ouvrage complet sur cette Science, contenant des tracés en harmonie avec ceux de la Stéréotomie, qui a été très favorablement accueilli par le public.

Cet Ouvrage est encore très remarquable en ce qu'il contient l'indication précise et souvent le résumé d'un grand nombre de Mémoires dont les Auteurs sont toujours cités avec un soin scrupuleux. A cet égard, il est indispensable à toute personne qui s'occupe de Géométrie descriptive et même de Géométrie générale.

Laussedat (le Colonel A.), Membre de l'Institut, Directeur du Conservatoire des Arts et Métiers. — *Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques.*

Tome II (Ire Partie). *Iconométrie et Métrophotographie.* Grand in-8 de 198 pages, avec 51 figures et 15 planches; 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

Cette Ire Partie du Tome II a trait plus particulièrement à l'Iconométrie et à la Métrophotographie, à l'application directe ou indirecte de la perspective au lever des plans. L'Auteur retrace l'historique de ces méthodes, les premières tentatives faites pour utiliser la Photographie dans les reconnaissances topographiques, orographiques et géologiques, les appareils essayés, les méthodes diverses proposées, et donne la théorie, la description et l'usage des appareils usités dans ces divers travaux. Un Appendice exposant le rôle des observatoires militaires pendant le siège de Paris par les armées allemandes termine le Volume.

MURAI (H.). — *Tables d'intérêts composés, de dépôts, de rentes et d'amortissements* calculées à dix décimales avec 480 plans d'amortissements complètement dressés. In-8 de 527 pages; 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

Rien que le simple calcul des intérêts composés demande beaucoup plus de peine et de travail que n'y peut consacrer l'homme d'affaires, et cependant il se présente nombre de cas où la solution de problèmes difficiles exige une connaissance approfondie de l'Algèbre. Ces Tables ont pour but d'épargner ces difficultés et de donner la réponse aux questions que les calculateurs pourraient avoir à se poser; de sorte que, dans la plupart des cas, une simple multiplication mène au résultat voulu. Si beaucoup d'Ouvrages répondent à ce but, peu d'entre eux cependant, comme les présentes Tables, satisfont aux exigences actuelles.

PELLAT (H.), Professeur adjoint à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — *Cours d'Électricité* (Cours de la Faculté des Sciences). 3 volumes grand in-8 (Paris, Gauthier-Villars).

TOME I : *Électrostatique. Lois d'Ohm. Thermo-électricité.* Grand in-8 de VI-329 pages avec 145 figures; 1901.

TOME II : *Électrodynamique. Magnétisme. Induction.* (*Sous presse.*)

TOME III : *Électrolyse. Électrocapillarité*, etc. (*En préparation.*)

Cet Ouvrage est un Cours complet d'Électricité, divisé en trois Parties. Il a pour but de montrer comment on peut établir solidement les lois fondamentales d'une des plus belles parties de la Science et d'en tirer les principales conséquences.

Pour faciliter l'étude de l'Électricité à un plus grand nombre de personnes, l'Auteur a cherché les démonstrations qui lui paraissent les plus simples; elles n'exigent presque toujours que les principes élémentaires du Calcul infinitésimal.

PICARD (Émile), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — *Traité d'Analyse* (Cours de la Faculté des Sciences). 4 volumes grand in-8.

TOME I : *Intégrales simples et multiples. — L'équation de Laplace et ses applications. — Développements en séries. — Applications géométriques du Calcul infinitésimal.* 2e édition revue et corrigée, avec figures. 1901 (Paris Gauthier-Villars).

Cette seconde édition du Tome I ne diffère pas sensiblement de la première. L'Auteur a tenu à lui conserver le même caractère élémentaire dans la première Partie et dans la troisième, en insistant seulement un peu plus, dans la première Partie, sur les questions de principes qui préoccupent beaucoup aujourd'hui les géomètres; il a aussi, dans ces questions, donné d'assez nombreuses indications bibliographiques, espérant être ainsi utile au lecteur désireux de se livrer à des études plus approfondies. La deuxième Partie a un caractère moins élémentaire que les deux autres; par les problèmes traités, elle pourra rendre quelques services à ceux qui s'intéressent surtout aux parties de l'Analyse indispensables pour la Physique mathématique.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 3. SUPPLÉMENT. MARS 1902.

CHRONIQUE.

Catalogue international de la littérature scientifique. — Nous avons déjà entretenu nos lecteurs (n° de mai 1901) de cette œuvre importante dont le commencement va bientôt voir le jour. Les ressources nécessaires ont été trouvées par des souscriptions faites à l'avance par les établissements scientifiques du monde entier. Le Bureau central de Londres a reçu déjà un grand nombre de fiches. De plus, des Bibliographies *nationales*, donnant en fait toutes les fiches d'un même pays avant leur classification dans l'ensemble du travail, sont publiées dans diverses nations. La *Bibliographie scientifique française*, publiée par le Bureau français du Catalogue international, va paraître incessamment et commencera à publier tous les titres de Mémoires, à partir du 1er janvier 1902.

*

Société mathématique américaine (Section de Chicago). — La dixième réunion régulière de la Section a eu lieu à l'Université du Nord-Ouest, à Evanston (Illinois), les 2 et 3 janvier 1902. Citons parmi les Mémoires qui ont été lus et discutés : Un théorème fondamental de la Géométrie du Tétraèdre; par le professeur *M.-W. Haskell.* — Théorème sur les cubiques torses, analogue au théorème de Pascal; par le professeur *M.-W. Haskell.* — Sur la dérivation des asymptotes d'une courbe algébrique d'après la définition; par le Dr *J.-W. Glover.* — Transformations algébriques d'une variable complexe obtenues par enchaînement; par le professeur *Arnold Emch.* — Sur la Géométrie désarguesienne plane d'Hilbert; par le professeur *E.-H. Moore.* — Une Géométrie simple non désarguesienne; par le Dr *F.-R. Moulton.* Note sur les nombres multiples parfaits; par le Dr *Jacob Westlund.* — Une algèbre de l'espace; par le Dr *T.-P. Hall.* — Un équivalent des formules de Plücker; par le Dr *J.-C. Fields.* — Sur le produit des substitutions linéaires; par le professeur *H.-B. Newson.* — Sur les groupes d'ordre p^m qui renferment les facteurs d'ordre p^{m-2}; par le professeur *G.-A. Miller.* — Quelques simplifications dans la théorie des groupes linéaires; par le professeur *L.-E. Dickson.*

Un sujet d'un caractère plus spécialement pédagogique a été présenté par le professeur *Towsend,* à savoir : la question de l'uniformité dans les conditions requises pour l'obtention des diplômes de maîtres, en ce qui concerne surtout les Mathématiques, et la question de l'uniformité des droits pour les étudiants passant d'un établissement à un autre. Après discussion, l'affaire est renvoyée à une Commission chargée de présenter un rapport à la prochaine séance de la Section. Un banquet a eu lieu dans l'une des salles de l'Université, banquet suivi d'une Conférence du D[r] *Keppel*, avec projection d'une cinquantaine de portraits de mathématiciens célèbres.

⁎

Le vingt-cinquième anniversaire de la fondation de la **Johns Hopkins University** et l'installation du D[r] *Remsen* comme président de ladite Université, ont été célébrés à Baltimore les 21 et 22 février. Le discours commémoratif du D[r] *D.-C. Gilman*, président pendant vingt-cinq ans de l'Université, actuellement président honoraire, et le discours du président *Remsen* ont été chaleureusement accueillis.

Cette assemblée de professeurs célèbres, de notabilités scientifiques et autres amis de l'instruction comprenait tout ce qui peut être réuni de plus éminent en Amérique.

Un des faits les plus intéressants fut la présentation, par le D[r] *Gilman*, d'une adresse signée par plus de mille personnes qui ont ou ont eu quelques relations avec l'Université.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 1901 (n[os] de septembre à décembre, Supplément 1901). — Sur l'équilibre des plaques élastiques circulaires libres ou appuyées et celui de la sphère isotrope; par *M. Hadamard*. — Sur les surfaces à lignes de courbure planes dont les plans enveloppent un cylindre; par M. *L. Raffy*. — Sur la théorie des courbes géodésiques; par M. *Anissimoff*. — Sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce dans la théorie des surfaces algébriques; par M. *Émile Picard*. — Sur les systèmes différentiels dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales; par M. *Ch. Riquier*. — SUPPLÉMENT : Sur les systèmes modulaires de Kronecker; par M. *Harris Hancock*.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1901 (fascicules III et IV). — Problème de refroidissement d'une barre hétérogène; par M. *W. Stekloff*. — Recherches sur l'Hydrodynamique, I[re] Partie : Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique; par M. *P. Duhem*. — Recherches sur l'Hydrodynamique, II[e] Partie : Sur la propagation des ondes; par M. *P. Duhem*. — Nouvelle méthode permettant de caractériser les matières colorantes; par MM. *Camichel* et *Bayrac*. — Table des Matières.

Bulletin de la Société mathématique de France, 1901 (fascicule IV). — Sur l'intégration de certains systèmes de Pfaff de caractère deux; par M. *Élie Cartan*. — Remarque sur les zéros des séries de Taylor; par M. *Michel Petrovitch*. — COMPTES RENDUS DES SÉANCES (novembre 1901). — Courbe remplissant un cube à *n* dimensions; par M. *de Séguier*. — Sur la force vive utilisable; par M. *Combebiac*. — Sur trois propriétés de six points d'une conique; par M. *L. Ripert*. — Sur la méthode d'approximation de Newton; par M. *Pellet*.

Le Matematiche pure el applicate. Revue mensuelle de Mathématiques à l'usage de l'Enseignement supérieur et secondaire, n^{os} d'avril à novembre 1901. — *E. Lemoine.* Studio geometrografico delle construzioni dell' angolo x determinato dal l'equazione a sen $x + b \cos x = 0$. — *P. Burgalli.* Sull' integrazione dell equazione $dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0$. — *C. Alasia.* Note : Santo delle note del Prof^r Amodeo : 1° Uno sguardo alle curve algebriche in base alla gonalità ; 2° Curve di gonalità k con punti fissi nella $(k-1)^{essim}$ serie canonica ; 3° Contributo alla determinazione delle sovrabbondanze dei sistemi di curve aggiunte alle curve algebriche. — *V. Retali.* Nota sul suggesto di ricerche n° VI. — *H. Brocard.* Note sur le sujet des recherches n° VI. — Questioni da risolvere (Ch. Hermite, Alasia, Retali, Droz-Farny, Barisien). — Soggetti di ricerche n° IX (E. Cesaro). — Bibliografia.

Franc. Giudice. Sulla transformazione degli integrali. — *J.-J. Duran Loriga.* Sui parametri della equazione del cerchio in coordinate baricentriche. — *J. de Vries.* Una generazione della cubica piana. — *M. d'Ocagne.* Sur la détermination des plans tangents aux hélicoïdes gauches. — *P. Barbarin.* Sulla utilità di studiare la geometria non-euclidea. — *Ernesto Lebon.* Sull' equazione reciproca del quarto grado. — *E. Lemoine.* A propos de la question 4. — *H. Brocard.* Note sur le sujet de recherches n° VIII. — Soluzioni delle questioni n° 2 (Alasia) e n° 3 (V. Retali). — Questioni da risolvere Soggetto di ricerche n° X (H. Brocard). — Bibliografia.

Franc. Giudice. Sulla transformazione degli integrali. — *J.-J. Duran Loriga.* Sui parametri della equazione del cerchio in coordinate baricentriche. — *P. Mansion.* Su di una proprietà dei triangozi rettangoli in Geometria generale. — *C. Alasia.* A proposito d'una costruzione geometrica dell' equazione cubica. — *A. de Savignac.* Une question d'examen. — Soluzione della questione n° 16 (Ing. D. Delitala). — Questioni da risolvere (n^{os} 29-33). — Soggetti di ricerche n^{os} XI et XII (H. Brocard). — Bibliografia.

Franc. Giudice. Sulla transformazione degli integrali. — *H. Brocard.* Note sur la quartique $y = +\sqrt{2ax} \pm \sqrt{a^2 - x^2}$. — *Retali.* Sopra una quartica binodale. — *Allardice.* Sui fuochi di una conica inscritta in un triangolo. — *C. Alasia.* Note : A proposito di un teoreme analitico-geometrico. — Soluzione della questione n° 28 (Pepoli, Strazzeri, Barisien, Retali). — Questioni da risolvere (n^{os} 34-40). — Soggetti di ricerche n^{os} XIII (Barisien) e XIV (Brocard). — Bibliografia : *E. Lebon.* Histoire abrégée de l'Astronomie (*C. Alasia*).

V. Retali. Sopra una quartica binodale. — *Strazzeri.* Sopra il quesito n° 33 del prof^r C. Alasia. — *H. Bourget.* Sur la transformation par semi-droites réciproques. — Estratto di alcune lettere al Direttore. — Soluzione della questione n° 9 (Ripert), n° 24 (Servais), n° 28 (Greenstreet), n° 1 (de Vries e C. Alasia). — Questioni da risolvere (n^{os} 41-45). — Soggetti di ricerche n^{os} XV-XVI (Barisien). — Bibliografia.

Zerr. Alcune relazioni trigonometriche. — *Repetto.* Sui centri di flusso elettrico. — *H. Brocard.* Sul soggetto di ricerche n. IX di E. Cesaro. — Note : 1° A proposito del grado d'una curva ; 2° Su di una proprietà dei numeri (Barisien). — Soluzione di questioni n° 33 (Cesaro, Burali-Forti, Retali), n° 25 (de Vries), n° 27 (Zerr). — Questioni proposte : n^{os} 46-49. — Sogetto di ricerche n° XVII. — Bibliografia.

Marcolongo. Teoria dei vettori. — *Retali.* Sopra una quartica binodale. — Note : *C. Alasia.* — Sul sogetto di ricerche n° XV (A. Barozzini). — Soluzione di questioni : nota sulla quest. 2 (A. Barozzini) e sulla quest. 9 (C. Alasia) ; n^{os} 11 et 29 (A. Barozzini), n° 37 (E.-N. Barisien). — Questioni proposte, n^{os} 50 à 54. — Soggetto di ricerche : n° XVIII. — Bibliografia.

Marcolongo. Teoria dei vettori. — *Mineo.* Sopra una classe de superficie unicursali. — *J. de Vries.* Involuzione su di una curva di 4° ordine con punto triplo. — *Miller.* Sui gruppi generati da due operatori. Soluzioni di questioni : n° 15 (C. Alasia), n° 22 (Droz-Farny, V. Retali, C. Alasia). — Questioni proposte. — Soggetti di ricerche.

OUVRAGES RÉCENTS.

Robin (G.), Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris. — *Œuvres scientifiques de Gustave Robin*, publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. Mémoires réunis et publiés par *Louis Raffy*, chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris (Paris, Gauthier-Villars).

Physique mathématique (Distribution de l'Électricité, Hydrodynamique. Fragments divers). Un fascicule grand in-8; 1899.

Le présent fascicule (*Physique mathématique*), formé en majeure partie de recherches inédites, renferme, à quelques pages près, tout ce que Robin a publié.

Il s'ouvre par un Mémoire *Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts* (Thèse). Ce Travail, qui était divisé en deux Parties, a paru dans les *Annales de l'École Normale* (année 1886). M. Raffy y a ajouté une troisième Partie, composée d'articles tous inédits, sauf le premier, et qui ont été élaborés, soit en même temps que la Thèse, soit dans le courant de l'année scolaire 1886-1887.

Ensuite viennent des travaux d'Hydrodynamique, groupés en deux Mémoires. Le premier, intitulé *Le problème général de l'Hydrodynamique*, est la réunion de deux Notes que Robin avait rédigées en 1887, mais qu'il n'a point publiées. De la même époque date le Mémoire suivant: *Percussions et explosions dans les liquides*, résumé en juillet 1887 dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* et qui a été reconstitué d'après les manuscrits laissés par l'Auteur.

Enfin, sous le titre *Fragments divers*, on trouvera quelques articles relatifs à l'Électricité et à l'Électromagnétisme, composés avant la fin de l'année 1889, mais qui étaient restés inédits.

Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques, 10e *Série*, fiches 900 à 1000 (Paris, Gauthier-Villars).

Continuation de cet important et indispensable répertoire publié sous la direction de la *Société mathématique*. Souhaitons que les séries suivantes nous donnent bientôt des titres d'Ouvrages et non plus seulement des titres de Mémoires séparés.

Rouché (Eugène), Membre de l'Institut, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, Examinateur de sortie à l'École Polytechnique, et Lévy (Lucien), Répétiteur d'Analyse et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — *Analyse infinitésimale à l'usage des Ingénieurs*. 2 volumes grand in-8, se vendant séparément (Paris, Gauthier-Villars).

Tome I. *Calcul différentiel. Dérivées et différentielles. Changements de variables. Séries. Formules de Taylor. Courbes planes et gauches. Surfaces. Congruences. Complexes. Lignes tracées sur les surfaces.* Volume grand in-8 de VIII-557 pages, avec 45 figures.

Tome II. *Calcul intégral.* (*Sous presse.*)

Les Auteurs n'ont pas oublié qu'ils s'adressaient surtout aux ingénieurs, pour lesquels l'Analyse infinitésimale est un instrument indispensable, et en général aux personnes qui étudient les Mathématiques en vue de leurs applications; c'est pour ces lecteurs qu'ils ont cru devoir reprendre brièvement certaines théories élémentaires, telles que les notions fondamentales sur les dérivées, la recherche des tangentes et celle des asymptotes, qui figurent aujourd'hui dans tous les cours de Mathématiques spéciales, sans rien omettre non plus de ce qui est nécessaire aux jeunes ingénieurs, soit pour leurs recherches techniques, soit pour l'obtention des grades universitaires.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 4. *SUPPLÉMENT.* Avril 1902.

CHRONIQUE.

Un **Congrès international des Sciences historiques** doit se tenir à Rome en avril de cette année. Le professeur V. Cerruti, de l'Université de Rome, est président de la section des Sciences mathématiques et naturelles, et le professeur A. Favaro, de l'Université de Padoue, président de la sous-section des Sciences mathématiques et physiques.

★

Université Cornell. — Annonce, pour la session d'été, les cours suivants en Mathématiques : Calcul différentiel; par le prof. *L.-A. Wait.* — Calcul intégral. Histoire des Mathématiques; par le Dr *J.-I. Hutchinson.* — Équations différentielles. Géométrie non euclidienne. Théorie des fonctions; par le Dr *H.-F. Stecker.* — Introduction à la théorie des groupes; par le Dr *W.-B. Fite.*

★

Université de Munich. — Cours de Mathématiques pour le semestre d'été. — Calcul intégral. Théorie des substitutions et des équations algébriques supérieures. Mécanique des corps déformables; par le prof. *F. Lindemann.* — Théorie des fonctions algébriques. Séries de Fourier; par le prof. *A. Pringsheim.* — Éléments de Mathématiques supérieures; par le Dr *H. Brunn.* — Géométrie descriptive. Géométrie moderne; par le Dr *K. Döhlemann.* — Géométrie analytique des solides. Théorie et applications des déterminants; par le Dr *E. von Weber.*

★

Université de Paris. — Cours de Mathématiques annoncés par la Faculté des Sciences. — *E. Picard.* Fonctions de plusieurs variables, spécialement fonctions algébriques à deux variables et transcendantes combinées. — *E. Goursat.* Équations différentielles continues. — *J. Boussinesq.* Théorie de la lumière. — *G. Kœnigs.* Théorie de l'élasticité. — *L. Raffy.* Calcul intégral, applications à la Mécanique et à la Physique.

Des conférences sont, en outre, données : par M. *Raffy,* pour le Calcul intégral; par M. *J. Hadamard,* pour le Calcul et l'Analyse supérieurs; par M. *P. Puiseux,* pour la Mécanique et l'Astronomie; et par MM. *H. Andoyer, Hadamard* et *E. Blutel,* pour la préparation à l'agrégation.

Université de Tubingen. — Cours annoncés pour le semestre d'été de 1902. — Analyse élémentaire. Théorie des fonctions; par le prof. *H. Stahl.* — Mécanique analytique. Théorie des courbes à double courbure; par le prof. *A. von Brill.* — Analyse supérieure. Théorie des invariants à forme binaire. Exercices sur l'analyse supérieure; par le prof. *L. Maurer.*

★

L'**Académie de Belgique** propose en prix la question suivante pour 1902 : « Contribution à la théorie algébrique et géométrique des formes à $n > 3$ variables. » Les manuscrits peuvent être rédigés en français ou en flamand et doivent être envoyés selon les conditions ordinaires, sous l'anonymat, au secrétaire perpétuel de l'Académie, à Bruxelles. La valeur du prix est de 600^{fr}.

★

La **Société scientifique d'Amsterdam** a publié la liste annuelle des questions mises au concours. Quinze sujets de Mathématiques et de Physique sont proposés. On peut se procurer des exemplaires de l'affiche auprès du secrétaire de la Société, le prof. D.-J. Korteweg, Vondelstraat, 104, Amsterdam.

★

La réunion annuelle de l'**Académie des Sciences de New-York** s'est tenue, le lundi 24 février, sous la présidence de M. *R.-S. Woodward,* président de l'Académie. Les rapports faits sur la situation montrent qu'elle est encore plus favorable que les années précédentes. Le secrétaire-rapporteur annonce que l'Académie comprend actuellement 298 membres résidants, et que les principaux travaux du Conseil durant l'année ont eu pour but d'aboutir à une revision des Règlements qui régissent l'Académie, de manière à harmoniser tout ce qui concerne ses travaux, publications, etc., avec les nécessités de la Science dans la ville de New-York.

★

Le Dr **Alexander Macfarlane** a fait à la *Lehigh University,* pendant le mois de mars, une série de conférences sur les mathématiciens anglais du XIXe siècle (James-Clerk Maxwell, Henry-John-Stephen Smith, William-John Macquorn Rankin, James-Joseph Sylvester, Peter-Guthrie Tait, William Thomson, premier Lord Kelvin).

★

Collège de France. — Second semestre 1902.

Mécanique analytique et Mécanique céleste. — M. Maurice Lévy, professeur. M. Hadamard, suppléant, traitera du calcul des variations.

Mathématiques. — M. Jordan traitera de l'analyse des travaux de M. Hermite.

Physique générale et mathématique. — M. Brillouin continuera l'étude de la propagation de l'électricité; théorie de la télégraphie sans fils; théorie de l'étincelle électrique.

Histoire générale des Sciences. — M. Pierre LAFFITTE, professeur, M. Camille MONIER, suppléant, traitera du progrès des sciences et de ses rapports avec la marche générale de la civilisation; il étudiera spécialement l'organisation sociale et l'évolution scientifique de l'Inde et de la Grèce.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Bulletin des Sciences mathématiques, 1901 (n[os] de juillet à décembre). — COMPTES RENDUS ET ANALYSES : *Gino Loria.* Le scienze esatte nell'antica Grecia. — *André (Désiré).* Organisation et comptabilité des assauts complets. — *Brioschi.* Opera matematiche publicate per cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi. — *Bühl.* Sur les équations différentielles simultanées de Saint-Germain et la forme aux dérivées partielles adjointe. — MÉLANGES : Mécanique. Note sur la tension de la tige d'un pendule sphérique. — REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES OU PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES : *Foucault (M.).* La Psychophysique. — MÉLANGES : *Dolbnia.* Sur un cas de réductibilité des intégrales abéliennes. — REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES OU PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES : *Strutt (J.-W.),* Baron *Rayleigh.* Scientific Papers. — *Poincaré (H.).* Cours de Physique mathématique. Électricité et optique. — *Estanave (E.).* Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince dont deux bords opposés au moins sont appuyés sur un cadre. — *Davidoglou (A.).* Sur l'équation des vibrations transversales des verges élastiques. — *Godefroy (M.).* La fonction gamma. — *Pascal (E.).* Repertorium der höheren Mathematik. — REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES OU PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES : *Robin (Gustave).* Œuvres scientifiques, réunies et publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. — *Aupetit (A.).* Essai sur la théorie générale de la monnaie. — *Hancock (Harris).* Mémoire sur les systèmes modulaires de Kronecker. — *Michel (Ch.)* Sur les applications géométriques du théorème d'Abel. — BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE. — REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES OU PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES : *Peano (G.).* Formulaire de Mathématiques. — *Bubileanu (N.).* Méthode de balistique extérieure. — *André (Ch.)* Traité d'Astronomie stellaire. — REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES OU PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES : *Bourget (Henry).* Sur une classe particulière de groupes hyperabéliens. — *Robin (Gustave).* Œuvres scientifiques. BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE. — REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES OU PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES : *Arzela (C.).* Lezioni di Calcolo infinitesimale date nella R. Universita di Bologna. — *Kronecker.* Vorlesungen über Mathematik von Leopold Kronecker. — REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES OU PÉRIODIQUES.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1901 (fascicules nos 3 et 4). — Le théorème des tourbillons en Thermodynamique; par M. *Jouguet.* — Sur la Géométrie à n dimensions; par M. *Lovett.* — Sur deux systèmes de triades de 13 éléments; par M. *G. Brunel.* — Sur la stabilité de l'équilibre relatif d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation; par M. *P. Duhem.* — Sur les groupes quaternaires d'ordre fini, 1er Mémoire : Généralités et groupes décomposables; par M. *Léon Autonne.* — Sur la transformation ordinaire des fonctions abéliennes; par M. *Georges Humbert.* — Sur les racines des équations transcendantes à coefficients rationnels; par M. *Edmond Maillet.*

American Journal of Mathematics, january 1902. — Cyclic subgroups of the simple ternary linear fractional group in a Galois field, by *L.-E. Dickson.* Curves of triple Curvature; by *J.-G. Hardy.* — Primary prime functions in several variables and a generalization of on important theorem of Dedekind; by *Harris Hancock.* — On certain properties of the plane cubic curve in relation to the circular points at infinity; by *R.-A. Roberts.* — Estimate of Peirce's linear association algebra; by *H.-E. Hawkes.* — Groups defined by the orders of two generators and the order of their product: by *G.-A. Miller.*

Atti della Reale Accademia dei Lincei, 1902. — *Severi.* Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre. — *Fubini.* Sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali. — *Pincherle.* Sulle serie di fattoriali. — *Somigliana.* Sul principio delle immagini di lord Kelvin e le equazioni dell'elasticitá. — *Amaldi.* Sulle superficie che contengono sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXIV, n° 4 à 11. — Sur une classe de transformations rationnelles; par M. *Ivan Fredholm.* — Sur la résolution des points singuliers des surfaces algébriques; par M. *Bippo Levi.* — Quelques remarques sur les fonctions entières; par M. *Edmond Maillet.* — Sur les fonctions quasi entières; par M. *Edmond Maillet.* — Sur une classe d'équations aux dérivées partielles intégrables par approximations successives; par M. *R. d'Adhémar.* — Sur quelques transformations de contact; par M. *Ed. de Tannenberg.* — Sur les transcendantes méromorphes définies par les équations différentielles du second ordre; par M. *Paul Painlevé.* — Sur les lignes de décroissance maxima des modules et les équations algébriques ou transcendantes; par M. *Edmond Maillet.* — Sur les fonctions entières de genre infini et les transcendantes méromorphes découvertes par M. Painlevé; par M. *Pierre Boutroux.* — Un théorème sur les séries trigonométriques; par M. *H. Lebesgue.* — Sur les séries des factorielles; par M. *J.-C. Kluyver.* — Quelques remarques sur les périodes des intégrales doubles et la transformation des surfaces algébriques; par M. *E. Picard.* — Sur les groupes réguliers d'ordre fini; par M. *Léon Autonne.* — Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables; par M. *Beppo Levi.*

Journal de l'École Polytechnique, IIe série, cahier n° 7. — L'observation spectrale des faisceaux électriques de la tour Eiffel en 1889; par M. *A. Cornu.* — Sur les volants élastiques, par M. *L. Lecornu.* — Sur le calcul numérique des coefficients dans le développement de la fonction perturbatrice; par M. *O. Callandreau.* — Calcul des triquaternions, nouvelle analyse géométrique; par M. *Combebiac.* — Hommage rendu par l'École Polytechnique à M. le Colonel *Mannheim.*

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 5. *SUPPLÉMENT.* MAI 1902.

CHRONIQUE.

Catalogue international de Bibliographie scientifique. — Nos lecteurs savent que ce Catalogue doit comprendre la liste de toutes les publications scientifiques comprises dans la classification suivante :

A. Mathématiques.
B. Mécanique.
C. Physique.
D. Chimie.
E. Astronomie.
F. Météorologie (y compris le Magnétisme terrestre).
G. Minéralogie (y compris la Pétrologie et la Cristallographie).
H. Géologie.
J. Géographie (mathématique et physique).
K. Paléontologie.
L. Biologie générale.
M. Botanique.
N. Zoologie.
O. Anatomie de l'homme (y compris l'Histologie et l'Embryologie).
P. Anthropologie physique.
Q. Physiologie (y compris la Psychologie expérimentale, la Pharmacologie et la Pathologie expérimentale.
R. Bactériologie.

Nous donnons, d'après le *Bulletin des Sciences,* la situation actuelle de cette grande publication :

« La Société Royale, qui, dans une question si ardue et si difficile, a montré un esprit de suite et une persévérance auxquels il convient de rendre hommage, a levé toutes les difficultés en se constituant comme éditeur du Catalogue au nom du Conseil international. La Société Royale consentit également à faire l'avance du capital nécessaire pour commencer l'entreprise, à charge d'être remboursée dans le délai de 5 années à partir de 1901.

» L'œuvre entrait donc dans la période d'exécution. Les organes qui lui étaient nécessaires se sont, nous allons le voir, constitués avec la plus encourageante rapidité.

» D'abord le *Conseil international,* qui a la responsabilité et la direction du Catalogue, a été nommé sans délai. Il se compose actuellement de sir Michaël Foster, de MM. les professeurs Rücker et Armstrong, du Dr L. Mond, délégués de la Société Royale, de M. H. Poincaré pour la France, du Dr Uhlworm pour l'Allemagne, de M. Nasini pour l'Italie. Le délégué des États-Unis sera désigné ultérieurement.

» A la première réunion du Conseil, qui a eu lieu le 12 décembre 1900, il a été décidé de commencer la préparation du Catalogue à partir du 1er janvier 1901. Les traités pour l'impression et l'édition du Catalogue ont été approuvés. Pour pallier aux inconvénients, très grands selon nous, qui résultent de la suppression du Catalogue sur fiches, il a été décidé que le Catalogue sera imprimé sur deux colonnes et que l'on pourra livrer à tous ceux qui en feraient la demande des exemplaires pour lesquels l'impression sera faite sur un seul côté de chaque feuille de papier, ce qui permettra de découper les Volumes et de coller les titres sur des fiches ayant les dimensions habituellement employées par les bibliothécaires.

» Chaque édition annuelle du Catalogue aura 17 Volumes, dont le prix sera de 17 livres sterling pour les gouvernements participants et d'environ 18 livres pour les particuliers.

» Le Dr H. Forster Morley a été nommé directeur du *Bureau central*. Ce Bureau est installé à Londres dans le Strand, 34 et 35 Southampton Street, et l'on y travaille déjà à la préparation du Catalogue pour l'année courante.

» En ce qui concerne les *Bureaux régionaux*, les nouvelles sont au moins aussi satisfaisantes. Au mois d'août dernier, des Bureaux régionaux, pourvus de toutes les ressources nécessaires, avaient été constitués dans les pays suivants :

France.	Belgique.	Norvège.	Colonie du Cap.
Allemagne.	Autriche.	Pays-Bas.	Hongrie.
Italie.	Japon.	Danemark.	Portugal.
États-Unis.	Canada.	Inde.	Grèce.
Grande-Bretagne.	Suisse.	Mexique.	

» Depuis, le mouvement s'est accentué : l'Académie de Cracovie a offert d'analyser tous les journaux écrits en langue polonaise; la Russie a constitué son bureau régional sous la direction de M. le professeur Famintzine, de l'Université de Saint-Pétersbourg; la Finlande, l'Australie s'occupent des meilleurs moyens de cataloguer leur littérature scientifique. Le succès étant assuré, il est clair qu'aucun pays ne voudra être oublié.

» Déjà les Bureaux régionaux ont envoyé 5000 fiches au Bureau central. Celui-ci ne reste pas inactif; il a publié en anglais les classifications et les instructions aux Bureaux régionaux. Tous ces documents ont été traduits en français, en italien et en allemand par les soins des Bureaux régionaux. Ces traductions ont paru ou vont paraître incessamment, ainsi que les listes des périodiques à analyser, accompagnées des abréviations propres à désigner chaque périodique. Nous avons déjà reçu la liste des périodiques français; elle comprend exactement 853 numéros. Les listes relatives à l'Allemagne, à la Grande-Bretagne et à plusieurs autres pays ont également paru.

» L'avenir financier de l'œuvre se présente aussi sous l'aspect le plus encourageant. Les contributions des différents pays ont revêtu la forme de promesses de souscriptions annuelles à un certain nombre d'exemplaires complets du Catalogue ou à leur équivalent en Volumes séparés pendant la période 1901-1906. La liste des souscriptions doit dépasser, à ce jour, 350 exemplaires.

» L'œuvre peut donc être considérée comme fondée; elle sera contrôlée périodiquement par une *Convention internationale* qui se réunira à Londres en 1905, puis en 1910, et ensuite tous les 10 ans. Cette Convention s'occupera de l'examen et, s'il y a lieu, de la revision des règles qui ont été adoptées pour la publication du Catalogue. En tout état de cause, ces règles ne pourront donc être modifiées avant l'année 1906.

» Dans l'intervalle entre deux réunions consécutives de la Convention internationale, l'administration du Catalogue incombe au Conseil international. Ce Conseil, qui vient de se réunir à Londres, a décidé que l'impression du Catalogue commencerait incessamment.

» Notre pays peut se rendre cette justice que, dès le début, il a donné avec empressement son concours le plus actif à une œuvre dont l'utilité était incontestable, mais dont la réalisation pouvait paraître bien difficile. Comme l'a fait remarquer avec grande raison la Société Royale dans l'exposé qu'elle a fait présenter à la récente assemblée générale de l'*Association internationale des Académies*, les difficultés contre lesquelles les promoteurs du Catalogue ont eu à se débattre, alors qu'il n'existait aucun organe scientifique international, mettent en pleine lumière les services que cet organe pourra rendre en s'occupant des problèmes dont la solution nécessite la coopération de toutes les nations civilisées. »

★

M. **Combebiac** a soutenu, devant la Faculté des Sciences de Paris, le mardi 22 avril, une thèse sur le sujet suivant : Calcul des triquaternions.

★

Le deuxième numéro (avril) du Tome III des *Transactions* de l'**American Mathematical Society** renferme les Mémoires suivants : Sur les petits diviseurs dans la théorie lunaire; par *E.-W. Brown*. — Sur les holomorphismes d'un groupe; par *J.-W. Young*. — Une Géométrie plane non désarguésienne; par *F.-L. Moulton*. — Sur les solutions réelles de deux équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre; par *Bocher*. — Sur une nouvelle méthode pour traiter les intersections des courbes planes; par *C.-A. Scott*. — Une série complète de postulats pour la théorie de la grandeur absolue continue; par *E.-V. Huntington*. — Postulats pour les théories d'intégrale positive et de nombres rationnels positifs; par *E.-V. Huntington*.

★

La soixante-douzième session de l'**Association britannique pour l'avancement des Sciences** aura lieu à Belfast du 10 au 17 septembre. La Section des Sciences mathématiques et physiques sera présidée par le Prof. *J. Purser*.

★

Pour faire suite à la publication des **Œuvres complètes** et de la **Correspondance** de **Christiaan Huygens**, le Prof. *D.-J. Korteweg* examine une brochure écrite en latin, vers 1692, par un certain Huygens, intitulée : *Animadversiones quædam circa proportionem quam ad rectilineas habent figuræ curvilineæ*. Cette brochure est nécessaire pour expliquer certains passages obscurs dans la correspondance entre Christiaan et Hubert Huygens; on ne la trouve pas dans le commerce.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXIV, nos 12 à 16. — Sur un théorème de Frobenius; par M. *de Séguier*. — Sur les expressions différentielles linéaires homogènes commutatives; par M. *Wallenberg*. — Sur les surfaces à courbure constante négative; par M. *Erik Holmgren*. — Sur la différentiation de la série de Fourier; par M. *Fiejer*. — Sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions abéliennes; par M. *Painlevé*. — Sur les fonctions abéliennes à multiplication complexe; par M. *Humbert*.

American Journal of Mathematics, Volume XXVI, number 2. — Canonical form of a linear homogeneous transformation in an arbitrary realm of rationality; by *L.-E. Dickson*. — A new theory of collineations and their Lie groups; by *H.-B. Newson*. — Infinitesimal deformation of surfaces; by *L.-P. Eisenhart*.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 124, Heft III. — *Kokott*. Untersuchungen über die *Landensche* Transformation. — Fields. The *Riemann-Roch*. Theorem and the independence of the conditions of adjointness in the case af a curve for which the tangents at the multiple points are distinct from one another. — *Königsberger*. Die Principien der Mechanik für mehrere unabhängige Variable.

Atti della Reale Accademia dei Lincei, Volume XI. — *Amaldi*. Sulle superficie che contengono sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici.

OUVRAGES RÉCENTS.

Russel (Bertrand A.-W.), M. A., Fellow of Trinity College, Cambridge. — *Essai sur les Fondements de la Géométrie*, Traduction par *C. Cadenat*, Licencié ès Sciences mathématiques, Professeur de Mathématiques au Collège de Saint-Claude, revue et annotée par l'Auteur et par *Louis Couturat*, Chargé de Cours de Philosophie à l'Université de Toulouse. Grand in-8, avec 11 figures; 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

La Géométrie non euclidienne a pris un si grand développement, qu'il devenait nécessaire de critiquer et de systématiser les résultats acquis, et d'en tirer les conséquences philosophiques.

Quoi que l'on pense des conclusions philosophiques de l'Auteur, cet Ouvrage plein de science et d'idées ne sera pas moins utile ni moins intéressant pour les mathématiciens que pour les philosophes.

Les Travaux des Mathématiciens gagneraient en justesse et en portée s'ils étaient mieux au courant des problèmes philosophiques qu'ils posent et tranchent parfois sans s'en douter. Aucun livre n'est plus propre que celui de M. Russell à combler cette fâcheuse lacune; aussi ne saurions-nous en recommander trop vivement la lecture à tous les mathématiciens qui réfléchissent sur leur science, et qui veulent vraiment la comprendre.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 6. *SUPPLÉMENT.* JUIN 1902.

CHRONIQUE.

M. **I.-L. Fuchs**, professeur à l'Université de Berlin, Correspondant de l'Institut de France, est mort le 26 avril dernier, à l'âge de soixante-huit ans.

★

M. **Joseph Coulon** a soutenu, devant la Faculté des Sciences de Paris, la thèse suivante : « Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques ».

★

La 74e réunion générale de la **Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte** aura lieu à Karlsbad, du 21 au 27 septembre. La première Section comprendra les Mathématiques, l'Astronomie et la Géodésie; la troisième section, les Mathématiques appliquées et les Sciences physiques.

★

L'**Institut royal de Lombardie** offre un prix de 1200 lires pour le meilleur Ouvrage apportant un perfectionnement important et original à la théorie des groupes de transformations. Les Mémoires doivent être écrits en italien, en français ou en latin, et présentés, sous l'anonymat, avant le 31 mars 1903.

★

La **Société mathématique allemande** a décidé une innovation concernant la publication de son *Jahresbericht*. Dirigée par le professeur A. Gutzmer, ladite publication paraîtra, à l'avenir, chaque mois et comprendra désormais, entre autres choses, les dissertations académiques, les discours d'inauguration, des notices nécrologiques sur les membres de la Société ou autres, des discussions sur les questions d'enseignement, des articles sur les ouvrages de littérature courante, des comptes rendus de séances de Sociétés, des notes et des questions.

★

Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques. — La Commission du Répertoire, dont le président est M. Poincaré et le secrétaire M. C.-A. Laisant, vient de distribuer un Rapport sur l'état d'avancement de cette importante publication. Nous en extrayons les renseignements suivants : « A l'heure actuelle, 11 séries de 100 fiches chacune, soit 1100 fiches, ont été imprimées et mises en vente. Chaque fiche imprimée contenant en moyenne la mention de 10 Mémoires, on peut évaluer le nombre total des Mémoires signalés entre 10000 et 11000; la 12ᵉ série est sous presse; la 13ᵉ série est préparée et pourra être envoyée à l'impression dès que la 12ᵉ sera terminée.

» Les fiches manuscrites dans les cartons sont au nombre de 9953, et peuvent fournir 314 fiches imprimables.

» Comme le Répertoire se publie par fiches et non en Volumes, il a été décidé que les travaux de dépouillement seraient poussés jusqu'en 1900 inclusivement, de manière à comprendre le XIXᵉ siècle tout entier. Mais il est inutile de continuer au delà. La bibliographie du XXᵉ siècle se fait déjà fort utilement par la publication de la *Revue semestrielle des Publications mathématiques.* »

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1902 (fascicule I). — Sur le champ électromagnétique engendré par la translation uniforme d'une charge électrique parallèlement à un plan conducteur indéfini; par M. *T. Levi-Civita.* — Sur la représentation conforme de deux aires planes à connexion multiple d'après M. Schottky; par M. *R. Levavasseur.*

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 1902 (nᵒˢ de janvier, février, mars). — Sur les fonctions périodiques; par M. *P. Cousin.* — Complément au Mémoire sur la Théorie des courbes géodésiques; par M. *Anissimoff.* — Sur les périodes des intégrales doubles dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables; par M. *Émile Picard.* — Sur les périodes d'une intégrale double de fonction rationnelle; par M. *Émile Picard.* — Sur le nombre des conditions exprimant que certaines intégrales sont de seconde espèce; par M. *Émile Picard.* — Remarques sur quelques propositions dues à M. Hermite; par M. *Stouff.* — Sur les systèmes articulés gauches; par M. *Étienne Delassus.*

Bulletin de la Société mathématique de France, 1902 (fascicule I). — État de la *Société mathématique* au commencement de 1902. — Liste des présidents de la Société depuis sa fondation. — Listes des Sociétés scientifiques et des recueils périodiques avec lesquels la Société échange son Bulletin. — Sur un système numérique complexe représentant le groupe de transformations conformes de l'espace; par M. *Combebiac.* — Sur un problème relatif aux lignes asymptotiques; par M. *Goursat.* — Sur les déformations des quadriques; par M. *Servant.* — Détermination des courbes algébriques de degré donné qu'on peut tracer sur les surfaces de l'onde; par M. *Humbert.* — Sur les fractions continues algébriques; par M. *de Montessus.* — Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre; par M. *J. Clairin.* — Sur les dérivées des fonctions de lignes; par M. *Hadamard.* — Sur les engrenages à contact ponctuel; par M. *Delassus.* — Comptes rendus des séances (décembre 1901 à février 1902).

Bulletin des Sciences mathématiques, 1902 (nᵒˢ de janvier, février, mars). — COMPTES RENDUS ET ANALYSES : *Lorentz* (*H.-A.*). Lehrbuch des Differential- und Integral Rechnung und der Anfangsgrunde der analytischen Geometrie. — *Basset* (*A.-B.*). An elementary treatise on cubic and quartic curves. — *Müller* (*F.*). Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français, contenant les termes techniques employés dans les Mathématiques pures et appliquées. — *Weber* (*H.*). Die partiellen Differential-Gleichungen der matematischen Physik. Nach Riemann's Vorlesungen in vierter Auflage. — *Cesaro* (*E.*). Vorlesungen über natürliche Geometrie. — *Bourlet* (*C.*). Cours de Mathématiques à l'usage des élèves architectes et ingénieurs, professé à l'École des Beaux-arts. — *Œttingen* (*A. von*). Elemente der geometrisch-perspektivischen Zeichnens. — *Sicard* (*H.*). Traité de Cinématique théorique. — Revue des publications académiques ou périodiques.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES : *Dickson* (*L.-E.*). Linear Groups with an exposition of the Galois Field Theory. — *Stokes* (*Sir G.*). Mathematical and Physical Papers. — *Gibbs* (*J.-W.*) et *Wilson* (*E.-B.*). Vector Analysis. — *Estanave* (*E.*). Revue décennale des thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris en vue du grade de Docteur ès Sciences, du 1er janvier 1891 au 31 décembre 1900, avec l'indication des périodiques contenant la plupart de ces Mémoires ou leurs analyses. — *Snellius* (*W.*). Le degré du méridien terrestre. — *Coignet* (*M.*). Le Traité des sinus. — *Boltzmann* (*L.*). Leçons sur la théorie des gaz (1re Partie). — MÉLANGES : *Émile Picard.* Le premier Chapitre d'un Rapport sur quelques progrès récents dans les Sciences. — Bulletin bibliographique. — Revue des publications académiques ou périodiques.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES : *Picard* (*E.*). Quelques réflexions sur la Mécanique suivies d'une première Leçon de Dynamique. — MÉLANGES : *Darboux* (*G.*). Le Catalogue international de littérature scientifique. — *D'Ocagne* (*Maurice*). Sur quelques travaux récents relatifs à la Nomographie. — *Lœvy* (*Alfred*). Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires. — *Raffy* (*L.*). A propos de la Thermodynamique générale de Gustave Robin. — Revue des publications académiques ou périodiques.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1902 (fascicule I). — Sur la stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme; par M. *P. Duhem*. — Sur une catégorie de fonctions transcendantes et les équations différentielles rationnelles; par M. *Edmond Maillet*. — Sur l'intégration de l'équation $\Delta u + \xi u = 0$; par M. *S. Zaremba.*

Le Matematiche pure ed applicate (nos de décembre 1901 à avril 1902). — *Cesàro*. Sull'uso delle condizioni d'immobilità in geometria intrinseca. — *Pirondini*. Generalizzazione di alcune proprietá dell'elica cilindro conica ordinaria. — *Servais*. Sur les faisceaux de coniques. — *Biasi*. Sopra una estensione del Teorema di WALLACE. — *Burali-Forti*. Applicazioni del metodo di GRASSMANN. — *C. Alasia*. Su di un recente studio del moto turbato. — Sul soggetto di ricerche n. XV, nota di *Retali*. — Soluzione di questioni n. 23 (*Droz-Farny, V. Retali*), n. 48 (*C. Alasia*), n. 52 (*Cesàro, Retali*), n. 54 (*Cesàro, Retali*). — Questioni da risolvere n. 57 à 60. — Soggetti di ricerche : XXI, XXII (*Cesàro*).

Vivanti. Sopra la rotazioni della sfera su sé stessa. — *Amodeo*. Rappresentazione stereoscopica delle figure dello spazio nel piano. — *Miller*. Gruppi d'ordine p^m (p primo) non conformi con gruppi abeliani. — *Burali-Forti*. Applicazioni del metodo di Grassmann. — *Ripert*. Sur une extension élémentaire du théorème de Wallace. — NOTE. Alcuni teoremi sulle figure curvilinee (*A. Krahe*). Su di una proprietá dei numeri (*Barisien*). Seconda nota sul soggetto di ricerche (*Brocard*). Risoluzioni di questioni. — Questioni proposte. Soggetti di ricerche. Bibliografia.

OUVRAGES RÉCENTS.

STURM, Membre de l'Institut. — *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, revu et corrigé par *E. Prouhet*, Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique, et augmenté de la *Théorie élémentaire des Fonctions ellip-*

tiques, par *H. Laurent*. 12ᵉ édition, mise au courant des nouveaux programmes de la Licence, par *A. de Saint-Germain*, Professeur à la Faculté des Sciences de Caen. 2 volumes in-8, avec figures; 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

Depuis sa première édition, parue en 1857, le *Cours d'Analyse* professé à l'École Polytechnique par Sturm et publié par Prouhet est resté l'un des Ouvrages consultés le plus volontiers par ceux qui veulent s'initier au Calcul infinitésimal : sa clarté et sa simplicité lui ont valu un succès qui se maintient et se justifie encore aujourd'hui.

M. de Saint-Germain a relu avec soin le texte donné par Prouhet et y a fait maintes corrections de détail, évidemment indiquées : il n'a pas hésité à abréger certains passages, quand il a cru ne rien sacrifier d'utile; mais il a conservé les Leçons sur les séries et les différences finies, ainsi que les Notes de MM. Catalan, Despeyrous, Prouhet et Brassinne, qui toutes présentaient de l'intérêt. Chaque Leçon continue à être suivie d'exercices tirés des papiers de Sturm; d'autres sont empruntés aux excellents Ouvrages de M. Frenet et de M. Tisserand. De plus, il a cru faire plaisir à plusieurs lecteurs en donnant une série de sujets de compositions proposés par les Facultés de Paris et de la province.

Tannery (J.) et Molk (J.). — *Éléments de la Théorie des Fonctions elliptiques*. Tome IV : *Calcul intégral* (2ᵉ Partie) *et Applications*. Grand in-8; 1902 (Paris, Gauthier-Villars).

Cet Ouvrage, beaucoup plus élémentaire que le Traité d'Halphen, est destiné aux étudiants des Facultés. Les Auteurs ont essayé de faire un livre qui se raccordât avec l'enseignement qui leur est donné; ils pourront, après avoir lu cet Ouvrage, traiter des applications faciles et les pousser jusqu'au bout; ils pourront compléter leurs connaissances dans le livre d'Halphen, étudier en particulier les belles applications qui remplissent le second Volume, se retrouver sans peine dans les *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* que M. Schwarz publie d'après les Leçons de Weierstrass, lire les Mémoires fondamentaux d'Abel et de Jacobi, pénétrer enfin dans la riche et admirable littérature des fonctions elliptiques et prendre en particulier connaissance des recherches de Kronecker et de Hermite.

Revue décennale des Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris en vue du grade de Docteur ès Sciences du 1ᵉʳ *janvier* 1891 *au* 31 *décembre* 1900, par E. Estanave, Docteur ès sciences. (Paris, Gauthier-Villars.)

Cette revue décennale contient, classées méthodiquement, des indications bibliographiques précieuses de 347 Mémoires qui ont été présentés à la Faculté des Sciences de Paris en vue des divers ordres de Doctorat ès sciences.

Après avoir donné quelques renseignements relatifs au Doctorat d'État et au Doctorat d'Université, l'auteur a classé les Mémoires en trois catégories suivant l'ordre du Doctorat auquel ils appartiennent. La première Partie correspond aux Mémoires de Sciences mathématiques (Analyse mathématique, Géométrie, Mathématiques appliquées) et donne des indications bibliographiques de 63 Mémoires.

Les autres renseignements que l'on peut trouver dans cette revue sont : l'indication du périodique où le Mémoire a été inséré; une analyse succincte du Mémoire; un Tableau statistique où les candidats sont classés par ordre de science et par département d'origine.

Recueil bibliographique important, tableau instructif de tous les progrès accomplis pendant ces dix dernières années, ce travail est destiné à rendre aux savants de véritables services.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 7. *SUPPLÉMENT.* JUILLET 1902.

CHRONIQUE.

La **British mathematical Association** tiendra sa prochaine réunion générale au Collège Royal, à Londres, le 2 octobre 1902.

★

La **Société scientifique de Bruxelles** propose, pour le Concours de 1902, le sujet suivant : Faire une étude critique des travaux de Simon Stevin sur la Mécanique, comparés à ceux de Galilée, Pascal et autres savants de la même époque.

★

Une **Encyclopédie des Mathématiques élémentaires,** en deux Volumes, par le Prof. H. Weber et le Dr J. Wellstein, est annoncée et en préparation. Cet Ouvrage est destiné aux professeurs et a pour but d'établir sur des bases plus solides les éléments des Mathématiques plutôt que d'en étendre les limites.

★

Agrégation; Concours de 1903 (Sciences mathématiques).

I. — Programme général d'Analyse et de Mécanique.

Le programme des certificats d'études supérieures variant d'une Université à l'autre, le jury indique, dans le programme ci-dessous, le minimum des connaissances générales qui sont supposées acquises par les candidats en Calcul différentiel et Mécanique :

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET CALCUL INTÉGRAL : *Opérations fondamentales du Calcul différentiel et du Calcul intégral.* — Dérivées et différentielles; intégrales simples, intégrales curvilignes, intégrales de différentielles totales; intégrales doubles et triples. — *Applications du Calcul différentiel.* — Étude des fonctions de variables réelles (formule et série de Taylor, maxima et minima, déterminants fonctionnels, fonctions implicites); calcul des dérivées et différentielles, changement de variables. — *Applications du Calcul intégral.* — Procédés d'intégration; longueur d'un arc de courbe, aires planes et gauches, volumes; différentiation de variables sous le signe $\int\int\ldots$; étude de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ quand une limite ou la fonction devient infinie; formule de Green; étude des fonctions représentées par des séries; propriétés des séries entières. — *Éléments de Géométrie infinitésimale.* — Propriétés infinitésimales des courbes planes et gauches (courbes enveloppes, courbure, torsion); propriétés infinitésimales des surfaces : surfaces enveloppes, surfaces développables, surfaces réglées; théorème de Meusnier, sections principales. Lignes de courbure, lignes asymptotiques, en coordonnées curvilignes quelconques. — *Théorie des fonctions analytiques.* — Fonctions élémentaires d'une variable complexe; fonctions algébriques simples, fonctions circulaires et logarithmiques. Propriétés de l'intégrale $\int f(z)\,dz$; séries de Taylor et de Laurent; pôles, points singuliers essentiels, résidus. Réduction des intégrales hyperelliptiques. — *Équations différentielles du premier ordre.* — Intégrale générale, intégrales particulières, intégrales singulières. Types simples d'équations intégrables; facteur intégrant. — *Équations différentielles et systèmes d'équations d'ordre quelconque.* — Intégrale générale, intégrales particulières, intégrales premières. Types simples d'équations intégrales. Équations linéaires. — *Intégration de l'équation aux dérivées partielles ou aux différentielles totales du premier ordre.*

Mécanique : *Statique.* — Composition des forces appliquées à un même point. Attraction d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur ou intérieur; propriétés élémentaires du potentiel. Réduction des forces appliquées à un corps solide. Conditions d'équilibre d'un corps solide; application aux machines simples. Polygone funiculaire; ponts suspendus; chaînette. Théorème du travail virtuel. — *Cinématique.* — Vitesse; accélération. Mouvement d'une figure plane dans son plan; représentation du mouvement par le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe. Mouvement d'un corps solide dans l'espace; mouvement hélicoïdal. Mouvements relatifs; théorème de Coriolis. — *Dynamique du point.* — Travail. Théorèmes généraux. Intégrales premières des équations du mouvement. Application au mouvement des planètes. Mouvement d'un point sur une courbe ou sur une surface; pendule dans le vide et dans un milieu résistant; pendule conique; lignes géodésiques. — *Géométrie des masses.* — Centres de gravité; moments d'inertie. — *Dynamique des systèmes.* — Théorèmes généraux intégrales premières. Énergie; stabilité de l'équilibre. Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe; pressions supportées par l'axe; pendule composé. Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Mouvement général d'un corps solide. Lois du frottement de glissement. Application du théorème des forces vives aux machines. Principe de d'Alembert. Équations de Lagrange; équations canoniques. Mouvements relatifs. Percussions. — *Hydrostatique.* — Équilibre d'une masse fluide; surfaces de niveau; pression contre une paroi plane; principe d'Archimède; équilibre des corps flottants. — *Hydrodynamique.* — Équations générales du mouvement d'une masse fluide. Théorème de Bernoulli; théorème de Torricelli.

II. — Programme des questions spéciales d'Analyse et de Mécanique d'où sera tiré le sujet d'une des compositions écrites.

Analyse : Fonctions uniformes doublement périodiques; périodes primitives; parallélogramme des périodes. Fonctions elliptiques; théorèmes généraux; pôles, résidus, zéros, ordre d'une fonction elliptique. Fonctions σ, $\wp$ de Weierstrass; propriétés élémentaires; formules d'addition; invariants g_2 et g_3. Notations de Jacobi; fonctions H, H_1, Θ, Θ_1, sn, cn, dn; propriétés élémentaires; formules d'addition; module et multiplicateur. Passage de l'un des systèmes de notation à l'autre. — Diverses formes que peut prendre une fonction elliptique : 1° décomposition en éléments simples (formule d'Hermite); 2° décomposition en facteurs; théorème de Liouville; 3° expression d'une fonction elliptique en fonction rationnelle de p et p'. Relation algébrique entre deux fonctions elliptiques aux mêmes périodes. Inversion de l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + \ldots + a_4}}$; réduction aux formes normales de Weierstrass et de Legendre. On admettra qu'à un système donné d'invariants g_2 et g_3, ou de module et de multiplicateur, correspond toujours un couple de périodes primitives permettant de construire les fonctions elliptiques correspondantes. Expression des périodes par des intégrales définies : 1° sur la forme normale de Weierstrass, dans le cas où g_2 et g_3 sont réels; 2° sur la forme normale de Legendre, dans le cas où k^2 est réel et compris entre 0 et 1. — Calcul de l'intégrale $\int \mathrm{R}\left(z, \sqrt{a_0 z^4 + \ldots}\right) dz$, où R est une fonction rationnelle de z et de la racine carrée d'un polynome du troisième ou du quatrième degré. Exemples : intégrales de deuxième et de troisième espèce. Étude des fonctions $\wp$, $\wp'$, sn, cn, dn, dans le cas où l'une des périodes est réelle, et l'autre purement imaginaire. Valeurs de l'argument rendant les fonctions réelles. Applications immédiates de la théorie des fonctions elliptiques aux courbes algébriques planes à singularités simples, et aux problèmes élémentaires se rattachant au programme général d'Analyse et de Mécanique indiqué ci-dessus.

Nota. — Pour les compositions écrites, les candidats seront autorisés à se servir d'un tableau imprimé, résumant les principales formules relatives aux fonctions elliptiques, publié par la librairie Gauthier-Villars.

Mécanique : Dynamique du corps solide; percussions.

III. — Sujets de leçons.

Mathématiques élémentaires. — 1. Supposant connus les principes de la théorie des nombres premiers, établir la formule qui fait connaître combien il y a de nombres inférieurs à un nombre donné et premiers avec lui. Théorème de Fermat. Généralisation de ce théorème. Théorème de Wilson. Applications. — 2. Extraction de la racine carrée à moins d'une unité; à moins de $\frac{1}{n}$. (Indiquer quelques méthodes abrégées.) — 3. Nombres positifs et négatifs; opérations sur ces nombres. — 4. Division algébrique. — 5. Résoudre et discuter : 1° l'équation $P + \sqrt{Q} = 0$, où P est un polynome du premier degré et Q un polynome du second degré; 2° l'équation $\sqrt{P} + \sqrt{Q} = a$, où P et Q sont des polynomes du premier degré et a une constante. Exemples tirés de la Géométrie. — 6. Calcul de π. — 7. Transformation par rayons vecteurs réciproques. Applications. — 8. Cercles orthogonaux dans le plan et sur la sphère. — 9. Cercles tangents à trois cercles donnés. Cas particuliers. — 10. Intersection d'une droite et d'une hyperbole; nombre de points d'intersection situés sur chaque branche; cas où la droite est tangente; cas où elle est asymptote. — 11. Démontrer que toute conique peut être considérée comme le lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques. Réciproque. Rapport anharmonique de quatre points sur une conique. Applications (Ouvrages à consulter : CHASLES, *Traité des coniques*; ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*). — 12. Involution sur une droite. Faisceaux en involution. Involution sur une conique. Applications. — 13. Transformation par semi-droites réciproques. Application à la construction d'un cycle touchant trois cycles donnés. (On pourra consulter le *Traité de Géométrie* de E. Rouché, 7e édition, p. 314.) — 14. Figures homothétiques dans l'espace. Centre d'homothétie. Axe d'homothétie. Plan d'homothétie. Application à un système de quatre sphères. — 15. Propriétés générales des polyèdres convexes. Théorème d'Euler. Applications. — 16. Vitesse. Étude de la vitesse dans quelques mouvements. Représentations graphiques. — 17. Composition des vitesses. Applications géométriques et mécaniques. — 18. Théorie des couples. Réduction à une force et à un couple d'un système de forces appliquées à un corps solide. Conditions d'équilibre. — 19. Équilibre d'un corps pesant sur un plan incliné dépoli, en supposant le corps soumis à l'action d'une force passant par son centre de gravité. — 20. Principes de la théorie des engrenages cylindriques. Exemples simples. — 21. Énoncé du principe général des forces vives. Application aux machines. Volants. — 22. Définition et détermination de la latitude et de la longitude d'un lieu, soit sur terre, soit sur mer. — 23. Cartes géographiques. — 24. *Géométrie descriptive.* — Rotations et rabattements. Applications. — 25. *Géométrie cotée.* — Représentation des droites et des plans. Intersection de droites et de plans. Droite perpendiculaire à un plan.

(*A suivre.*)

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 8. *SUPPLÉMENT.* Aout 1902.

CHRONIQUE.

Le **Catalogue international de la littérature scientifique** est en cours de publication. De la première année ont paru : le volume *D. Chimie* (1re Partie) et le volume *M. Botanique* (1re Partie).

★

Le **Centenaire de la naissance d'Abel** sera célébré en septembre prochain à Christiania. MM. Darboux et Picard représenteront à ces fêtes l'Académie des Sciences; M. Maurice Lévy, le Collège de France.

★

Agrégation; Concours de 1903 (Sciences mathématiques).

(SUITE ET FIN.)

IV. — Programme des matières d'où seront tirés les sujets des leçons de Mathématiques spéciales.

Convergence et divergence des séries. Règles élémentaires permettant de reconnaître la convergence ou la divergence d'une série. Règles de Gauss et de Duhamel. Séries à termes alternativement positifs et négatifs. Séries à termes imaginaires. Convergence absolue. Principales propriétés des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une variable complexe. Convergence uniforme. La variable étant supposée réelle, étudier la dérivée, l'intégrale de la série. Applications. Séries de Taylor et de Mac-Laurin dans le cas d'une variable réelle; applications. — Produits infinis de facteurs réels ou complexes. Convergence et divergence. Définition de $\sin z$ par un produit infini de facteurs complexes; montrer que, si z est réel, cette fonction coïncide avec la fonction considérée en Trigonométrie. — Fractions continues limitées et illimitées; fractions continues périodiques. — Propriétés générales des équations algébriques. Nombre des racines. Relations entre les coefficients et les racines. Calcul des fonctions symétriques des racines. Applications. Élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques entières (diverses méthodes). Équations à coefficients réels : nombre, séparation et calcul approché des racines réelles. — Transformation d'une équation algébrique $f(x) = 0$ dans le cas où chaque racine y de l'équation cherchée doit être une fonction rationnelle φ d'une ou de deux racines de l'équation donnée. Exemples. — Soit $y = \varphi(x)$ l'équation qui définit la transformation. On suppose que les coefficients des fonctions f et φ appartiennent à un certain domaine de rationalité dans lequel $f(x)$ est irréductible et l'on désigne par $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ les racines de l'équation $f(x) = 0$. Si les quantités $\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_{n-1})$ sont distinctes, elles sont racines d'une équation irréductible de degré n. Toute fonction rationnelle d'une racine α_0 dans le domaine considéré s'exprime rationnellement au moyen de $\varphi(\alpha_0)$. Cas où plusieurs des quantités $\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_{n-1})$ sont égales. Si les racines d'une équation irréductible s'expriment rationnellement au moyen de l'une d'entre elles, elles s'expriment rationnellement au moyen de l'une quelconque de ces racines. — Étant donnée, dans un certain domaine de rationalité, une équation $f(x) = 0$, on peut former, dans le même domaine, une équation irréductible $F(y) = 0$ telle que toutes les racines de $f(x) = 0$ soient des fonctions rationnelles de l'une quelconque des racines de $F(y) = 0$. Exemples. — Définition des invariants et des covariants d'une ou de deux formes binaires. Application aux formes des trois premiers degrés. Interprétations géométriques. Application à la résolution de l'équation du troisième degré. Invariants de la forme biquadratique. Rapport anharmonique de quatre quantités. Équation du sixième degré qui donne les six valeurs du rapport anharmonique : 1° des racines de l'équation du quatrième degré; 2° des racines de l'équation du troisième degré et d'un nombre donné x. Signification des invariants de la forme biquadratique. Relation fondamentale entre les covariants de la forme cubique. — Courbes planes. Ordre, classe; points doubles, points de rebroussement; tangentes doubles, tangentes d'inflexion. Genre. Formules de Plücker pour une courbe ne possédant que les singularités simples de l'espèce ci-dessus. Exemples choisis dans les courbes du troisième et du quatrième ordre. — Transformation quadratique birationnelle du plan : applications. — Formes quadratiques à trois ou quatre variables. Formes adjointes. Équations ponctuelles et équations tangentielles des coniques et des quadriques. Réduction simultanée de deux formes quadratiques à trois variables x, y, z, à des sommes de trois ou d'un nombre moindre de carrés. Triangle conjugué commun à deux coniques. Invariants simultanés de deux formes quadratiques à trois variables. Triangle inscrit ou circonscrit à une première conique et conjugué à une seconde conique. Triangle inscrit dans une conique et circonscrit à une autre. Application aux propriétés projectives et métriques. Propriétés analogues des cônes du second ordre. — Étude de la surface telle que les coordonnées homogènes d'un de ses points soient proportionnelles à quatre formes quadratiques données de trois paramètres : cas particuliers où la surface se réduit à une quadrique. Intersection de deux quadriques quand cette intersection se décompose. — *Géométrie descriptive*. — Surfaces de révolution. Surface gauche de révolution. Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXIV, nos 17 à 26. — Sur les séries divergentes et les équations différentielles; par M. *Edmond Maillet*. — Sur une classe de transformations de Bäcklund; par

M. *E. Goursat.* — Sur la formation des conoïdes droits; par M. *A. Demoulin.* — Le problème des surfaces chargées debout. Solution dans le cas du cylindre de révolution; par M. *Alban Gros.* — Sur quelques systèmes orthogonaux et leur application au problème de la déformation du paraboloïde de révolution; par M. de *Tannenberg.* — Sur une classe de transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre; par M. *J. Clairin.* — Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières et quasi entières; par M. *Edmond Maillet.* — Sur les rayons de convergence d'une série double; par M. *Eugène Fabry.* — Sur la représentation exponentielle générale et quelques-unes de ses applications; par M. *L. Desaint.* — Sur les fonctions de variables complexes; par M. *D. Pompéiu.* — Sur les fonctions abéliennes à multiplication complexe; par M. *G. Humbert.* — Sur les équations différentielles du second ordre qui admettent un groupe fini continu de transformations algébriques; par M. *Obriot.* — Sur deux problèmes de Géométrie; par M. *Servant.* — Sur les fonctions de genre infini; par M. *E. Borel.* — Un cas remarquable de transformation rationnelle; par M. *D. Gravé.* — Sur certains couples de surfaces applicables; par M. *Maurice Fouché.* — Sur l'intégration des systèmes différentiels complètement intégrables; par M. *E. Cartan.* — Sur la rupture et le déplacement de l'équilibre; par M. *Jouguet.* — Sur les fractions continues algébriques; par M. *de Montessus de Ballore.* — Sur une classe d'équations fonctionnelles; par M. *Ivar Fredholm.* — Sur l'intégration des systèmes différentiels complètement intégrables; par M. *E. Cartan.*

Atti della Reale Accademia dei Lincei, 1902. — *Ricci.* Formole fondamentali nella teoria generale delle varietá e della loso curvatura. — *Boggio.* Costruzione mediante integrali definiti di funzioni armoniche o poli-armoniche nell'area esterna ad un' ellisse, per date condizioni al contorno. — *Burgatti.* Sopra un teorema di Levi-Civita riguardante la determinazione di soluzioni particolari di un sistema Hamiltoniano. — *Palatini.* L'ordine della varietá che annulla i subdeterminanti di un dato grado di un determinante emisimmetrico. — *Marcolongo.* La deformazione del diedro retto isotropo per speciali condizioni ai limiti. — *Ricci.* Formole fondamentali nella teoria generale delle varietá e della loro curvatura. — *Daniele.* Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano. — *Pincherle.* Sulle serie di fattoriali. — *Bianchi.* Sulla deformazione delle superficie di rotazione.

OUVRAGES RÉCENTS.

Annuaire pour l'an 1902, publié par le *Bureau des Longitudes,* contenant les Notices suivantes : *La télégraphie sans fil;* par H. Poincaré. — *Les courants polyphasés;* par A. Cornu. — *Sur l'application de la division décimale du quart de cercle à la pratique de la navigation;* par E. Guyou. — *Observatoire du sommet du mont Blanc : création et travaux;* par J. Janssen (Paris, Gauthier-Villars).

Appell (P.), Membre de l'Institut. — *Cours de Mécanique à l'usage des candidats à l'École centrale.* In-8, avec 143 figures; 1902 (Paris, Gauthier-Villars).

Le nouveau programme d'admission à l'École centrale comporte l'étude de la Mécanique. C'est là une heureuse innovation : une fois les principes de la théorie des dérivées et de la Géométrie analytique bien compris, il vaut évidemment mieux, pour de futurs ingénieurs, les appliquer a des problèmes de Cinématique et de Mécanique comme ceux qui se rencontrent en Physique générale et en Mécanique qu'à des questions abstraites purement artificielles pour des jeunes gens qui ne sont pas destinés à approfondir les Mathématiques pures. Ce cours est le développement de ce Programme.

Berthelot (M.). — *Cinquantenaire scientifique de M. Berthelot* (1851-1901). *Compte rendu de la cérémonie du* 24 *novembre* 1901. *Discours. Adresses. Télégrammes.* Un beau Volnme in-4, avec 24 planches et titre en deux couleurs; 1902 (Paris, Gauthier-Villars).

Borel (Émile), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — *Leçons sur les séries à termes positifs*, professées au Collège de France, recueillies et rédigées par Robert d'Adhémar. Grand in-8, avec figures; 1902 (Paris, Gauthier-Villars).

L'étude des séries à termes positifs, qui est l'objet de ces Leçons, est étroitement liée à la théorie de la croissance et, par là, se rattache à bien des problèmes de la plus grande importance en Analyse et particulièrement en Théorie des fonctions. Il a déjà été question de plusieurs de ces problèmes dans les Ouvrages antérieurs de M. Borel sur la Théorie des fonctions. Une Théorie générale de la croissance devrait logiquement être l'introduction à toute étude d'Analyse; mais c'est seulement après avoir étudié séparément les diverses questions où la croissance intervient que l'on pourra tenter l'exposition complète de la théorie générale; les éléments de cette Théorie sont esquissés dans le Chapitre III de ces Leçons.

Freycinet (C. de), de l'Institut. — *Sur les principes de la Mécanique rationnelle.* In-8 de VIII-170 pages; 1902 (Paris, Gauthier-Villars).

L'Auteur a voulu reprendre, en Mécanique, la méthode que certains inclinent à délaisser.

Ayant eu seulement en vue d'éclaircir des points controversés, ce n'est pas un Traité qu'il présente ici, mais une simple Étude dans laquelle il cherche à mettre les esprits en garde contre une tendance qu'il regarde comme peu philosophique et même comme dangereuse. Si elle venait un jour à prévaloir, elle entraînerait un arrêt dans les progrès de la Dynamique et elle ne contribuerait certainement pas à développer dans la Science les habitudes d'observation.

Goursat (E.), Professeur à la Faculté des Sciences. — *Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris.* 2 Volumes grand in-8 (Paris, Gauthier-Villars).

Tome I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques,* avec figures; 1902. 20fr.

Tome II : *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations.* (*En préparation.*)

Cet Ouvrage est, à peu de chose près, le résumé du Cours de la Faculté des Sciences. L'Auteur a modifié légèrement sur quelques points l'ordre suivi dans l'enseignement, afin de réunir dans un même Volume tout ce qui concerne les fonctions de variables réelles, sauf l'étude des équations différentielles. La notation différentielle ne faisant pas partie du programme de la classe de Mathématiques spéciales, il a repris l'exposé de cette notation dès le début et suppose simplement le lecteur familiarisé avec le calcul des dérivées.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 9. SUPPLÉMENT. SEPTEMBRE 1902.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (fascicules II et III, 1902). — Recherches sur l'Hydrodynamique (deuxième partie); par M. *P. Duhem*. — Mémoire sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini; par M. *W. Stekloff*.

Action d'un oxyde ou d'un hydrate métallique sur les solutions des sels des autres métaux, sels basiques mixtes; par M. *Alphonse Mailhe*. — Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre; par M. *E. Goursat*. — Détermination des surfaces (W) à lignes de courbure isothermes; par M. *G. Demartres*.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure (avril à septembre 1902). — Sur les systèmes articulés gauches (*suite et fin*); par M. *Étienne Delassus*. — Recherches nouvelles sur la distribution des fractions rationnelles approchées d'une fonction; par M. *Henri Padé*. — Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique; par M. *W. Stekloff*. — Sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes et sur certaines substitutions linéaires qui s'y rapportent; par M. *R. Alezais*. — Sur les systèmes cycliques dont les plans enveloppent une sphère; par M. *L. Bianchi*. — Les groupes d'ordre p^t, q^t, p étant un nombre premier plus grand que le nombre premier q; par M. *R. Le Vavasseur*. — Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier; par M. *A. Hurwitz*.

Atti della Reale Accademia dei Lincei, 1902 (Vol. X, fasc. 12; Vol. XI, fasc. 1 à 4). — *Bianchi*. Sulle soluzioni comuni a due equazioni lineari a derivate parziali con due variabili independenti.

Bortollotti. Contributo alla teoria degli insiemi. — *Bianchi*. Sugli spazi a quatro dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti.

Ernesto Pascal. Sulla teoria invariantiva delle expressioni di differenziali totali di second'ordine, e su di una estensione dei simboli di Christoffel. — *Nicoletti*. Su una classe di equazioni a radici reali.

Bulletin de la Société mathématique de France (fascicule II, 1902). — MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS : Sur certaines surfaces algébriques. Troisième complément à l'*Analysis situs*; par M. *H. Poincaré*. — Sur les petits mouvements d'un corps pesant; par M. *L. Lecornu*. — Sur les barycentres cycliques dans les courbes algébriques; par M. *M. d'Ocagne*. — Sur une extension des formules de Gauss; par M. *M. Servant*. — Sur une classe de transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre; par M. *J. Clairin*. — Sur la déformation des surfaces et sur certaines transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre; par M. *L. Raffy*. — Sur les équations générales de l'élasticité; par M. *G. Combebiac*. — Sur une condition que l'on peut imposer à une surface; par M. *J. Hadamard*.

Bulletin des Sciences mathématiques (avril à septembre 1902). — COMPTES RENDUS ET ANALYSES : *Werner Roy*. Sur la *curvatura integra* et la topologie des surfaces fermées. — *Netto (E.)*. Lehrbuch der Combinatorik.

Teubner's Sammlung von Lehrbücher auf dem Gebiete der mathematischen. etc. — *Zoll* (*Otto*). Ueber Flächen mit Scharen von geschlossenen geodätischen Linien. — Mélanges : *Lebesgue* (*H.*). Sur les transformations de contact des surfaces *minima*. Bulletin bibliographique. — Revue des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus et analyses : Festschrift zur Feier des hundertfünfzigjährigen Bestehens der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zur Göttingen. Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingen. — *Vivanti* (*G.*). Teoria delle Funzioni analitiche. — *Ahl* (*Dr Fritz*). Untersuchungen über geodätische Linien. — *Tessari* (*D.*). La Costruzione delli ingranaggi ad uso delle scuole degli ingegneri e dei meccanici. — *Cellérier* (*Ch.*). Cours de Mécanique. — *Alezais* (*Raymond*). Sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes. — *Freycinet* (*C. de*). Sur les principes de la Mécanique rationnelle. — *Hamel* (*Georg*). Ueber die Geometrien in denen die Graden die Kürzesten sind. — Mélanges : *Picard* (*Émile*). Sur les intégrales doubles de fonctions rationnelles dont tous les résidus sont nuls. — Revue des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus et analyses : *Borel* (*E.*). Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France. — *Lemoine* (*E.*). Géométrographie ou art des constructions géométriques. — *Kommerell* (*Karl*). Die Krummung der zweidimensionalen Gebilde in ebenen Raum von vier Dimensionen. — *Heidke* (*Paul*). Ueber Kreisteilungsgleichungen von Primzahlgrad

$$p = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots p_\mu^{\pi_\mu} + 1 \; (\mu > 1).$$

— *Schur* (*I.*). Ueber eine Klasse von Matrizen die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen. — *Matter* (*Dr Karl*). Die den Bernoulli'schen Zahlen analogen Zahlen im Körper der tritten Einheitswurzeln. — *Epsteen* (*Dr Saül*). Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen 4. Ordnung und die zugehörigen Gruppen. — *Bouvier* (*E.*). La méthode mathématique en Économie politique. — *Dassen* (*C.-C.*). Metefisica de los conceptos matematicos fundamentales (espacio, tempo, cantidad, limite) y del analysis llamado infinitesimal. — Mélanges : *Delaunay* (*N.*). Sur les calculateurs cinétiques des fonctions elliptiques. — *Durand* (*André*). Sur un théorème relatif à des moyennes. Note relative à l'article précédent. Revue des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus et analyses : *Klein* (*F.*). Anwendung der Integralrechnung auf Geometrie. Eine Revision der Principien. Vorlesung differential und gehalten während des Sommersemesters 1901. — *Clairin* (*Jean*). Sur les transformations de Baecklund. — Mélanges : Thèses de Sciences mathématiques soutenues devant la Faculté des Sciences de Paris et devant les Facultés des Sciences des départements dans le courant du xixe siècle; par M. *Estanave*. — Revue des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus et analyses : *Goursat* (*E.*). Cours d'Analyse mathématique. Annales internationales d'Histoire, Congrès de Paris, 1900. 5e Section : Histoire des Sciences. — *Richard* (*Jules*). Sur la surface des ondes de Fresnel. — Mélanges : Thèses de Sciences mathématiques soutenues devant la Faculté des Sciences de Paris et devant les Facultés des Sciences des départements dans le courant du xixe siècle; par M. *Estanave*. — Revue des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus et analyses : *Hilbert*. Les fondements de la Géométrie. — Mélanges : Thèses des Sciences mathématiques soutenues devant la Faculté des Sciences de Paris et devant les Facultés des Sciences des départements dans le courant du xixe siècle; par M. *Estanave*. — Revue des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXV (n^{os} 1 à 11). — Sur le développement des fonctions analytiques en série de polynomes; par M. *Paul Painlevé.* — Sur un groupe nouveau d'ordre fini, linéaire à quatre variables; par M. *Léon Autonne.*

Application de la méthode de la moyenne arithmétique aux surfaces de Riemann; par M. *A. Korn.*

Sur la généralisation du prolongement analytique; par M. *Borel.* — Observation sur la Communication précédente; par M. *Painlevé.*

Sur une propriété curieuse d'une classe de surfaces algébriques; par M. *Émile Picard.* — Sur le problème de Dirichlet pour des domaines limités par plusieurs contours (ou surfaces); par M. *A. Korn.*

Sur les fonctions entières de genre fini; par M. *Lindelöf.*

Sur les fonctions entières et quasi entières et les équations différentielles; par M. *Ed. Maillet.* — Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes; par M. *R. Liouville.*

Sur l'irréductibilité des transcendantes uniformes définies par les équations différentielles du second ordre; par M. *Paul Painlevé.* — Sur les équations différentielles et la théorie des ensembles; par M. *Ed. Maillet.*

Journal de Mathématiques (fasc. II et III, 1902). — Sur les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients algébriques; par M. *Paul-J. Suchar.* — Sur l'hexacoryphe complet; par M. *Aristide Zoukis.* — Sur les cycles de surfaces algébriques; par M. *H. Poincaré.*

Sur la stabilité de l'équilibre relatif; par M. *P. Duhem.* — Symétrie tangentielle par rapport à une surface de révolution; par M. *Geminiano Pirondini.* — Sur les équations de certains groupes; par M. *de Séguier.* — Sur les séries de polynomes; par M. *H. Laurent.*

Le Matematiche pure ed applicate (avril à juin 1902). — *De Vries.* La configurazione formata dalle ventisette di una surperficie cubica. — *Giudice.* Teoremi relativi alla convergenza e divergenza delle serie numeriche. — NOTE : Valori di alcuni integrali. Sul soggetto di ricerche. Risoluzioni di questioni. Questioni da risolvere Bibliografia.

Gino-Loria. Le curve panalgebrique. — *Composto.* Sulla configurazione d'equilibrio d'un filo flessibile e inestendibile. — NOTE : Meccanica populare, Sulla questione n° 75. — Risoluzione di questioni. — Questioni proposte. Soggetti di ricerche. Bibliografia.

Duran-Loriga. Sopra una transformazione per rette isobariche. — *E. Barisien.* Contributo allo studio delle quartiche binodali. — *Barbarin.* Polygones réguliers sphériques et non euclidiens. — *Van Uven.* Su di un sistema di coordinate tangenziali. — *Delitala.* Si di un sistema di coordinate trilineari. — *Ripert.* Su due triangoli di Brocard ed una retta di Eulero. — NOTE : *E. Mathy.* Coordinate ellittiche. — Risoluzione di questioni. — Questioni proposte. — Soggetti di ricerche. — Bibliografia. — Notiziario.

OUVRAGES RÉCENTS.

GUILLAUME (Ch.-Ed.), Directeur adjoint du Bureau international des Poids et Mesures. — *La Convention du Mètre et le Bureau International des Poids et Mesures.* In-4, avec nombreuses figures; 1902 (Paris, Gauthier-Villars).

La description minutieuse des appareils et des méthodes du Bureau international des Poids et Mesures est exposée dans les quelque trente Volumes où sont consignés tous les actes de gestion et le détail des travaux de cet Établissement; mais cette publication si détaillée est trop étendue pour beaucoup de lecteurs et le désir de les voir résumer a été fréquemment exprimé par nombre de savants, physiciens, métrologistes ou professeurs. C'est le travail qu'a entrepris M. Ch.-Éd. Guillaume dans cet Ouvrage, et cette publication arrivait à point au moment où se réunissait la troisième Conférence du Mètre qui devait donner aux recherches du Bureau international de nouvelles directions.

PICARD (Émile), Membre de l'Institut. — *Quelques réflexions sur la Mécanique, suivies d'une première leçon de Dynamique.* Brochure in-8 de 56 pages; 1902 (Paris, Gauthier-Villars).

Ayant eu récemment à écrire un rapport général sur les Sciences à propos de l'Exposition universelle de 1900 en se plaçant à un point de vue général et philosophique, M. Picard a dû consacrer un Chapitre aux principes de la Mécanique et de l'Énergétique. Ce Volume se termine par la première Leçon de Dynamique faite, depuis 1894, à l'École centrale des Arts et Manufactures dans le Cours de Mécanique générale; dans certaines de ses parties, cette Leçon essentiellement élémentaire diffère sensiblement des expositions traditionnelles.

SERVICE GÉOGRAPHIQUE DE L'ARMÉE. — *Nouvelles Tables de Logarithmes à cinq décimales pour les lignes trigonométriques* dans les deux systèmes de la division *centésimale* et de la division *sexagésimale* du quadrant et *pour les nombres de* 1 *à* 12000. (*Édition spéciale à l'usage des candidats aux Écoles Polytechnique et de Saint-Cyr.*) Grand in-8 cartonné (Paris, Gauthier-Villars).

Le recueil de cette édition spéciale, qui ne comprend que les Tables à cinq décimales du recueil plus général des Tables à cinq et à quatre décimales du Service géographique de l'Armée, répond à la mesure prise par le Ministre de la Guerre : ce sera le recueil des candidats aux Écoles Polytechnique et de Saint-Cyr. Les professeurs de l'Université peuvent l'adopter en toute confiance pour la pratique de leur enseignement : le tirage en est fait sur planches clichées, rigoureusement vérifiées.

WOLF (C.), Membre de l'Institut, Astronome honoraire de l'Observatoire. — *Histoire de l'Observatoire de Paris, de sa fondation à* 1793. Grand in-8 de XII-392 pages avec 16 planches; 1902 (Paris, Gauthier-Villars.)

L'Histoire céleste de l'Observatoire est bien connue. Il n'en est pas de même de l'histoire des bâtiments et de leurs transformations successives; des instruments qui y ont été employés; des astronomes qui les ont habités et du régime sous lequel ils ont vécu. C'est cette histoire purement terrestre, celle qu'en langage administratif on appellerait l'*Histoire du matériel et du personnel de l'Observatoire*, que l'Auteur a essayé de reconstituer d'après des documents authentiques.

ZEUTHEN (H.-G.), Professeur à l'Université de Copenhague. — *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge.* Édition française revue et corrigée par l'Auteur, traduite par JEAN MASCART, Docteur ès sciences. In-8 de XV-296 pages, avec 31 figures; 1902 (Paris, Gauthier-Villars).

L'Auteur s'est efforcé de mettre principalement en relief ce qu'il importe aux étudiants et aux professeurs de savoir. L'essentiel est, pour eux, de pouvoir apprécier exactement les formes sous lesquelles vérités et méthodes se manifestèrent et quelles applications en furent faites; et, par la même occasion, la notion précise de ces origines sera la condition indispensable pour comprendre la lente évolution des formes, jusqu'à donner aux Mathématiques leur physionomie actuelle.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 10. *SUPPLÉMENT.* OCTOBRE 1902.

CHRONIQUE.

Nécrologie. — Au moment même où nous insérions, dans le présent numéro, plusieurs solutions de M. MAX GENTY, on nous annonçait sa mort, survenue à Toulon le 24 octobre dernier. Lieutenant de vaisseau, ancien Élève de l'École Polytechnique, M. Max Genty s'était déjà fait connaître par des travaux mathématiques témoignant d'un esprit pénétrant et de remarquables aptitudes. Depuis plusieurs années, il avait pris le grade de licencié ès sciences mathématiques. Il succombe aujourd'hui, à 35 ans, après une maladie foudroyante dont le germe a été contracté dans ses campagnes coloniales. La Rédaction des *Nouvelles Annales* tient à envoyer à la famille de ce jeune mathématicien l'expression sincère de toute la part qu'elle prend à sa douleur.

*

A l'occasion du **Centenaire de la naissance d'Abel,** l'Université de Christiania a conféré des grades honorifiques à un certain nombre de mathématiciens, parmi lesquels les Professeurs Simon Newcomb et J. Willard Gibbs.

*

L'**Association britannique pour l'avancement des Sciences** a ouvert son 22e Congrès à Belfast le 10 septembre : le Professeur James Dewar, qui présidait, y a fait une allocution. L'Association a été invitée à aller dans l'Afrique du Sud en 1905.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

OUVRAGES RÉCENTS.

ALEZAIS (R.). — *Sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes et sur certaines substitutions linéaires qui s'y rapportent.* In-4 de 200 pages, avec figures; 1901. (Paris, Gauthier-Villars.)

Ce travail est divisé en quatre Parties :

Dans la première est repris le calcul établissant que x et y sont fonctions de deux variables seulement et que ce sont des fonctions uniformes.

Dans la deuxième il fait l'étude du groupe des substitutions qui laissent invariables x et y, ou plus exactement du groupe provenant des rotations des points critiques les uns autour des autres.

Dans la troisième Partie M. Alezais passe aux substitutions qui multiplient par k la forme F.

Enfin, la quatrième Partie est un problème de transformation linéaire des fonctions θ de genre 3, qui conduit à un nouvel exemple concret de fonction hyperfuchsienne, et qui fournit le moyen de vérifier l'invariance des fonctions x et y étudiées dans la première Partie.

APPELL (P.), Membre de l'Institut, et CHAPPUIS (J.), Professeur à l'École Centrale. — *Leçons de Mécanique élémentaire*, conformes aux programmes du 31 mai 1902. 2 volumes in-18 jésus se vendant séparément. (Paris, Gauthier-Villars.)

I. *Volume à l'usage des élèves de la classe de première (latin-sciences, ou sciences-langues vivantes)*, avec 76 figures; 1903.
II. *Volume à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques;* 1903. (*Sous presse.*)

Les auteurs présentent dans ce petit Volume le développement commun aux classes de première (latin-sciences et sciences-langues vivantes), portant sur les notions géométriques et la Cinématique. Le développement du programme de la classe de Mathématiques fera l'objet d'un deuxième Volume. Ils se sont attachés scrupuleusement au programme en évitant les développements et la systématisation exagérée, et en choisissant toujours les exemples et les applications les plus familières aux élèves.

BONNEL (J.-F.), ancien Élève de l'École Normale supérieure, Agrégé des Sciences mathématiques, Professeur honoraire du lycée Ampère. — *La Géométrie atomique rationnelle.* In-8, avec figures; 1902. (Paris, Gauthier-Villars.)

Cet Ouvrage a un double but : justifier l'économie traditionnelle des programmes adoptés en France pour l'enseignement de la Géométrie élémentaire et simplifier l'application de ces programmes dans leurs points les plus difficiles.

Ce que l'auteur propose est une révolution complète dans des idées qui ont cours, mais une révolution facile et toute en faveur de l'allégement raisonné des études, et, en définitive, une science comme la Géométrie doit être d'un accès simple et populaire, dans sa théorie aussi bien que dans sa pratique, à l'encontre des plus hautes assertions et des habitudes les plus invétérées.

BREITHOF (N.), Professeur à l'Université de Louvain. — *La pratique du lavis.* Nouvelle édition publiée par Franz Beithof. Grand in-8 avec 3 planches. (Paris, Gauthier-Villars.)

Après avoir indiqué les manières de poser une teinte, les divers procédés de lavis et les précautions à prendre pour cette opération, l'auteur passe aux applications et exercices (lavis du prisme, de la pyramide, du cylindre, du cône, de la sphère, etc.). D'autres Chapitres traitent du dessin de machines, de l'Architecture et Génie civil.

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHYSIQUE. — *Travaux du Congrès international de Physique* réuni à Paris en 1900, sous les auspices de la Société française de Physique, publiés par CH.-ED. GUILLAUME et L. POINCARÉ, Secrétaires généraux du Congrès. Quatre Volumes grand in-8, avec figures. (Paris, Gauthier-Villars.)

TOME I : *Questions générales. Métrologie. Physique mécanique. Physique moléculaire.*
TOME II : *Optique. Électricité. Magnétisme.*
TOME III : *Électro-optique et ionisation. Applications. Physique cosmique. Physique biologique.*
TOME IV : *Procès-verbaux. Annexes. Liste des Membres;* 1901.
Le Tome IV vient de paraître.

L'intérêt de cette publication est plus général et plus durable que celui des comptes rendus ordinaires de congrès; les Secrétaires généraux ont su, en effet, grâce à leurs relations scientifiques, et aussi au prix d'un labeur acharné, réunir, mettre au point et publier une série de Rapports qui sont de véritables Mémoires de premier ordre. Les physiciens de tous les pays seront surpris de trouver dans ces documents un aussi grand nombre d'études nouvelles et intéressantes.

CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS (Exposition universelle de 1900). — *Rapports présentés au Congrès international des Mathématiciens,* réuni à Paris en 1900, rassemblés et publiés par E. DUPORCQ, Secrétaire général du Congrès. Grand in-8; 1902. (Paris, Gauthier-Villars.)

Le deuxième Congrès international des Mathématiciens s'est tenu à Paris du 6 au 12 août 1900; on sait que le Congrès de Zurich en avait confié l'organisation à la Société mathématique de France.

L'Exposition universelle qui avait lieu à Paris présentait elle-même un attrait si considérable qu'il eût été difficile d'organiser avec succès, pour les membres du Congrès, des excursions spéciales, ainsi que cela avait été fait à Zurich. Le Comité d'organisation a cru préférable de laisser toute liberté aux congressistes, et a dû se borner à quelques réunions, en dehors des séances proprement dites.

On trouvera ci-après, dans la Table des matières, l'exposé des séances, conférences et communications, par lequel le lecteur se rendra compte aisément de l'importance et de l'étendue des questions traitées par chacun des auteurs.

Ire PARTIE. *Documents et procès-verbaux.* Délégués officiels. Liste générale des Membres du Congrès. Emploi du temps. Compte rendu résumé du Congrès. Procès-verbaux. — IIe PARTIE. *Conférences.* Sur l'historiographie des Mathématiques, par MAURICE CANTOR. Betti, Brioschi, Casorati, trois analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'Analyse, par VITO VOLTERRA. Sur les problèmes futurs des Mathématiques, par DAVID HILBERT. Du rôle de l'intuition et de la logique en Mathématiques, par HENRI POINCARÉ. Une page de la vie de Weierstrass, par G. MITTAG-LEFFLER. *Communications.* Sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire quaternaire régulier, par LÉON AUTONNE. Remarks on Kronecker's modular systems, by HARRIS HANCOCK. Sur la distribution des nombres premiers, par HELGE VON KOCH. Sur le covariant résolvant de la forme binaire du cinquième ordre, par RAOUL PERRIN. The known systems of simple groups and their inter-isomorphism, by L.-E. DICKSON. A method of computing the common logarithm of a number without making use of any logarithm but that of some power of 10, by ARTEMAS MARTIN. A rigorous method of finding biquadrate numbers whose sum is a biquadrate, by ARTEMAS MARTIN. Un nouveau système irréductible de postulats pour l'Algèbre, par ALESSANDRO PADOA. Aperçu sur les développements récents de la théorie des fractions continues, par H. PADÉ. Sur l'évanouissement des fonctions Θ de plusieurs variables, par TIKHOMANDRITZKY. Sur une extension de la série de Taylor, par MITTAG-LEFFLER. Remarques, par E. BOREL. Nouveaux systèmes orthogonaux pour les dérivées des fonctions Θ de deux arguments, par E. JAHNKE. Sur les intégrales complètes des équations aux dérivées partielles du second ordre, par JULES DRACH. Sur les transformations de contact entre les lignes droites et les sphères, par E.-O. LOVETT. Sur les corps réguliers et semi-réguliers, par F.-J. VAES. Application of space-analysis to curvilinear coordinates, by Prof. ALEXANDER MACFARLANE. Coup d'œil sur les courbes algébriques, au point de vue de la gonalité, par FEDERICO AMODEO. Orthogonal transformations in elliptic, or in hyperbolic space, by IRVING STRINGHAM. Sur le théorème de M. Salmon concernant les cubiques planes, par V. JAMET. Un nouveau système de définitions pour la Géométrie euclidienne, par A. PADOA. Remarques sur le calcul des perturbations spéciales des petites planètes, par JEAN BOCCARDI. Sur les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles, par J. HADAMARD. Sur les équations aux dérivées partielles, par V

VOLTERRA. Note on the Mathematics of the old Japanese School, by R. FUJISAWA. Les Mathématiques et la Biologie, par ANGEL GALLARDO. Note sur la critique mathématique, par ZOEL G. DE GALDEANO. Le iperarithmetiche et l'indirizzo combinatorio dell'arithmetica ordinaria, par ALFREDO CAPELLI. Calcul graphique et calcul nomographique, par MAURICE D'OCAGNE. Sur l'utilité de la publication de certains renseignements bibliographiques en Mathématiques, par ED. MAILLET. Sur la langue internationale auxiliaire de M. le Dr Zamenhof, connue sous le nom d'*Esperanto,* par CH. MÉRAY. Les postulats de la Géométrie dans l'enseignement, par G. VERONESE.

DELASTELLE (F.). — *Traité élémentaire de Cryptographie.* Grand in-8; 1902. (Paris, Gauthier-Villars.)

La Cryptographie est une *science,* car un chiffreur, si habile qu'il soit, à qui l'on donne un texte à chiffrer, à l'aide d'une méthode ou d'une clef déterminées, ne peut trouver qu'une *seule et unique* version du texte imposé. Il lui suffit donc de faire un travail analogue aux opérations arithmétiques, et il ne peut y rien changer sans rendre le cryptogramme inintelligible à son correspondant. Il n'existe qu'une seule exception : la méthode dite *à clef brisée* permet à l'expéditeur de faire varier la contexture des cryptogrammes sans compromettre la traduction.

La plupart des traités ne sont en quelque sorte que des catalogues plus ou moins complets et détaillés de systèmes divers. L'auteur a cru faire œuvre utile en groupant tous ces systèmes et en les discutant de manière à en déduire les principes généraux.

FOUET (ÉDOUARD-A.), Professeur à l'Institut catholique. — *Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.*

Ire PARTIE (Chapitres I à V). Grand in-8, avec 35 figures; 1902. (Paris, Gauthier-Villars.)

Il est certain qu'en Analyse on se prive d'un secours précieux en se bornant à la considération des seules fonctions analytiques, mais il n'est pas moins vrai que ces fonctions sont les plus obvies, les plus utiles et les plus intéressantes. C'est sur elles que depuis cinquante ans l'effort des géomètres s'est spécialement porté : leurs propriétés ont été approfondies et étendues, de nombreux théorèmes ont montré le parti qu'on en pouvait tirer dans toutes les branches de l'Analyse. Il y a donc un grand intérêt à préparer la lecture des grands Traités d'Analyse et des Mémoires originaux en groupant, pour les étudiants des Facultés des Sciences, les matières éparses dans de nombreux Ouvrages didactiques ou dans les revues, et en les isolant de questions plus complexes. C'est ce que l'auteur a tenté de faire dans cet Ouvrage.

GODEFROY (MAURICE), Bibliothécaire de la Faculté des Sciences de Marseille. — *Théorie élémentaire des séries. Limites. Séries à termes constants. Séries à termes variables. Fonction exponentielle. Fonctions circulaires. Fonction gamma.* Avec une Préface de L. SAUVAGE, Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille. Un Volume grand in-8 de VIII-266 pages, avec figures; 1903. (Paris, Gauthier-Villars.)

Cet Ouvrage, essentiellement pratique, est bien propre à inspirer aux débutants le goût de l'Analyse et à leur ouvrir sur certains points des aperçus nouveaux. Il comprend, du reste, des matières qui figurent dans les programmes de concours et d'examens pour les grandes Écoles et les Certificats universitaires. Aussi rendra-t-il d'incontestables services aux professeurs dans la préparation de leurs Cours et aux élèves pour le perfectionnement de leurs études. Enfin ceux-là même qui cultivent les Mathématiques pour l'unique satisfaction d'un penchant de leur esprit trouveront quelque agrément à feuilleter ces pages.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 11. *SUPPLÉMENT.* NOVEMBRE 1902.

CHRONIQUE.

On annonce que M. **Robert Lebaudy** a fait parvenir au vice-recteur de l'Université de Paris une somme de 7000$^{\text{fr}}$ destinée à entretenir deux étudiants à l'Université de Chicago pendant un an.

★

Université de Paris (Faculté des Sciences).

(ANNÉE SCOLAIRE 1902-1903, PREMIER SEMESTRE).

Géométrie supérieure. — M. G. DARBOUX, professeur, traitera des principes généraux de la Géométrie infinitésimale.

Calcul différentiel et Calcul intégral. — M. GOURSAT, professeur, traitera des intégrales définies et des fonctions analytiques.

Mécanique rationnelle. — M. PAUL APPELL, professeur, traitera des lois générales de l'équilibre et du mouvement.

Astronomie mathématique et Mécanique céleste. — M. H. POINCARÉ, professeur, traitera de la théorie des marées.

Calcul des probabilités et Physique mathématique. — M. BOUSSINESQ, professeur, exposera la théorie des phénomènes ondulatoires.

Mécanique physique et expérimentale. — M. G. KŒNIGS, professeur. Cinématique théorique et de son application à l'étude des mécanismes. — La Statique graphique et les figures réciproques. — Principes de la théorie de l'élasticité.

COURS ANNEXES.

Éléments d'Analyse et de Mécanique. — M. RAFFY, professeur adjoint, chargé du cours, exposera les principales théories mathématiques qui servent d'introduction à divers enseignements scientifiques (notions de Géométrie analytique, dérivées et intégrales, équations différentielles, lois générales de l'équilibre, mouvement des points et des systèmes).

Astronomie mathématique et Mécanique céleste. — M. ANDOYER, professeur adjoint, chargé du cours, traitera du mouvement de rotation des corps célestes autour de leur centre de gravité.

CONFÉRENCES.

Sciences mathématiques. — M. RAFFY, professeur adjoint, fera des conférences sur la Géométrie supérieure, en vue du certificat correspondant; M. HADAMARD, professeur adjoint, fera des conférences sur le Calcul différentiel et le Calcul intégral; M. P. PUISEUX, professeur adjoint, fera des conférences sur la Mécanique, exercices et développements sur le programme du certificat de Mécanique rationnelle, théorie de l'attraction, attraction des ellipsoïdes; M. ANDOYER, professeur adjoint, fera des conférences aux candidats à l'agrégation des Sciences mathématiques; M. HADAMARD, professeur adjoint, fera une conférence par semaine aux candidats à l'agrégation des Sciences mathématiques; M. BLUTEL, chargé de conférences, fera une conférence par semaine aux candidats à l'agrégation des Sciences mathématiques; M. SERVANT, chef des travaux pratiques de Mécanique physique, fera des conférences sur les questions indiquées par le professeur.

*

Collège de France. — 1^{er} semestre 1902-1903.

Mécanique analytique et Mécanique céleste. — M. Maurice LÉVY, membre de l'Institut, Académie des Sciences, professeur. M. HADAMARD, suppléant, traitera du Calcul des variations, puis des équations aux dérivées partielles dans la Mécanique des milieux déformables.

Mathématiques. — M. JORDAN, membre de l'Institut, Académie des Sciences, traitera des équations différentielles.

Physique générale et mathématique. — M. BRILLOUIN fera l'étude théorique détaillée de la production, de la propagation et de la réception des ondes électriques à travers l'espace et du rôle de la Terre.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

OUVRAGES RÉCENTS.

MOUREU (CH.), Professeur agrégé à l'École supérieure de Pharmacie de Paris. — *Notions fondamentales de Chimie organique.* In-8 de VI-292 pages. (Paris, Gauthier-Villars.)

Ouvrir l'esprit de l'élève en l'initiant graduellement au mécanisme des transformations de la matière et en lui présentant les grandes lignes de la Science avec le relief qui leur convient, le préparer ainsi à suivre, avec fruit, un *Cours complet* et à faire un Ouvrage profitable des *Traités* proprement dits, tel est le but poursuivi par la publication de ce petit Ouvrage, qu'on peut considérer comme une « Introduction à l'étude de la Chimie organique ». Les étudiants des Facultés des Sciences, surtout ceux du Cours du certificat P. C. N., ceux de l'École de Pharmacie, les élèves de l'École Polytechnique et de l'École Centrale trouveront dans cet Ouvrage une base solide pour leurs études de Chimie organique.

RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, publié par la COMMISSION PERMANENTE DU RÉPERTOIRE. Paraît successivement par séries de 100 fiches format in-32, renfermées dans un étui en papier fort. Chaque série, 2fr.

Les douze premières séries, fiches 1 à 1200, 1894-1902, sont en vente. (Paris, Gauthier-Villars.)

RUCHONNET (CHARLES). — *Exposition géométrique des propriétés géné-*

rales des courbes. 6^e édition augmentée et accompagnée de 7 planches. In-8 de 216 pages; 1901. (Paris, Gauthier-Villars.)

Les propriétés fondamentales des lignes sont établies dans cette exposition à l'aide seulement des premiers éléments de la Science mathématique en y comprenant la Trigonométrie, et des trois ou quatre principes sur lesquels repose l'emploi des infiniment petits. Ainsi que l'indique le nom donné à ce travail, le calcul n'y joue qu'un très faible rôle, et le raisonnement est habituellement fait sur la figure. On trouvera dans cette édition, entre autres choses qui ne figuraient pas dans la précédente, une théorie nouvelle du cône rond osculateur à la surface lieu des tangentes d'une ligne non plane.

SERVICE GÉOGRAPHIQUE DE L'ARMÉE. — *Nouvelles Tables de logarithmes à cinq décimales pour les lignes trigonométriques* dans les deux systèmes de la division *centesimale* et de la division *sexagésimale* du quadrant, et *pour les nombres de* 1 *à* 12000, suivies des mêmes Tables à quatre décimales et de diverses Tables et formules usuelles. 2^e édition revue et corrigée. Grand in-8 cartonné; 1901. (Paris, Gauthier-Villars.)

Ce Recueil renferme une série de Tables de logarithmes à cinq et à quatre décimales qui sont principalement utiles aux géodésiens, aux géomètres et aux astronomes. Il contient en particulier les logarithmes des lignes trigonométriques dans les deux systèmes de la division centésimale et de la division sexagésimale du quadrant.

Le Service géographique de l'Armée a été amené à l'éditer, concurremment avec un Recueil de logarithmes à huit décimales, pour remplacer les Tables décimales de Borda, qui sont actuellement épuisées, et pour répondre au besoin qui se fait de plus en plus sentir de l'emploi de la division centésimale du quadrant pour la mesure des angles. Cette division présente en effet, sur la division sexagésimale, des avantages indiscutables pour l'exécution des calculs.

TANNERY (JULES), Sous-Directeur des Études scientifiques à l'École Normale supérieure, et MOLK (JULES), Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. — *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques.* 4 Volumes grand in-8, se vendant séparément. (Paris, Gauthier-Villars.)

Le quatrième et dernier Volume de ce bel Ouvrage vient de paraître, complétant ainsi une œuvre singulièrement utile à tous ceux qui veulent étudier les fonctions elliptiques.

APPELL (Paul), Membre de l'Institut. — *Traité de Mécanique rationnelle* (Cours de Mécanique de la Faculté des Sciences). 3 volumes grand in-8, se vendant séparément. (Paris, Gauthier-Villars.)

TOME I : *Statique. Dynamique du point,* avec 178 figures. 2^e édition, entièrement refondue; 1902.

TOME II : *Dynamique des systèmes. Mécanique analytique,* avec 99 figures; 1896.

TOME III : *Équilibre et mouvement des milieux continus,* avec 70 figures; 1903.

Ce Traité est le résumé des leçons faites depuis plusieurs années à la Faculté des Sciences de Paris sur le programme de la licence. Comme la Mécanique était, jusqu'à présent, à peine enseignée dans les lycées, l'auteur ne suppose chez le lecteur aucune connaissance de cette Science; il commence par l'exposition des notions préliminaires indispensables, théorie des vecteurs, cinématique du point et du corps solide, principes de la Mécanique, travail des forces. Vient ensuite la Mécanique proprement dite, divisée en Statique et Dynamique.

Ce qui fait le caractère distinctif de cet Ouvrage et ce qui justifiera la publication d'une nouvelle Mécanique rationnelle, c'est l'introduction de la Mécanique analytique dans les commencements mêmes du cours.

Callandreau (O.). — *Aperçu des méthodes pour la détermination des orbites des comètes et des planètes.* In-4 de 135 pages; 1902. (Paris, Gauthier-Villars.)

Les découvertes des dernières années en ce qui concerne les petites planètes et les comètes périodiques invitent les astronomes à reviser les méthodes, en les rendant aussi simples que possible, en écartant les développements purement mathématiques qui éloignent l'attention de l'objet même à atteindre. Il semble, en effet, préférable de laisser au calculateur la liberté de se mouvoir, après avoir assigné les étapes de la route à parcourir, en caractérisant les éléments essentiels des problèmes à résoudre, en faisant choix des formules le plus aisément assimilables à l'esprit dans l'état actuel de la Science, en rappelant enfin, à propos, les essais des inventeurs qui sont trop souvent négligés. Tel est l'objet de l'étude de M. Callandreau.

Sicard (H.), ancien Professeur de Mathématiques au Lycée de Périgueux. — *Traité de Cinématique théorique,* avec des *Notes* par A. Labrousse, ancien Élève de l'École Normale supérieure, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse. Grand in-8 avec nombreuses figures; 1901. (Paris, Gauthier-Villars.)

Ampère a donné le nom de *Cinématique* à la *Géométrie du mouvement* considérée dans ses rapports avec le *temps.*

On évalue le *temps* en donnant comme égaux les intervalles qui correspondent à l'accomplissement de phénomènes identiques. De cette définition on passe à la mesure du temps de la même manière dont on passe, par un exemple connu, de la définition des longueurs égales à la mesure de la longueur en général.

L'*instant* n'a pas de durée.

Le *mouvement* est un phénomène d'ordre relatif.

Soit S_1 un ensemble de points liés entre eux de manière à former un *système géométrique invariable,* c'est-à-dire toujours superposable à lui-même. Un point ou *mobile* est en *mouvement* ou en *repos* dans ce système suivant que ses distances aux points du système varient avec le temps ou restent les mêmes. Mais le système S_1 emportant avec lui le mobile peut se mouvoir en bloc, dans un système plus vaste S_2, celui-ci dans un autre..., il est clair que par rapport au dernier système considéré, ou *système fixe,* le mouvement du *mobile* dépend des mouvements intermédiaires.

Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures, publiés par le *Directeur* du Bureau, Tome XII. Grand in-4, avec figures et planches. (Paris, Gauthier-Villars.)

Ce Volume contient : Détermination du rapport du yard au mètre; par M. *J.-René Benoît.* — Mètres à bout; par MM. *J.-René Benoît* et *Ch.-Ed. Guillaume.* — Comparaison du thermomètre à résistance de platine avec le thermomètre à gaz et détermination du point d'ébullition du soufre; par MM. *P. Chappuis* et *J.-A. Harker.* — Comptes rendus des première, deuxième et troisième Conférences générales des Poids et Mesures réunies à Paris en 1889, 1895 et 1901.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 12. *SUPPLÉMENT.* DÉCEMBRE 1902.

CHRONIQUE.

Le III^e **Congrès international des Mathématiciens** se tiendra à Heidelberg, dans les premiers jours d'août 1904, sous la présidence de M. *H. Weber* (de l'Université de Strasbourg).

★

Le professeur **H. Minkowski,** de l'École polytechnique de Zurich, a été nommé professeur associé à l'Université de Göttingen.

★

Le 15 décembre, l'**Université de Klausenberg** célébrera le centième anniversaire de la naissance de Jean Bolyai.

★

Le professeur **L.-E. Dickson,** de l'Université de Chicago, a été dernièrement associé au professeur B.-F. Finkel, du Drury College, comme éditeur de l'*American mathematical Monthly*. M. J.-M. Colan, le précédent éditeur associé de la *Monthly,* cesse de s'occuper de cette publication.

★

Le D^r **J.-W. Miller** a été nommé répétiteur de mathématiques et d'astronomie à l'Université de Lehig.

★

Une réunion ordinaire de l'**American mathematical Society** a eu lieu à l'Université de Colombie le 25 octobre. L'assistance était nombreuse. On y voyait beaucoup de membres de la Société. C'est M. Maxime Böcher, vice-président, qui préside la séance du matin, et M. Woodward, ex-président, pendant la séance du soir.

On annonce d'abord l'élection des personnes suivantes comme membres de la Société : le professeur R.-S. Ball, Université de Cambridge, Angleterre; le D^r Otto Dunkel à l'Université Wesléienne, à Middletown; M. W.-H. Osborne, à Lafayette; le professeur H.-S. Rietz, Butler College, à Indianopolis; le professeur J.-H. Scott, Yankton College, à Yankton; le professeur B.-F. Vanney, Mount Union College, à Alliance (Ohio); M. W.-H. Young, à l'Université de Cambridge, Angleterre; le professeur I.-N. Van der Vries, à l'Université du Kansas, à Laurence (Kansas).

Le conseil présente une liste de nominations au titre de membres du conseil de la Société, par anticipation sur l'élection annuelle qui aura lieu à la réunion de décembre.

Un comité est désigné pour régler la prochaine réunion, pendant laquelle on organisera une discussion et une série de conférences sur des points spéciaux de Mathématiques.

Les Ouvrages suivants ont été présentés à la Société pendant la même réunion :

Dr E.-R. HEDRICK, *Sur les fondements de la Mécanique.*

Professeur PETER FIELD, *Sur les branches infinies des courbes planes, qui n'ont pas de points singuliers.*

Professeur MAXIME BÖCHER, *Une application du théorème de Gran généralisé par Riemann et Darboux.*

Professeur MAXIME BÖCHER, *Notes sur les équations de Laplace.*

Dr G.-H. LING, *La représentation approximative d'une fonction par un ensemble de fonctions définies par des équations quadratiques*, etc.

La prochaine réunion de la Société aura lieu les 27 et 30 décembre; elle sera occupée par l'élection des membres du conseil et par l'allocution du président.

*

Deux nouvelles séries de **modèles pour les Mathématiques et la Physique** sont publiées chez Martin-Schilling, de Halle. La première, dessinée par le professeur F. Klein et construite par le professeur Fr. Schilling et le Dr W. Ludwig, représente les ellipse, parabole et hyperbole cubiques tracées sur les cylindres correspondants, la surface tangente à l'ellipse cubique, en tout six modèles. La seconde série, construite par le professeur Fr. Schilling et le Dr H. Grassmann, comprend trois modèles explicatifs des mouvements épicycloïdal, péricycloïdal, etc.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXV, nos 13 à 22. — Sur la déformation continue des surfaces; par M. *G. Tzitzéica.*

Remarque sur un problème de Clebsch sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini et sur le problème de M. de Brun; par M. *W. Stekloff.* — Sur un théorème de M. Frobenius; par M. *de Séguier.*

Sur l'habillage des surfaces; par M. *Servant.*

Démonstration de l'irréductibilité absolue de l'équation $y'' = 6y^2 + x$; par M. *Paul Painlevé.* — Sur la théorie des fonctions algébriques; par M. *L. Schlesinger.* — Sur l'équation de Bessel avec second nombre; par M. *A.-S. Chessin.* — Sur un exemple de transformation corrélative en Mécanique; par M. *P.-J. Suchar.*

Sur la résolution nomographique du triangle de position pour une latitude donnée; par M. *Maurice d'Ocagne*. — Sur les transcendantes uniformes définies par les équations différentielles du second ordre; par M. *R. Liouville*.

Sur les transcendantes uniformes définies par l'équation $y'' = 6y^2 + x$; par M. *Paul Painlevé*. — Sur les substitutions crémoniennes dans l'espace; par M. *Léon Autonne*. — Sur la rupture et le déplacement de l'équilibre; par M. *Jouguet*. — Sur l'équivalence des systèmes différentiels; par M. *E. Cartan*. — Sur certaines égalités remarquables; par M. *W. Stekloff*.

Sur la représentation approchée des fonctions; par M. *W. Stekloff*.

Sur les fonctions monodromes à point singulier essentiel isolé; par M. *Edmond Maillet*. — Sur une extension de la notion de périodicité; par M. *Esclangon*.

Sur quelques conséquences de certains développements en séries analogues aux développements trigonométriques; par M. *W. Stekloff*.

Sur les congruences à plusieurs inconnues relativement à un nombre premier impair; par M. *R. Levavasseur*. — Sur la généralisation des fractions continues: par M. *Auric*. — Sur les transcendantes uniformes, définies par des équations différentielles du second ordre; par M. *R. Liouville*.

American Journal of mathematics, juillet et octobre 1902 (fascicules 3 et 4). — Die Typen der linearen Complexe elliptischer Curven im Rr (*S. Kantor*). — Generalization of the differentiation process (*Robert E. Moritz.*) — Simple pairs of parallel W-surfaces (*Henry Dallos Thompson*). — On systems of linear differential equations of the first order (*Maxime Böcher*). — On the quaternary linear homogeneous group and the ternary linear fractional group (*T.-N. Putman*). — On cardinal numbers (*A.-N. Whitehead*). — On a method of constructing all the groups of order p^m (*G.-A. Miller*). — Non-euclidean properties of plane cubics and of their first and second polars (*H.-F. Stecker*).

OUVRAGES RÉCENTS.

Riem (J.). — *Tables de multiplications pour le Commerce et l'Industrie*, avec un Avant-propos de M. le Professeur Dr H. Kinkelin. 2e édition stéréotype. Un volume petit in-4; 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

Les présentes Tables de Calcul contiennent les produits de tous les nombres de un et deux chiffres par les nombres de un jusqu'à cinq chiffres. Œuvre personnelle de M Riem, elles constituent un précieux apport à la collection des Tables mathématiques et peuvent être vivement recommandées à tout calculateur.

Boltzmann (L.), Professeur à l'Université de Leipzig. — *Leçons sur la Théorie des gaz*, traduites par A. Gallotti, ancien Elève de l'Ecole Normale supérieure, Professeur au Lycée d'Orléans. Avec une *Introduction* et des *Notes* de M. Brillouin, Professeur au Collège de France. Ire **Partie**. Grand in-8 de xix-204 pages avec figures, 1902 (Paris, Gauthier-Villars).

Dans cette première Partie de son Ouvrage, M. Boltzmann envisage successivement les trois hypothèses suivantes : I. Les molécules sont des sphères élastiques; il n'y a pas de forces extérieures ni de mouvements d'ensemble sensibles. II. Les molécules sont des centres de force; cas des forces extérieures et des mouvements d'ensemble sensibles. III. Les molécules se repoussent avec une force inversement proportionnelle à la cinquième puissance de leur distance.

D'autres hypothèses, en particulier celle de Van der Waals relative à la force de cohésion, seront étudiées dans le second Volume, dont la traduction est en préparation.

CONGRÈS INTERNATIONAL DE CHRONOMÉTRIE (Exposition universelle de 1900). — *Comptes rendus des Travaux, Procès-verbaux, Rapports et Mémoires*, publiés sous les auspices du Bureau du Congrès, par MM. E. FICHOT et P. DE VANSSAY, Secrétaires. In-4 de XL-254 pages, avec figures; 1902 (Paris, Gauthier-Villars).

En raison même de la précision des travaux chronométriques déjà exécutés, il y avait, dans la science si délicate de la mesure du temps, bien des questions à mettre au point.

C'est ce qu'a essayé, non sans succès, le Congrès international de 1900.

Tout y a été discuté : le choix d'une unité de temps indépendante du mouvement diurne; le problème, toujours si intéressant, de la compensation des balanciers; le réglage des baromètres de poche; enfin l'application, réellement curieuse, du mouvement à billes dans les mécanismes d'horlogerie.

Un semblable Volume marque donc, pour la Chronométrie, un progrès sérieux qui intéresse les astronomes, les physiciens, les marins, en général tous ceux qui se servent des appareils de précision et aussi tous ceux qui les construisent.

JOURNÉE, Lieutenant-Colonel au 69e régiment d'Infanterie. — *Tir des Fusils de chasse*. 2e édition entièrement refondue. Un beau volume grand in-8 de VI-387 pages, avec 147 figures; 1902 (Paris, Gauthier-Villars).

Pour lire et goûter cet Ouvrage, point n'est besoin d'être un adepte de la balistique, non plus que d'être un virtuose du *hammerless* : tous ceux qui aiment à se rendre compte de ce qu'ils font, et à le bien faire, s'agît-il d'un plaisir intermittent, trouveront un vif intérêt dans cette suite d'exposés clairs, précis, catégoriques, et grand profit pratique dans les conseils qui en découlent.

SOLLET (CH.). — *Traité pratique des tirages photographiques*, avec une Préface de C. PUYO. In-16 raisin de VII-240 pages; 1902 (Paris, Gauthier-Villars).

A tous les amateurs qui veulent se donner le délicat plaisir de tirer leurs clichés et d'amener leur œuvre à son point définitif, ce Livre sera un aide précieux car il est publié non par un théoricien, mais par un artiste qui a dompté toutes les difficultés des divers procédés dont il parle.