NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. DUPORCQ

Remarque sur la note précédente

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 181-184

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__181_1>

[O3k]

REMARQUE SUR LA NOTE PRÉCÉDENTE;

PAR M. E. DUPORCQ.

Dans la Note précédente, M. Piccioli ne met pas en évidence ce fait que, si une hélice tracée sur un cylindre est telle que ses normales principales rencontrent une droite, il en est de même de toutes les hélices tracées sur le même cylindre.

Il suffit, en effet, de remarquer que les normales principales à l'hélice sont normales au cylindre : leurs projections orthogonales sur un plan de section droite seront donc les normales à cette section : soit mm' une de ces projections, normale en m à la section droite, et coupant en m' la projection de la droite fixe envisagée. Il est bien évident que, si $m_1 m'_1$ est une autre position de mm', l'arc mm_1 et le segment $m_1 m'_1$ sont constamment proportionnels, et que cette condition est suffisante pour que les normales principales à une hélice quelconque tracée sur le cylindre coupent une droite, dont la projection reste fixe, quelle que soit l'hélice.

On est donc ramené au problème suivant :

Trouver les courbes planes telles que leurs normales découpent sur une droite fixe des segments proportionnels aux arcs décrits par leurs points d'incidence.

Ce problème est des plus simples : on peut employer une méthode analogue à la précédente : si (x, y), (x', y'), sont les coordonnées de m et m', (a, a') et (b, b') les cosinus directeurs de la tangente et de la normale à la courbe (m), enfin h le segment mm', on a

$$x' = x + bh, \qquad y' = y + b'h,$$

et l'on doit avoir

$$\frac{dx'}{ds} = \text{const.}, \qquad \frac{dy'}{ds} = \text{const.},$$

ou

$$\frac{d^2 x'}{ds^2} = 0, \qquad \frac{d^2 y'}{ds^2} = 0.$$

Or, en tenant compte des formules

$$\frac{da}{ds} = \frac{b}{\rho},$$

$$\frac{db}{ds} = -\frac{a}{\rho},$$

où ρ désigne le rayon de courbure de (m) en m, on a

$$\frac{d^2x'}{ds^2} = \frac{ah}{\rho\, ds}\left(\frac{d\rho}{\rho} - \frac{2\,dh}{h}\right) + b\left(\frac{d^2h}{ds^2} + \frac{1}{\rho} - \frac{h}{\rho^2}\right) = 0,$$

$$\frac{d^2y'}{ds^2} = \frac{a'h}{\rho\, ds}\left(\frac{d\rho}{\rho} - \frac{2\,dh}{h}\right) + b'\left(\frac{d^2h}{ds^2} + \frac{1}{\rho} - \frac{h}{\rho^2}\right) = 0.$$

On en déduit

$$\frac{d\rho}{\rho} - 2\frac{dh}{h} = 0,$$

$$\frac{d^2h}{ds^2} + \frac{1}{\rho} - \frac{h}{\rho^2} = 0.$$

De la première équation on tire

$$h = \sqrt{\alpha\rho}, \tag{1}$$

et, par suite, de la seconde

$$\left(1 - \frac{\alpha}{h}\right)^2 + \left(\frac{dh}{ds}\right)^2 = \beta.$$

d'où

$$ds = \frac{h\,dh}{\sqrt{\beta^2h^2 - (h-\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{\alpha}\,d\rho}{2\sqrt{(\beta^2-1)\rho + 2\sqrt{\alpha\rho} - \alpha}},$$

ou, en désignant par A et B deux constantes arbitraires

$$ds = \frac{A\,d\rho}{2\sqrt{B\rho + 2A\rho^{\frac{1}{2}} - A^2}},$$

équation intrinsèque des courbes cherchées.

La formule (1) montre que *le segment mm′ compris sur la normale entre la courbe et la droite fixe est constamment proportionnel à la racine carrée du rayon de courbure en m*. Il serait intéressant d'avoir de cette propriété une démonstration de Géométrie infinitésimale.