NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. DESAINT

Un théorème général sur les surfaces de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 184-186

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__184_1>

[M¹9]

UN THÉOREME GÉNÉRAL SUR LES SURFACES DE REVOLUTION;

PAR M. L. DESAINT.

On connaît la proposition suivante :

Toute section plane d'un paraboloïde de révolution se projette sur un plan perpendiculaire à l'axe de ce paraboloïde suivant un cercle.

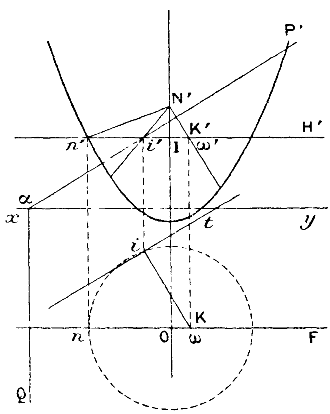
Ce théorème admet une réciproque que j'exposerai ainsi sous sa forme la plus générale :

Lorsqu'une surface de révolution indécomposable est coupée par un plan (différent d'un parallèle) suivant une courbe dont la projection de la partie reelle sur un plan perpendiculaire à son axe est un cercle (simple ou multiple), la surface de révolution admettant cette section plane ne peut être qu'un paraboloïde de revolution.

La façon la plus simple de démontrer cette proposition consiste a faire l'épure de la section plane d'une surface de révolution.

Prenons comme plan horizontal un plan perpendiculaire à l'axe de la surface de révolution S considérée et comme plan vertical un plan perpendiculaire au plan sécant qui devient le plan de bout $P'\alpha Q$.

Les figures ainsi placées, remarquons que le théorème



énoncé sera vrai si la méridienne de front de la surface S est une parabole.

Il nous reste à démontrer que cette méridienne est bien une parabole.

L'ensemble de la surface de révolution et du plan sécant forme une figure admettant comme plan de symétrie le plan de front passant par l'axe; par suite, le centre de la projection de l'intersection se trouve sur la droite F, trace horizontale du plan méridien de front, en ω.

Par hypothèse, cette projection est un cercle.

Pour obtenir un point de ce cercle, coupons par un plan horizontal H'; nous obtenons avec facilité un point (ii'). Cherchons la tangente en i à la projection horizontale de l'intersection; à cet effet, construisons le plan des normales à la surface S et au plan sécant P; menons la normale $n'N'$ à la méridienne de front M au point où elle est rencontrée par H'. La normale à S en ii' est définie par ses projections $(i'N', iO)$; quant à la normale au plan P, elle est donnée en projection verticale par la perpendiculaire $N'K'$ à $\alpha P'$, et en projection horizontale par OF.

Je vais montrer tout d'abord que le point K situé sur OF et sur la ligne de rappel de K' se confond avec ω.

La tangente it au cercle de projection ayant pour centre ω est perpendiculaire à la projection horizontale des horizontales du plan des normales en ii'; il suffit donc de couper par H'; la projection horizontale correspondante se confond avec iK, et par suite it est perpendiculaire sur iK; donc $i\omega$ et iK se confondant, les points ω et K se confondent de même.

Le point K' se trouve sur la ligne de rappel du point ω et IK' est égal à $O\omega$, c'est-à-dire est de longueur constante.

Le triangle rectangle $IN'\omega'$ a son côté de l'angle droit $IK' = I\omega'$ constant, et son angle aigu $\widehat{IN'K'}$ constant aussi puisque $N'K'$ est perpendiculaire sur $\alpha P'$. Ce triangle est de grandeur invariable et

$$IN'$$

est constant.

La sous-normale à la méridienne de front est constante, et par suite cette méridienne est une parabole.

Je reviendrai sur l'extension et les transformations de cette proposition, qui s'était présentée à M. Antomari sous des conditions différentes de celles-ci.