Nouvelles annales de mathématiques

# Correspondance

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 2 (1902), p. 280-282

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__280_1>

## CORRESPONDANCE.

M. **d'Ocagne**. — *Sur les faisceaux ponctuels de coniques.* — Le théorème que j'ai rencontré précédemment et qu'un élève de Mathématiques spéciales, M. Georges Halley des Fontaines, vient d'utiliser de façon fort ingénieuse pour construire les tangentes aux cubiques planes [1], peut donner lieu aux remarques géométriques que voici :

Soient O le centre, I un point double d'une involution située sur une droite et dans laquelle A et B sont des points correspondants.

L'égalité de définition

$$\overline{OI}^2 = OA.OB$$

peut s'écrire

$$(OA + AI)(OB - IB) = OA.OB$$

(1) Même Tome, p. 132. La méthode de M. des Fontaines s'applique particulièrement bien à la cubique qui se rencontre dans le problème d'admission à l'École Polytechnique en 1901.

ou

$$OA.IB = AI(OB - IB) = AI.OI.$$

Élevant au carré et remplaçant $\overline{OI}^2$ par sa valeur ci-dessus, on a

$$\frac{OA}{OB} = \left(\frac{IA}{IB}\right)^2,$$

égalité susceptible de diverses applications. Combinée avec le théorème de Ménélaüs, elle montre immédiatement que *si, sur chaque côté d'un triangle, on considère une involution dans laquelle les sommets se correspondent, et si les centres de ces trois involutions sont en ligne droite, les points doubles de ces involutions sont aussi trois à trois en ligne droite,* et réciproquement.

Considérons, en particulier, un faisceau ponctuel de coniques

$$\begin{aligned} A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 + B_1 yz + B_2 zx + B_3 xy \\ + \lambda(C_1 yz + C_2 zx + C_3 xy) = 0, \end{aligned}$$

dont fasse partie une conique

$$C_1 yz + C_2 zx + C_3 xy = 0$$

circonscrite au triangle ABC pris pour triangle de référence. Si nous coupons par l'un des côtés de ce triangle, $z = 0$ par exemple, nous avons l'involution donnée par l'équation

$$A_1 x^2 + (B_3 + \lambda C_3) xy + A_2 y^2 = 0,$$

dont le centre est défini par la condition que son correspondant est sur la droite de l'infini

$$ax + by + cz = 0,$$

$a$, $b$, $c$ étant les côtés du triangle ABC. Le point à l'infini sur AB satisfaisant aux équations

$$z = 0, \qquad ax + by = 0,$$

on tire de l'équation ci-dessus, pour son correspondant, centre de l'involution

$$z = 0, \qquad \frac{A_1 x}{a} + \frac{A_1 y}{b} = 0.$$

De même, les centres sur BC et CA sont donnés respectivement par

$$x = 0, \qquad \frac{A_2 y}{b} + \frac{A_3 z}{c} = 0$$

et

$$y = 0, \qquad \frac{A_3 z}{c} + \frac{A_1 x}{a} = 0.$$

Et l'on voit immédiatement que ces trois points sont alignés sur la droite

$$\frac{A_1 x}{a} + \frac{A_2 y}{b} + \frac{A_3 z}{c} = 0.$$

Il en résulte, en vertu du théorème ci-dessus, que les points doubles des trois involutions sont aussi trois à trois en ligne droite. C'est le théorème qui se trouve appliqué dans la Note rappelée plus haut.