Nouvelles annales de mathématiques

Concours général de 1902

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 282-283

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__282_1>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1902.

Composition de Mathématiques spéciales.

Soient Γ et Γ_1 les traces d'un ellipsoïde (E) et de son cône asymptote sur le plan Π qui passe par les extrémités A, B, C de trois diamètres conjugués, ωA, ωB, ωC, de cet ellipsoïde. On sait que ces traces sont des coniques concentriques et homothétiques.

1° Démontrer que le rapport de similitude de Γ et Γ_1 ne change pas quand on fait varier soit les trois diamètres conjugués ωA, ωB, ωC, soit l'ellipsoïde (E).

2° Cela étant, on donne trois points A, B, C, non en ligne droite, et l'on considère tous les ellipsoïdes (E) ayant A, B, C comme extrémités de trois diamètres conjugués. Montrer que ces ellipsoïdes et leurs cônes asymptotes sont coupés par le plan Π suivant des coniques fixes Γ et Γ_1. Soient 2α et 2β les axes de Γ.

3° On prend ces axes comme axes de coordonnées, ainsi que la perpendiculaire Oz au plan ABC. Équation de celui des ellipsoïdes (E) qui a pour centre un point donné, ω, de coordonnées x, y, z.

4° Soient P, Q, R les traces sur le plan ABC des axes de symétrie de l'ellipsoïde (E) de centre ω : le triangle PQR est conjugué à Γ_1. Déterminer le cercle C_1 conjugué au même triangle.

5° Montrer que les points P, Q, R peuvent dès lors être obtenus par l'intersection d'un cercle C_2 et d'une hyperbole équilatère, H, ayant ses asymptotes parallèles aux axes de symétrie de la conique Γ_1.

6° Le cercle C_2 coupe l'hyperbole équilatère H en un quatrième point, S, que l'on construira. Déterminer les puissances par rapport au cercle C_2 de l'origine O des coordonnées et de l'orthocentre du triangle PQR. Contruire le cercle C_2.

7° Cas particulier où Γ est un cercle.