NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEMINIANO PIRONDINI

Sur les normales d'un hélicoïde

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 289-311

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__289_0>

[O6a]

SUR LES NORMALES D'UN HÉLICOÏDE;

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI, à Parme.

1.

Soient

Σ le lieu d'une suite de droites $g(\cos A, \cos B, \cos C)$ menées par les points d'une ligne $L(x, y, z)$;
$\Lambda(\xi, \eta, \zeta)$ une ligne quelconque tracée sur Σ;
T les segments des droites g compris entre L et Λ;
s l'arc de L;
θ l'inclinaison des droites g sur la ligne L.

En donnant à la figure un mouvement hélicoïdal autour de l'axe des z, la ligne Λ engendre un hélicoïde H, dont un point quelconque a pour coordonnées :

$$X = \xi \cos v - \eta \sin v, \qquad Y = \xi \sin v + \eta \cos v, \qquad Z = \zeta + pv,$$

p étant une constante (*paramètre de l'hélicoïde*), et ξ, η, ζ étant définies par les équations

$$\xi = x - T\cos A, \qquad \eta = y - T\cos B, \qquad \zeta = z - T\cos C.$$

Les conditions

$$\sum \frac{\partial X}{\partial v} \cos A = 0, \qquad \sum \frac{\partial X}{\partial s} \cos A = 0$$

(exprimant l'orthogonalité des droites g et de l'hélicoïde H), appliquées à l'instant initial ($v = 0$), donnent

$$x \cos B - y \cos A + p \cos C = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dT}{ds} = \cos\theta, \tag{2}$$

et, comme l'équation (2) exprime que la ligne A est une des trajectoires orthogonales des génératrices de Σ, on a :

La condition nécessaire et suffisante pour que la surface réglée Σ *soit le lieu d'un système de normales de l'hélicoïde* H, *est exprimée par l'équation* (1).

L'égalité (1) se réduit à une identité, quand $x = 0$, $y = 0$, $p = 0$. Conséquemment :

Une surface réglée à directrice rectiligne est toujours le lieu d'un système de normales d'une surface de révolution.

Il s'ensuit qu'*une ligne* A, *trajectoire orthogonale des génératrices d'une surface du deuxième degré, tournant successivement autour de chaque génératrice de l'autre système, engendre une infinité de surfaces de révolution tangentes entre elles le long de* A.

La condition (1) est tout à fait indépendante de z. Par conséquent :

Si l'on déplace un système de normales d'un hélicoïde, d'une quantité arbitraire, suivant la direction de l'axe de l'hélicoïde, ces droites, dans la nouvelle position, constituent un système de normales d'un autre hélicoïde.

En posant

$$\cos A = \sin C \cos\varphi, \qquad \cos B = \sin C \sin\varphi,$$

l'angle φ peut être déterminé par la condition (1). Les équations

$$\cos A = \frac{py\cos C \pm x\sqrt{(x^2+y^2+p^2)\sin^2 C - p^2}}{x^2+y^2},$$

$$\cos B = \frac{px\cos C \mp y\sqrt{(x^2+y^2+p^2)\sin^2 C - p^2}}{x^2+y^2}$$

que l'on obtient, démontrent que *par une ligne quelconque on peut faire passer une infinité de surfaces réglées, chacune constituant un système de normales d'un hélicoïde d'axe donné.* Nous désignerons par Σ les surfaces réglées ainsi obtenues pour l'axe des z.

Quand L est une droite, supposons que l'on donne à la ligne Λ (trajectoire orthogonale des génératrices d'une des surfaces réglées Σ passant par L) un mouvement de rotation autour de L, et ensuite le mouvement hélicoïdal qui lui correspond autour de l'axe des z. Les surfaces engendrées S, H ont les mêmes normales le long de la ligne Λ, considérée dans la position initiale. Par conséquent :

Quand on fixe deux droites d'une façon arbitraire, il y a une double infinité de lignes Λ, dont chacune peut être regardée comme la ligne de contact d'un hélicoïde et d'une surface de révolution ayant pour axes les droites données; le lieu des lignes Λ est un système de surfaces réglées.

D étant une droite perpendiculaire à l'axe des x et inclinée de l'angle ε sur l'axe de l'hélicoïde, exprimons la condition d'orthogonalité entre la droite D et les génératrices de Σ. On a

$$\cos A = \sqrt{\sin^2 C - \cos^2 C \cot^2 \varepsilon}, \qquad \cos B = -\cos C \cot \varepsilon,$$

c'est-à-dire [en déterminant C à l'aide de la condition (1)]

$$\cos A = \frac{p \sin \varepsilon - x \cos \varepsilon}{\sqrt{(p \sin \varepsilon - x \cos \varepsilon)^2 + y^2}},$$

$$\cos B = \frac{-y \cos \varepsilon}{\sqrt{(p \sin \varepsilon - x \cos \varepsilon)^2 + y^2}},$$

$$\cos C = \frac{y \sin \varepsilon}{\sqrt{(p \sin \varepsilon - x \cos \varepsilon)^2 + y^2}}.$$

On en conclut que *par une ligne quelconque on peut faire passer une seule surface réglée à plan directeur donné, lieu d'un système de normales d'un hélicoïde (d'axe donné).*

Soient L, L_1 deux lignes quelconques et

$$x(t), \quad y(t), \quad z(t); \qquad x_1(\tau), \quad y_1(\tau), \quad z_1(\tau)$$

(fonctions de deux paramètres t, τ) les coordonnées de deux points P, P_1 de ces lignes. Si l'on prend les droites PP_1 pour génératrices g, on a

$$\frac{\cos A}{x - x_1} = \frac{\cos B}{y - y_1} = \frac{\cos C}{z - z_1},$$

et la condition (1) se réduit à

$$x_1 y - x y_1 + p(z - z_1) = 0,$$

constituant, au fond, une relation connue entre les paramètres t, τ. On établit ainsi une correspondance entre les points des lignes L, L_1, ce qui suffit pour la construction de la surface réglée Σ lieu des droites PP_1. Conséquemment :

Par deux lignes quelconques L, L_1 *on peut faire passer une seule surface réglée, lieu d'un système de normales d'un hélicoïde d'axe donné, ou un nombre fini de telles surfaces.*

En particulier, quand une des lignes L, L_1 est une droite, *par une ligne quelconque on peut faire passer une seule surface réglée à directrice rectiligne donnée, lieu d'un système de normales d'un hélicoïde d'axe donné, ou un nombre fini de telles surfaces.*

Quand L, L_1 sont deux droites, les coordonnées de leurs points peuvent être considérées comme des fonctions linéaires des paramètres t, τ. Il n'y a donc qu'une seule surface Σ passant par ces droites. Si Λ est une trajectoire orthogonale des génératrices de Σ, donnons successivement à cette ligne deux mouvements de rotation autour des droites L, L_1 et un mouvement hélicoïdal autour de l'axe des z. Les surfaces engendrées S, S_1, H ont en commun les normales le long de la ligne Λ, considérée dans la position initiale.

Il s'ensuit que, *si l'on fixe trois droites* L, L_1, Oz *d'une façon arbitraire dans l'espace, il y a une simple infinité de lignes* Λ, *dont chacune peut être regardée comme la ligne de contact entre deux surfaces de révolution et un hélicoïde, ayant pour axes respectivement les droites* (L, L_1) *et* Oz; *le lieu de ces lignes* Λ *est une surface réglée ayant pour directrices les droites* L, L_1.

Quand on connaît la direction des génératrices g de la surface réglée Σ, on peut écrire

$$\begin{aligned}\cos A &= f(x, y, z),\\ \cos B &= \varphi(x, y, z),\\ \cos C &= \sqrt{1 - f^2(x, y, z) - \varphi^2(x, y, z)},\end{aligned}$$

f et φ étant deux fonctions des coordonnées x, y, z.

La condition (1) donne la relation

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}&x\,\varphi(x, y, z) - y\,f(x, y, z)\\ &\quad + p\sqrt{1 - f^2(x, y, z) - \varphi^2(x, y, z)} = 0,\end{aligned}\right.$$

d'où le théorème :

Quand on fixe la direction des génératrices rectilignes, il y a une infinité de surfaces réglées, chacune constituant un système de normales d'un hélicoïde d'axe Oz; *la seule condition à vérifier est que la ligne* L *soit tracée sur la surface* (3).

Ainsi, par exemple, si cos A, cos B sont inversement proportionnels à la distance des points de la ligne L du plan $z=0$, on peut prendre

$$\cos A = \frac{a}{z}, \qquad \cos B = \frac{b}{z},$$

et *la ligne* L *doit satisfaire à la seule condition d'être placée sur la surface du deuxième degré*

$$p^2 z^2 - (bx - ay)^2 = p^2(a^2 - b^2).$$

II.

En supposant que les droites g qu'on mène par les points de la ligne L soient successivement les tangentes, les normales principales et les binormales de cette ligne, on a respectivement :

$$\cos A = \frac{dx}{ds},$$

$$\cos A = \rho \frac{d^2 x}{ds^2},$$

$$\cos A = \rho \left(\frac{dy}{ds} \frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} \right),$$

....

(ρ étant le rayon de courbure de L).

La condition (1) se réduit respectivement aux autres :

$$x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} + p \frac{dz}{ds} = 0, \tag{4}$$

$$x \frac{d^2 y}{ds^2} - y \frac{d^2 x}{ds^2} + p \frac{d^2 z}{ds^2} = 0, \tag{5}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & x \left(\frac{dx}{ds} \frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d^2 x}{ds^2} \right) + y \left(\frac{dy}{ds} \frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} \right) \\ & \quad = p \left(\frac{dx}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2 x}{ds^2} \right). \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Celles-ci sont les équations différentielles des trajectoires orthogonales des hélices, des lignes géodésiques *et des lignes asymptotiques d'un hélicoïde d'axe* Oz *et de paramètre* p.

L'équation (5) donne par intégration

$$(7)\qquad x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} + p\frac{dz}{ds} = k,$$

k étant une constante arbitraire. Et comme l'équation (7) se réduit à l'équation (4) pour $k = 0$, on voit que les *trajectoires orthogonales des hélices d'un hélicoïde sont des géodésiques sur cette surface* (nous les appelons les *géodésiques principales*).

Si l'on remarque que $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, on peut mettre l'équation (7) sous la forme :

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(p^2 - k^2)z'^2 - 2p(yx' - xy')z' \\ &\qquad + (yx' - xy')^2 - k^2(x'^2 + y'^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

On voit alors que la *variable indépendante peut être quelconque*.

L'équation (6) peut s'écrire

$$(9)\qquad (xx' + yy')z'' - (xx'' + yy'')z' = p(x'y'' - y'x''),$$

et, ainsi que le démontre un calcul très simple, *sa forme reste toujours la même, quelle que soit la variable indépendante*.

Une ligne L de l'espace peut être représentée par les équations

$$(10)\qquad x = R\cos u, \qquad y = R\sin u, \qquad z = U$$

(R et U étant des fonctions de u), ou par les autres

$$(11)\qquad \left\{ \begin{aligned} x &= R\cos\int\frac{\sqrt{1 - R'^2}}{R}\,d\sigma, \\ y &= R\sin\int\frac{\sqrt{1 - R'^2}}{R}\,d\sigma, \\ z &= \varphi(\sigma) \end{aligned} \right.$$

(σ étant l'arc de la projection sur le plan $z = 0$, R et φ des fonctions de σ).

Si alors on applique les équations différentielles (8), (9) aux lignes (10), (11), *on peut déterminer les fonctions* U, φ *par des quadratures*. En effet :

1° Dans le cas de l'équation différentielle (8), on a

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} U &= \frac{1}{p^2-k^2}\int\left[-pR^2 \pm k\sqrt{R^4+(p^2-k^2)(R^2+R'^2)}\right]du \\ &\qquad\qquad (\text{quand } k \gtrless p), \\ U &= \frac{1}{2p}\int\frac{p^2(R^2+R'^2)-R^4}{R^2}\,du \qquad (\text{quand } k = p), \end{aligned}\right.$$

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(\sigma) &= \frac{1}{p^2-k^2}\int\left[-pR\sqrt{1-R'^2} \pm k\sqrt{R^2(1-R'^2)+(p^2-k^2)}\right]d\sigma \\ &\qquad\qquad (\text{quand } k \gtrless p), \\ \varphi(\sigma) &= \frac{1}{2p}\int\frac{p^2-(1-R'^2)R^2}{\sqrt{1-R'^2}\,R}\,d\sigma \qquad (\text{quand } k = p); \end{aligned}\right.$$

2° Dans le cas de l'équation différentielle (9), on a

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} U &= \int\left[a + p\int\frac{R(R-R'')+2R'^2}{RR'}\,e^{-\int\frac{R''-R}{R}du}\,du\right]e^{\int\frac{R''-R}{R}du}\,du \\ &= \int\left(a + 2p\int e^{\int\frac{R}{R'}du}\frac{du}{R}\right)e^{-\int\frac{R}{R}du}\,R'\,du + pu. \end{aligned}\right.$$

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(\sigma) &= \int\left(b - p\int\frac{RR''+R'^2-1}{R'\sqrt{1-R'^2}}\,\frac{1}{R^2}\,e^{-\int\frac{RR''+R'^2-1}{RR'}d\sigma}\,d\sigma\right) \\ &\qquad\qquad \times e^{\int\frac{RR''+R'^2-1}{RR'}d\sigma}\,d\sigma \\ &= \int\left(b - p\int\frac{RR''+R'^2-1}{R'^2\sqrt{1-R'^2}}\,\frac{1}{R^3}\,e^{\int\frac{d\sigma}{RR'}}\,d\sigma\right)e^{-\int\frac{d\sigma}{RR'}}\,RR'\,d\sigma. \end{aligned}\right.$$

On parvient ainsi au théorème :

Si l'on donne un mouvement hélicoïdal de paramètre p autour de l'axe des z, à la ligne représentée *par les équations* (10) *ou* (11), *dans lesquelles* U *et* φ *sont définies par les équations* $\left\{\begin{matrix} (12)\ et\ (13) \\ (14)\ et\ (15) \end{matrix}\right\}$, *la ligne est, dans toutes ses positions, une* $\left\{\begin{matrix} \textit{géodésique} \\ \textit{asymptotique} \end{matrix}\right\}$ *sur l'hélicoïde engendré, quelles que soient les valeurs des constantes* k, a, b.

En considérant la ligne (10) comme la génératrice d'un hélicoïde H dont l'axe coïncide avec l'axe des z, le profil méridien placé sur le plan $y = 0$ est représenté par les équations

$$(16) \qquad R = R(u), \qquad \zeta = U - pu,$$

p étant le paramètre.

Si l'on applique les équations différentielles (8), (9) à une ligne

$$(17) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= R\cos\psi(u), \\ y &= R\sin\psi(u), \\ z &= U + p[\psi(u) - u] = \zeta + p\,\psi(u) \end{aligned}\right.$$

placée d'une façon arbitraire sur l'hélicoïde H, la fonction $\psi(u)$ est déterminée par une quadrature.

En effet :

1° Quand

$$(18) \qquad \zeta = f(R),$$

on a

$$(19) \qquad \psi(u) = \int \frac{-p(p^2-k^2+R^2)f'(R) \pm k\sqrt{\left\{\begin{matrix}(p^2-k^2+R^2) \\ \times[p^2+R^2+R^2f'^2(R)]\end{matrix}\right\}}}{(p^2-k^2+R^2)(p^2+R^2)}\,dR,$$

$$(20) \qquad \psi(u) = \int \frac{p \pm \sqrt{p^2 - f'(R)f''(R)R^3}}{R^2 f'(R)}\,dR ;$$

2° Quand

$$R = F(\zeta), \tag{21}$$

on a

$$\psi(u) = \int \frac{\left\{ \begin{array}{l} -p[p^2 - k^2 + F^2(\zeta)] \\ \pm k \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} [p^2 - k^2 + F^2(\zeta)] \\ \times [F'^2(\zeta) F^2(\zeta) + F^2(\zeta) + p^2 F'^2(\zeta)] \end{array} \right\}} \end{array} \right\}}{[p^2 - k^2 + F^2(\zeta)][p^2 + F^2(\zeta)]} d\zeta, \tag{22}$$

$$\psi(u) = \int p \frac{F'^2(\zeta) \pm \sqrt{p^2 F'^4(\zeta) + F^2(\zeta) F''(\zeta)}}{F^2(\zeta)} d\zeta. \tag{23}$$

Il suit le théorème général :

Sur un hélicoïde donné d'avance, les lignes $\left\{\begin{array}{l}\textit{géo-}\\ \textit{asym-}\end{array}\right.$ $\left.\begin{array}{l}\textit{désiques}\\ \textit{ptotiques}\end{array}\right\}$ *sont représentées par les équations* (17), *pourvu :*

1° *Que l'on remplace* ζ *et* ψ *par leurs valeurs* (18) *et* $\left\{\begin{array}{l}(19)\\(20)\end{array}\right\}$, *quand le profil méridien est représenté par l'équation* (18);

2° *Que l'on remplace* R *et* ψ *par leurs valeurs* (21) *et* $\left\{\begin{array}{l}(22)\\(23)\end{array}\right\}$, *quand le profil méridien de l'hélicoïde est représenté par l'équation* (21).

III.

Soient

A le *profil méridien* d'un helicoïde H;

L une ligne tracée sur H;

L_0 la *projection équatoriale* de L (projection de L sur le plan $z = 0$);

l la *transformée plane* de L (ligne à laquelle se réduit L en étalant sur le plan le cylindre projetant L sur le plan coordonné $z = 0$).

Quand L *est une géodésique ou une asymptotique de* H :

A. *La détermination de la projection équatoriale* L_0 *et de la transformée plane* l, *quand on donne le profil méridien* Λ *est ramenée à des quadratures.*

B. *La détermination du profil méridien* Λ *et de la transformée plane* l, *quand on donne la projection équatoriale* L_0, *est ramenée à des quadratures.*

C. *La détermination du profil méridien* Λ *et de la projection équatoriale* L_0, *quand on donne la transformée plane* l, *est ramenée à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre ou du deuxième ordre, suivant que la ligne* L *est une géodésique ou une asymptotique de l'hélicoïde.*

Cas A. — 1° Si le profil de l'hélicoïde est la ligne représentée par l'équation (18), on déduit des équations (19), (20)

$$(24)\qquad u = \int \frac{-p(p^2-k^2+R^2)f'(R) \pm k\sqrt{\begin{Bmatrix} (p^2-k^2+R^2) \\ \times[p^2+R^2+R^2 f'^2(R)] \end{Bmatrix}}}{(p^2-k^2+R^2)(p^2+R^2)}\,dR,$$

$$(25)\qquad u = \int \frac{p \pm \sqrt{p^2 - f'(R)\,f''(R)\,R^3}}{R^2 f'(R)}\,dR.$$

Celles-ci sont respectivement l'équation de la projection équatoriale L_0 *d'une géodésique et d'une asymptotique d'un hélicoïde, en coordonnées polaires* (R, u).

2° En ayant recours aux équations (22), (23), et en remarquant de plus que

$$d\sigma^2 = dR^2 + R^2\,du^2 = F'^2(\zeta)\,d\zeta^2 + F^2(\zeta)\,du^2,$$

dans l'hypothèse que le profil de l'hélicoïde soit représenté par l'équation (21), on déduit

$$(26)\quad \sigma = \int \sqrt{\mathrm{F}'^2(\zeta) + \mathrm{F}^2(\zeta)\left\{\frac{\left\{\begin{array}{l} -p[p^2 - k^2 + \mathrm{F}^2(\zeta)] \\ \pm k\sqrt{\left\{\begin{array}{l}[p^2 - k^2 + \mathrm{F}^2(\zeta)] \\ \times[\mathrm{F}^2(\zeta) + \mathrm{F}^2(\zeta)\mathrm{F}'^2(\zeta) + p^2\mathrm{F}'^2(\zeta)]\end{array}\right\}}\end{array}\right\}}{[p^2 - k^2 + \mathrm{F}^2(\zeta)]\,[p^2 + \mathrm{F}^2(\zeta)]}\right\}^2}\, d\zeta.$$

$$(27)\quad \sigma = \int \sqrt{\mathrm{F}'^2(\zeta) + \left[\frac{p\,\mathrm{F}'^2(\zeta) \pm \sqrt{p^2\mathrm{F}'^4(\zeta) + \mathrm{F}^3(\zeta)\,\mathrm{F}''(\zeta)}}{\mathrm{F}(\zeta)}\right]^2}\, d\zeta.$$

Celles-ci sont respectivement l'équation de la transformée plane l d'une géodésique et d'une asymptotique d'un hélicoïde, en coordonnées cartésiennes (σ, ζ).

Cas B. — 1° Soit la projection équatoriale L_0 représentée par l'équation polaire

$$(28)\qquad u = \lambda(\mathrm{R}).$$

Il suffit de calculer $f(\mathrm{R})$ par l'intégration des équations qu'on déduit en comparant l'équation (28) aux équations (24), (25), pour voir que le *profil méridien de l'hélicoïde est la courbe représentée par l'équation cartésienne*

$$(29)\quad \zeta = \int \frac{\left\{\begin{array}{l} -p(p^2 + \mathrm{R}^2)(p^2 - k^2 + \mathrm{R}^2)\lambda'(\mathrm{R}) \\ \pm k\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\mathrm{R}^2(p^2 + \mathrm{R}^2)^2(p^2 - k^2 + \mathrm{R}^2)\lambda'^2(\mathrm{R}) \\ + (p^2 + \mathrm{R}^2)[p^2(p^2 - k^2 + \mathrm{R}^2) - k^2\mathrm{R}^2]\end{array}\right\}}\end{array}\right\}}{p^2(p^2 - k^2 + \mathrm{R}^2) - k^2\mathrm{R}^2}\, d\mathrm{R}$$

ou par l'autre

$$(30)\quad \zeta = \int \left[a + 2p\int \frac{\lambda'(\mathrm{R})}{\mathrm{R}}\, e^{\int \mathrm{R}\lambda'^2(\mathrm{R})\, d\mathrm{R}}\, d\mathrm{R}\right] e^{-\int \mathrm{R}\lambda'^2(\mathrm{R})\, d\mathrm{R}}\, d\mathrm{R}$$

(a = const. arbitraire) *suivant qu'il s'agit d'une géodésique ou d'une asymptotique.*

2° En supposant que la projection équatoriale L_0 soit représentée par l'équation

$$R = R(\sigma),$$

la transformée plane l d'une géodésique ou d'une asymptotique est représentée par l'équation cartésienne

$$(31) \qquad \zeta = \varphi(\sigma),$$

$\varphi(\sigma)$ *étant donnée respectivement par les équations* (13), (15).

Cas C. — 1° Quand la transformée plane l d'une géodésique ou d'une asymptotique est représentée par l'équation cartésienne

$$(32) \qquad \sigma = \Phi(\zeta),$$

le profil méridien de l'hélicoïde est représenté par l'équation (21), $F(\zeta)$ étant la fonction définie par l'équation différentielle qu'on déduit par l'élimination de σ entre l'équation (32) et les équations (26), (27) respectivement.

2° Quand l est définie par l'équation cartésienne (31), la projection équatoriale L_0 est représentée par l'équation différentielle (13) ou (15), suivant qu'il s'agit d'une géodésique ou d'une asymptotique.

Cas particuliers. — Pour avoir les formules relatives aux *géodésiques principales d'un hélicoïde,* aux *géodésiques* et aux *asymptotiques d'une surface de révolution,* il suffit de faire respectivement : $k = 0$, dans les équations (24), (26), (29), (13); $p = 0$, dans les mêmes équations; $p = 0$ dans les équations (25), (27), (30), (15). On obtient ainsi les formules suivantes :

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} u &= -p\int \frac{f'(\mathrm{R})}{p^2+\mathrm{R}^2}\,d\mathrm{R},\\ \sigma &= \int \sqrt{\frac{p^2\,\mathrm{F}^2(\zeta)}{[p^2+\mathrm{F}^2(\zeta)]^2}+\mathrm{F}'^2(\zeta)}\,d\zeta,\end{aligned}\right.$$

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \zeta &= -\frac{1}{p}\int (p^2+\mathrm{R}^2)\lambda'(\mathrm{R})\,d\mathrm{R},\\ \zeta &= -\frac{1}{p}\int \mathrm{R}\sqrt{1-\mathrm{R}'^2}\,d\sigma,\end{aligned}\right.$$

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} u &= k\int \sqrt{\frac{1+f'^2(\mathrm{R})}{\mathrm{R}^2-k^2}}\,\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}},\\ \sigma &= \int \sqrt{\frac{\mathrm{F}^2(\zeta)\,\mathrm{F}'^2(\zeta)+k^2}{\mathrm{F}^2(\zeta)-k^2}}\,d\zeta,\end{aligned}\right.$$

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{k}\int \sqrt{\mathrm{R}^2(\mathrm{R}^2-k^2)\lambda'^2(\mathrm{R})-k^2}\,d\mathrm{R},\\ \zeta &= \frac{1}{k}\int \sqrt{\mathrm{R}^2(1-\mathrm{R}'^2)-k^2}\,d\sigma,\end{aligned}\right.$$

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \int \sqrt{-\frac{f''(\mathrm{R})}{f'(\mathrm{R})}\,\frac{1}{\mathrm{R}}}\,d\mathrm{R},\\ \sigma &= \int \sqrt{\mathrm{F}''(\zeta)\,\mathrm{F}(\zeta)+\mathrm{F}'^2(\zeta)}\,d\zeta.\end{aligned}\right.$$

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} \zeta &= a\int e^{-\int \mathrm{R}\lambda'^2(\mathrm{R})\,d\mathrm{R}}\,d\mathrm{R},\\ \zeta &= b\int e^{-\int \frac{d\sigma}{\mathrm{RR}'}}\,\mathrm{RR}'\,d\sigma.\end{aligned}\right.$$

Les équations $\left\{\begin{matrix}(33)\\(35)\\(37)\end{matrix}\right\}$ *définissent (d'une seule manière) la projection équatoriale et la transformée plane* $\left\{\begin{matrix}\textit{des géodésiques principales d'un hélicoïde}\\ \textit{des géodésiques d'une surface de révolution}\\ \textit{des asymptotiques d'une surface de révolution}\end{matrix}\right\}$

quand on en donne $\left\{ \begin{array}{l} \textit{le profil méridien} \\ \textit{la ligne méridienne} \\ \textit{la ligne méridienne} \end{array} \right\}$ $[\zeta = f(\mathrm{R}),$ $\mathrm{R} = \mathrm{F}(\zeta)]$.

Les équations $\left\{ \begin{array}{c} (34) \\ (36) \\ (38) \end{array} \right\}$ *définissent* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{(d'une seule manière) le profil méridien} \\ \textit{(d'une seule manière) la ligne méridienne} \\ \textit{(d'une infinité de manières) la ligne méridienne} \end{array} \right\}$ *et la transformée plane* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{des géodésiques principales d'un hélicoïde} \\ \textit{des géodésiques d'une surface de révolution} \\ \textit{des asymptotiques d'une surface de révolution} \end{array} \right\}$ *quand on donne la projection équatoriale de ces lignes* $[u = \lambda(\mathrm{R}),\ \mathrm{R} = \mathrm{R}(\sigma)]$.

Que l'on fasse $p = 0$ dans les équations (27), (15), et ensuite que l'on compare les équations qu'on va obtenir aux relations (32), (31) respectivement. On déduit ainsi les équations différentielles

$$\mathrm{F}(\zeta)\,\mathrm{F}''(\zeta) + \mathrm{F}'^2(\zeta) = \Phi'^2(\zeta), \qquad a\mathrm{R}\mathrm{R}'e^{-\int \frac{d\sigma}{\mathrm{R}\mathrm{R}'}} = \varphi'(\sigma),$$

dont l'intégration conduit aux résultats suivants :

Quand la transformée plane l d'une asymptotique d'une surface de révolution est représentée par l'équation (32), *ou par l'équation* (31),

1° *La ligne méridienne de la surface est une des courbes définies par l'équation*

$$\mathrm{R} = \sqrt{2\iint \Phi'^2(\zeta)\,d\zeta^2 + a\zeta + b}\,;$$

2° *La projection équatoriale* L_0 *de la ligne est une des courbes définies (en coordonnées* R, σ*) par l'équa-*

tion

$$R = \sqrt{2m\,\varphi(\sigma) + 2\int \varphi'(\sigma)\left[\int \frac{d\sigma}{\varphi'(\sigma)}\right] d\sigma + n}$$

(*a, b, m, n étant des constantes arbitraires*).

IV.

Applications. — A. En faisant successivement $k = 0$, $p = 0$ dans l'équation (12), on trouve respectivement :

$$(39) \quad z = -\frac{1}{p}\int R^2\, du, \qquad z = \frac{1}{k}\int \sqrt{R^4 - k^2(R^2 + R'^2)}\, du.$$

Et si, dans la dernière hypothèse, on calcule l'arc s de la ligne à l'aide des équations (10), on a

$$s = \frac{1}{k}\int R^2\, du.$$

Ces égalités démontrent les propriétés :

1° *En altérant, dans un rapport constant arbitraire, les hauteurs relatives aux points d'une géodésique principale d'un hélicoïde, on obtient une géodésique principale d'un autre hélicoïde;*

2° *Les géodésiques de deux surfaces de révolution ayant même projection équatoriale ont leurs arcs proportionnels;*

3° *Si, sur les génératrices du cylindre projetant une géodésique d'une surface de révolution sur le plan de l'équateur, on prend, à partir de ce plan, des distances proportionnelles à l'arc de la géodésique, le lieu des extrémités est une géodésique principale d'un hélicoïde ayant même axe que la surface de révolution.*

B. En supposant

$$\zeta = f(R) = R\cot\varepsilon \qquad \text{et} \qquad R(\sigma) = \sigma\cos\varepsilon,$$

la première équation (33) et la deuxième équation (34) donnent respectivement :

$$R = -p \operatorname{tang}(u \operatorname{tang} \varepsilon), \qquad \zeta = -\frac{\sin\varepsilon \cos\varepsilon}{2p}\sigma^2.$$

Ces égalités démontrent les propriétés :

1° *Les géodésiques principales des hélicoïdes réglés, dont les génératrices coupent l'axe sous un même angle, ont pour projections équatoriales des lignes semblables ;*

2° *Quand une géodésique principale d'un hélicoïde a pour projection équatoriale une spirale logarithmique avec le pôle sur l'axe, la transformée plane de la géodésique est une parabole.*

C. Quand la ligne (10) est sur une sphère de rayon a, on a

$$(40) \qquad z = \sqrt{a^2 - R^2}.$$

Quand la ligne (10) coupe sous l'angle constant ε les méridiennes de la surface engendrée par cette ligne dans la rotation autour de l'axe des z, on a

$$(41) \qquad z = \int \sqrt{R^2 \cot^2\varepsilon - R'^2}\, du.$$

Si donc la ligne L vérifie à la fois les conditions [(39), (40)], [(39), (41)], [(40), (41)], R est déterminé respectivement par les équations différentielles

$$p^2 R'^2 = R^2(a^2 - R^2), \qquad p^2 R'^2 = R^2(p^2 \cot^2\varepsilon - R^2),$$
$$a^2 \operatorname{tang}^2\varepsilon\, R'^2 = R^2(a^2 - R^2).$$

Celles-ci, pour

$$(42) \qquad a = \pm p \cot\varepsilon,$$

reviennent l'une à l'autre. Et comme on déduit après l'intégration

$$\log\left(\frac{p\cot\varepsilon + \sqrt{p^2\cot^2\varepsilon - R^2}}{R}\right) = -u\cot\varepsilon,$$

et conséquemment

$$R = \frac{p\cot\varepsilon}{\cosh(u\cot\varepsilon)}, \qquad z = U = -p\cot\varepsilon\,\mathrm{tangh}(u\cot\varepsilon),$$

on trouve, à l'aide des équations (16), que le profil méridien de l'hélicoïde est la ligne

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}\zeta &= -\sqrt{p^2\cot^2\varepsilon - R^2}\\ &\quad + p\,\mathrm{tang}\,\varepsilon\log\left(\frac{p\cot\varepsilon + \sqrt{p^2\cot^2\varepsilon - R^2}}{R}\right).\end{aligned}\right.$$

Cette analyse démontre le théorème :

Quand une ligne de l'espace jouit de deux des propriétés suivantes :

1° *D'être une géodésique principale d'un hélicoïde* H ;

2° *D'être une loxodromie d'une surface de révolution* S, *ayant même axe que* H ;

3° *D'être placée sur une sphère dont le centre est sur l'axe de* H *et* S ; *elle jouit aussi de la troisième.*

Le paramètre p, *le rayon* a *de la sphère et l'inclinaison* ε *sont liés par la relation* (42). *Le profil méridien de l'hélicoïde* H *est la ligne* (43).

Comme la ligne (43) se réduit à une *tractrice* pour $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$, on a :

Dans l'hélicoïde à courbure constante négative, les trajectoires orthogonales des hélices sont des loxo-

dromies sphériques coupant les méridiennes sous l'angle $\frac{\pi}{4}$. Les sphères contenant ces trajectoires ont les centres sur l'axe, et leurs rayons sont égaux au paramètre de l'hélicoïde.

D. Si l'on donne un mouvement hélicoïdal de paramètre p, autour de l'axe des z, à la ligne L représentée par les équations (11), on trouve :

$$\sqrt{R^2+p^2}\sin\theta = \frac{R\sqrt{1-R'^2}+p\,\varphi'(\sigma)}{\sqrt{1+\varphi'^2(\sigma)}}, \tag{44}$$

$\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ étant l'angle sous lequel la ligne L coupe les hélices de l'hélicoïde engendré H.

En supposant que L soit une géodésique de l'hélicoïde H, on a, en vertu de l'équation (7),

$$\begin{aligned} k &= \left(x\frac{dy}{d\sigma} - y\frac{dx}{d\sigma} + p\frac{dz}{d\sigma}\right)\frac{d\sigma}{ds} \\ &= \left[R\sqrt{1-R'^2}+p\,\varphi'(\sigma)\right]\frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2(\sigma)}}. \end{aligned}$$

Celle-ci, comparée à l'égalité (44), démontre le théorème :

Tout le long d'une géodesique quelconque d'un hélicoïde, la distance R *entre un point de la courbe et l'axe de la surface est liée à l'inclinaison* θ *de la géodésique sur la géodésique principale correspondante, par la relation*

$$\sqrt{R^2+p^2}\sin\theta = k.$$

Cette équation donne la signification géométrique de la constante k paraissant dans les formules précédentes.

Pour $p = 0$, elle exprime le théorème de Clairaut, relatif à une géodésique d'une surface de révolution.

E. Si l'on fait respectivement

$$R = F(\zeta) = \sqrt{2a\zeta},$$
$$\zeta = f(R) = \sqrt{a^2 - R^2} - a \log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - R^2}}{R}\right),$$

dans la deuxième équation (35) et dans la première équation (35), on obtient

$$\sigma = \frac{\sqrt{a^2 + k^2}}{a}\sqrt{2a\zeta - k^2}, \qquad u = \frac{a\sqrt{R^2 - k^2}}{kR},$$

d'où il suit

$$\zeta = \frac{k^2}{2a} - \frac{a\sigma^2}{2(a^2 + k^2)}, \qquad R = \frac{ak}{\sqrt{a^2 - k^2u^2}}.$$

On a donc les théorèmes :

1° *La transformée plane d'une géodésique quelconque d'un paraboloïde de révolution est une parabole;*

2° *La projection équatoriale d'une géodésique quelconque de la pseudo-sphère de rayon a est (par rapport au cercle de rayon $\sqrt{ak}$) l'inverse de la projection équatoriale de la ligne, suivant laquelle l'helicoïde réglé à plan directeur et à directrice rectiligne, de paramètre k, est coupé par une sphère de rayon a dont le centre est sur l'axe.*

F. Soient L_1, L_2, L_3 les asymptotiques de trois hélicoïdes, correspondant aux valeurs a_1, a_2, a_3 de la constante arbitraire b dans l'équation (15). En désignant par p_1, p_2, p_3 les paramètres correspondants, on a, par l'application de l'équation (15),

$$p_1 z_2 - p_2 z_1 = (a_2 p_1 - a_1 p_2) \int \mathrm{RR}' e^{-\int \frac{d\sigma}{\mathrm{RR}'}} d\sigma,$$

$$p_2 z_3 - p_3 z_2 = (a_3 p_2 - a_2 p_3) \int \mathrm{RR}' e^{-\int \frac{d\sigma}{\mathrm{RR}'}} d\sigma.$$

En divisant ces équations entre elles, on parvient au théorème :

Les hauteurs correspondantes z_1, z_2, z_3 *relatives aux points des asymptotiques de trois hélicoïdes* L_1, L_2, L_3, *ayant même projection équatoriale, sont liées entre elles par la relation linéaire*

$$(45) \qquad \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on pose

$$(46) \qquad z_3 = m z_1 + n z_2,$$

m et n étant des constantes, on obtient, en identifiant les équations (45), (46),

$$a_3 = m a_1 + n a_2, \qquad p_3 = m p_1 + n p_2.$$

On voit d'ici que *la transformation* (46), *appliquée aux asymptotiques de deux hélicoïdes tracés sur même cylindre donne une asymptotique d'un autre hélicoïde tracé aussi sur même cylindre, quelles que soient les constantes* m, n.

Quand $p_1 = p_2 = p_3$, l'équation (45) se réduit à l'autre,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_2},$$

exprimant le théorème :

Quand les asymptotiques de trois hélicoïdes sont *tracées sur un même cylindre, une d'entre elles coupe les portions des génératrices du cylindre comprises entre les autres, en deux parties ayant un rapport constant.*

L_1, L_2, L_3, L_4 étant les asymptotiques de quatre hélicoïdes placés sur un même cylindre, on déduit des relations précédentes

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}:\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}=\frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}:\frac{a_4-a_1}{a_4-a_2}.$$

Donc :

Les asymptotiques de quatre hélicoïdes, tracées sur même cylindre, coupent les génératrices de celui-ci suivant des groupes de quatre points, dont le rapport anharmonique est constant.

G. En supposant $p=0$ dans l'équation (14), on déduit :

En altérant, dans un rapport constant arbitraire, les hauteurs relatives aux points d'une surface de révolution, on obtient une asymptotique d'une autre surface de révolution.

H. Si la projection équatoriale d'une asymptotique d'une surface de révolution est une spirale logarithmique ayant le pôle sur l'axe et coupant les rayons vecteurs issus du pôle sous l'angle ε, on a

$$\lambda(R)=\operatorname{tang}\varepsilon\log\left(\frac{R}{m}\right),\qquad R(\sigma)=\cos\varepsilon.\sigma$$

(m étant une constante). Dans cette hypothèse, les équations (38) donnent

$$\zeta=\frac{a}{1-\operatorname{tang}^2\varepsilon}R^{1-\operatorname{tang}^2\varepsilon},\qquad \zeta=\frac{b\cos^2\varepsilon}{1-\operatorname{tang}^2\varepsilon}\sigma^{1-\operatorname{tang}^2\varepsilon}.$$

D'ailleurs, en supposant successivement

$$f(\mathrm{R}) = \alpha \mathrm{R}^m, \qquad \mathrm{F}(\zeta) = \beta\zeta^n,$$

les équations (37) donnent

$$u = \sqrt{1-m}\log\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{C}}\right), \qquad \sigma = \frac{\sqrt{n(2n-1)}}{n}\beta\zeta^n$$

(C étant une constante). Cette analyse démontre les propriétés :

1° *Quand une ligne asymptotique d'une surface de révolution a pour projection équatoriale une spirale logarithmique avec le pôle sur l'axe, la ligne méridienne de la surface et la transformée plane de l'asymptotique sont des paraboles générales du même ordre;*

2° *Quand la ligne méridienne d'une surface de révolution est une parabole générale, la projection équatoriale d'une asymptotique quelconque est une spirale logarithmique ayant le pôle sur l'axe, et la transformée plane de l'asymptotique est une parabole générale, du même ordre que la ligne méridienne.*

Pour $\cot\varepsilon = \sqrt{2}$ les paraboles générales se réduisent à des paraboles ordinaires.