NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats d'algèbre supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 322-326

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__322_1>

CERTIFICATS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE.

I. *On considère l'équation du quatrième degré* $f(x)=0$ *et les fonctions des racines*

$$\varphi_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4, \qquad \varphi_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4, \qquad \varphi_3 = x_1 x_4 + x_2 x_3.$$

on forme la fonction

$$\omega_1 = \varphi_2 - \varphi_3 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4).$$

1° *Déterminer le groupe auquel appartient* ω_1, *et les valeurs dont est susceptible cette fonction pour toutes les substitutions.*

2° *Calculer la somme des carrés des valeurs de* ω_1, *et montrer que, si elle est nulle, l'invariant* S *est nul et les racines sont liées par la relation*

$$(x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2 + (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4) = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(x_3 - x_4)^2 = \frac{f'(x_1)\, f'(x_2)}{(x_1 - x_2)^4}.$$

II. *Démontrer les égalités*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & p(u+v) + p(u-v) \\ & \qquad = \frac{2(pu\,pv - \frac{1}{4} g_2)(pu + pv) - g_3}{(pu - pv)^2}, \\ & p(u+v) - p(u-v) = \frac{-p'u\,p'v}{(pu - pv)^2}. \end{aligned} \right.$$

III. *On considère la cubique* (C) *définie par les formules*

$$x = p(u \mid \omega, \omega'), \qquad y = p(u \mid \omega, \omega'),$$

et l'on suppose que la période 2ω *est réelle, la période* $2\omega'$ *purement imaginaire.*

1° *Déterminer les arguments des points d'inflexion; montrer que la droite qui joint deux des points d'inflexion va passer par un troisième.*

2° *En partant de l'équation de la cubique* (C)

$$y^2 = 4x^3 - g^2x - g_3,$$

et en égalant à zéro la dérivée seconde de y *par rapport à* x *on obtient, pour déterminer les abscisses des points d'inflexion, une équation du quatrième degré*

$$F(x) \equiv ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e;$$

vérifier que l'on a

$$F'(x) = \rho(4x^3 - g_2x - g_3),$$

ρ *désignant un facteur numérique.*

Étudier la variation du polynome $F(x)$ *en supposant que* x *varie de* $-\infty$ *à* $+\infty$; *en conclure le nombre des points d'inflexion réels. Vérifier que l'invariant*

$$S = ae - 4bd + 3c^2$$

de $F(x)$ *est nul.*

3° *Montrer que les racines peuvent être représentées par les formules*

$$x_1 = p\left(\frac{2\omega}{3}\right), \qquad x_2 = p\left(\frac{2\omega'}{3}\right),$$

$$x_3 = p\left(\frac{2\omega + 2\omega'}{3}\right), \qquad x_4 = p\left(\frac{2\omega - 2\omega'}{3}\right),$$

et retrouver, au moyen de cette interprétation, le nombre des points d'inflexion réels.

Vérifier, par un calcul algébrique, que x_1, x_2, x_3, x_4 *satisfont aux deux relations*

$$x_3 + x_4 = \frac{2(x_1x_2 - \frac{1}{4}g_2)(x_1 + x_2) - g_3}{(x_1 - x_2)^2},$$

$$(x_3 - x_4)^2 = \frac{(4x_1^3 - g_2x_1 - g_3)(4x_2^3 - g_2x_2 - g_3)}{(x_1 - x_2)^4}$$

$$= -\frac{(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_1 - x_2)^2}$$

qui correspondent aux formules (1).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Développer, en série entière, la série*

$$pu = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right);$$

former les dérivées successives de pu; *décomposer* $p^2 u$ *en éléments simples et établir la formule*

$$p'^2 u = 4 p^3 u - g_2 pu - g_3.$$

Former les relations qui relient les puissances successives de pu *aux dérivées successives de cette fonction; intégrer*

$$\int_{\omega}^{u} p^3 u \, du.$$

(Nancy, juillet 1901.)

I. *On considère le produit infini*

$$\left(z + \frac{1}{z}\right) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n} z^2) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{q^{2n}}{z^2}\right),$$

où q *désigne une constante réelle comprise entre* 0 *et* 1, *et* z *une variable complexe.*

1° *Montrer que ce produit définit une fonction* $\varpi(z)$ *jouissant de la propriété*

$$\varpi(qz) = \varpi(z) \frac{1}{qz^2};$$

trouver les zéros de la fonction $\varpi(z)$.

2° K *et* K′ *étant des quantités réelles et positives, on pose*

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}, \qquad z = e^{\frac{i\pi u}{2K}},$$

et l'on désigne par $\Pi(u)$ *ce que devient la fonction* $\varpi(z)$ *après cette double substitution.*

Indiquer comment se transforme la fonction $\Pi(u)$ *quand on ajoute* 2K *ou* $2i$K′ *à l'argument* u; *trouver les zéros de la fonction* $\Pi(u)$. *Vérifier que l'on a*

$$\Pi(u) = 2 \cos \frac{\pi u}{2K} \left(1 + 2q^2 \cos \frac{\pi u}{K} + q^4\right) \left(1 + 2q^4 \cos \frac{\pi u}{K} + q^8\right) \cdots$$

3° *A quelles conditions doivent satisfaire les coefficients* A_m *de la série*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m q^{\frac{m^2}{4}} z^m \qquad (0 < q < 1)$$

pour que cette série définisse une fonction jouissant de la propriéte

$$q z^2 f(q z) \equiv f(z);$$

de cette détermination, déduire le développement

$$\Pi(u) = C \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \cos(2n+1)\frac{\pi u}{2k},$$

$\Pi(u)$ *désignant la fonction précédemment considérée, et* C *un facteur constant.*

II. *On considère l'équation du quatrième degré*

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

on désigne ses racines par x_1, x_2, x_3, x_4 *et l'on prend la fonction de ces racines*

$$\rho = x_1 x_2 - x_3 x_4,$$

1° *Déterminer toutes les valeurs que peut acquérir cette fonction pour toutes les substitutions et former le groupe de substitutions auquel appartient la fonction donnée* ρ.

2° *Étant donnée la fonction des racines*

$$\varphi = x_1 x_2 + x_3 x_4,$$

former l'équation dont dépend ρ *en fonction de* φ, *lorsqu'on effectue les substitutions laissant* φ *invariable. Former inversement l'expression de* φ *en fonction rationnelle de* ρ, *et en déduire l'équation dont dépendent toutes les valeurs dont la fonction* φ *est susceptible en fonction des coefficients* a_1, a_2, a_3, a_4.

3° *En supposant que pour une équation spéciale la fonction* ρ *soit rationnellement connue, comment achèverait-on les résolutions de l'équation?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Condition de convergence de la série* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$; *limite supérieure du reste.*

Étude de la convergence des séries

$$\sum{}' \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \sum{}' \frac{1}{w^3}, \quad \sum{}' \frac{1}{(u-w^3)},$$

$$\sum{}' \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right), \quad \sum{}' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right),$$

où

$$w = 2m\omega + 2n\omega'$$

$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ *m et n non nuls simultanément.*

(Nancy, novembre 1901.)