V. JAMET

Sur la théorie des forces centrales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 348-367

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__348_1>

SUR LA THÉORIE DES FORCES CENTRALES;

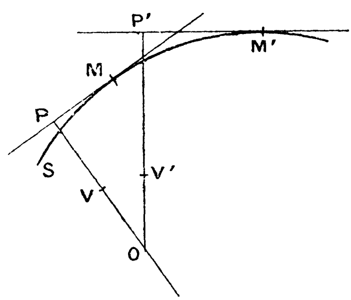
Par M. V. JAMET.

L'article publié dans le numéro de mars par M. Suchar appelle quelques réflexions que je me permets de soumettre aux lecteurs de ce Recueil.

1. M. Suchar démontre que, dans le mouvement d'un point sous l'influence d'une force centrale, si l'hodographe est une conique, la trajectoire est aussi une conique. Son calcul, aussi bien que son raisonnement, convenablement généralisés, conduisent au résultat suivant :

Dans le mouvement d'un point sous l'action d'une *force centrale, l'hodographe qui a pour origine le centre d'action, après avoir tourné d'un angle droit autour de ce centre, coïncide avec la polaire réciproque de la trajectoire, la conique directrice étant un cercle dont le centre est au centre d'action et dont le rayon a pour mesure la racine carrée de la constante des aires.*

Il s'ensuit que, dans un tel mouvement, on peut déterminer comme il suit la trajectoire, dès qu'on connaît l'hodographe et la constante des aires C. Après avoir



fait tourner d'un angle droit, autour du centre d'action, l'hodographe donné, on écrira l'équation de cette courbe, dans sa nouvelle position, sous la forme

$$r = \frac{1}{\varphi(\theta)},$$

où r, θ désignent les coordonnées polaires par rapport à une origine placée au centre d'action. Au point de coordonnées r, θ, situé sur cette courbe répondra, sur la trajectoire, un point tel que la projection de l'origine sur la tangente en ce point aura pour coordonnées polaires θ et $C\varphi(\theta)$, de sorte que l'équation de cette tangente en coordonnées rectilignes sera

$$x \cos\theta + y \sin\theta - C\,\varphi(\theta) = 0, \tag{1}$$

et l'on obtiendra l'équation de la trajectoire en éliminant θ entre cette dernière équation et la suivante :

$$-x \sin\theta + y \cos\theta - C\,\varphi'(\theta) = 0,$$

lesquelles permettent d'exprimer immédiatement x et y en fonction de θ.

2. La loi d'après laquelle la force varie en fonction de la position du mobile peut s'énoncer ainsi :

Dans le mouvement d'un point sous l'action d'une force centrale, la force accélératrice varie en raison inverse du carré de la distance du mobile au centre d'action, et en raison directe du rayon de courbure de l'hodographe au point correspondant.

Soient, en effet,

M, M' les positions du mobile sur sa trajectoire S aux instants t et $t + \Delta t$;
P et P' les projections du centre d'action O sur les tangentes à la trajectoire en M et M';
OV, OV' deux longueurs égales aux vitesses en M et M', comptées sur OP et OP'.

On voit que le lieu du point V est la position occupée par l'hodographe après un quart de rotation autour du point O. D'ailleurs, l'accélération en M est égale à

$$\lim \frac{VV'}{\Delta t} \qquad (\text{pour } \Delta t = 0),$$

et si l'on appelle θ l'angle que fait OM avec une direction fixe, on voit aussi que l'accélération est égale à

$$\lim \frac{VV'}{\Delta\theta}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}\lim \frac{VV'}{\Delta\theta}.$$

Soit C la constante des aires, et soit $OM = r$. On connait la relation

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$$

(loi des aires) et, d'autre part, on constate que la tangente en V à la courbe décrite par ce point devant être sans cesse perpendiculaire à la direction OM de l'accélération, quand le mobile passera de M en M', la direction de la tangente à la courbe lieu du point V tournera d'un angle égal à $\Delta\theta$. Donc le rapport

$$\frac{VV'}{\Delta\theta}$$

a pour limite le rayon de courbure R de la courbe lieu du point V, ou bien le rayon de courbure de l'hodographe au point correspondant à la position M du mobile. Donc, enfin, l'expression de l'accélération est

$$\frac{C}{r^2}R,$$

et si la masse du mobile est m, la force accélératrice est égale à

$$\frac{Cm}{r^2}R.$$

3. Supposons donc que, au lieu de nous donner l'équation de l'hodographe en coordonnées polaires ou cartésiennes, on donne simplement la loi suivant laquelle varie son rayon de courbure en fonction de l'angle que fait sa tangente avec une direction fixe, par exemple avec la direction à laquelle nous rapportons la

trajectoire en coordonnées polaires, et soit

$$(2) \qquad R = F(\theta)$$

l'équation par laquelle se traduit cette loi. Cette équation définit une famille de courbes égales entre elles et orientées de la même manière par rapport à deux axes fixes OX, OY, dont l'un peut être regardé comme confondu avec l'axe des coordonnées polaires : ce sont les courbes qu'on définirait, en coordonnées cartésiennes, en intégrant les deux équations

$$(3) \qquad dX = \cos\theta\, F(\theta)\, d\theta, \qquad dY = \sin\theta\, F(\theta)\, d\theta,$$

puis en éliminant θ entre les deux intégrales obtenues, et ces deux intégrales sont de la forme

$$X = \varphi(\theta) + a, \qquad Y = \psi(\theta) + b,$$

φ, ψ désignant deux fonctions déterminées, a, b deux constantes arbitraires.

Il s'ensuit que l'équation générale des trajectoires déterminées par l'intermédiaire de l'équation (2) doit renfermer deux constantes arbitraires, comme il est facile de le vérifier. En effet, en comparant l'expression trouvée ci-dessus pour l'accélération avec l'expression connue

$$-\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right),$$

on est conduit à intégrer l'équation différentielle

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{1}{C}F(\theta),$$

et l'on sait que celle-ci admet l'intégrale générale

$$(4) \quad \frac{1}{r} = -\frac{1}{C}\left(\sin\theta\int_{\theta_1}^{\theta} F(\theta)\cos\theta\, d\theta - \cos\theta\int_{\theta_1}^{\theta} F(\theta)\sin\theta\, d\theta\right),$$

où θ_0, θ_1 sont arbitraires. Ce résultat est confirmé par une remarque due à M. Darboux et consignée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. LXXXIV, p. 960 et suiv.), savoir :

Dans le mouvement d'un point sous l'action d'une force centrale émanant d'un même point fixe, les trajectoires qui répondent à une même loi des forces sont homologiques d'une même courbe, l'axe d'homologie étant arbitraire, et le centre d'homologie étant au centre d'action de la force

Cela résulte immédiatement de ce qu'on peut écrire l'équation (4) sous la forme

$$\frac{1}{r} = \alpha \cos\theta + \beta \sin\theta + \Phi(\theta),$$

α, β étant arbitraires et $\Phi(\theta)$ désignant une fonction déterminée.

4. On peut préciser la signification des constantes qui figurent dans l'équation (4) en s'imposant la condition que la trajectoire passe par deux points donnés à l'avance, distincts ou non ; dans ce dernier cas, on se donnera la tangente à la trajectoire au point donné. Mais on peut aussi procéder comme il suit. En vertu des équations (3), on peut écrire l'équation (4) sous la forme

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{C}[\sin\theta(X - X_0) - \cos\theta(Y - Y_0)],$$

puis, en employant les coordonnées cartésiennes,

$$x(Y - Y_0) - y(X - X_0) = C,$$

X_0, Y_0 désignant des constantes, x, y les coordonnées d'un point de la trajectoire, X, Y les coordonnées du point qui lui correspond sur l'hodographe. Mais si, dans cette dernière équation, on regarde x, y comme données, X, Y comme des coordonnées courantes, elle représente une droite passant par le point P de l'hodographe qui répond au point x, y, de la trajectoire, et parallèle au rayon vecteur de ce point. C'est donc la tangente à l'hodographe au point P. Mais la distance du point (X_0, Y_0) à cette tangente est égale à

$$\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Donc la projection du point (X_0, Y_0) sur la tangente à l'hodographe décrit une courbe transformée par inversion de la position qu'occuperait la trajectoire, après une translation qui amènerait l'origine actuelle au point (X_0, Y_0), et une rotation d'un angle droit autour de ce point. La constante d'inversion étant C, on en conclut, en vertu de ce qui a été dit au n° 1, que la position occupée par la trajectoire après ces deux mouvements de translation et de rotation est la polaire réciproque de l'hodographe par rapport au cercle dont le centre est au point (X_0, Y_0) et dont le rayon est $\sqrt{C}$; plus simplement encore :

La trajectoire étant déterminée par le choix des constantes X_0, Y_0, *celles-ci sont les coordonnées de l'origine de l'hodographe.*

5. M. Suchar, dans sa Note, fait allusion au problème de Bertrand (*Comptes rendus*, t. LXXXIV), et la lecture des solutions fournies par Halphen et par M. Darboux suggère la question suivante :

Un point matériel se déplace sous l'influence d'une force centrale proportionnelle à sa distance au centre *d'action et inversement proportionnelle au cube de sa distance à une droite fixe. Si l'on ne savait pas que, dans ces conditions, la trajectoire est une conique, comment pourrait-on établir ce résultat?*

La même question se pose à l'égard de la deuxième loi, et ceci nous amène à examiner, dans quelques-uns de ses cas particuliers, le problème qui consiste à rechercher la trajectoire d'un point matériel soumis à une force centrale dont on connaît l'expression en fonction des coordonnées du point. On sait que, dans le système des coordonnées polaires, ce problème se ramène à l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{1}{C^2} r^2 \varphi(r, \theta),$$

où $\varphi(r, \theta)$ désigne l'expression de l'accélération, C la constante des aires.

Nous n'insisterons pas sur le cas classique où φ dépend uniquement de r, cas où le problème se ramène immédiatement aux quadratures. Nous ajouterons seulement les remarques suivantes :

1° Si la fonction φ est de la forme

$$\frac{1}{r^2}\psi(\theta),$$

l'équation ci-dessus est de la forme

$$d^2\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{1}{C^2}\psi(\theta),$$

et admet pour intégrale générale

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{C^2}\left(\sin\theta \int_{\theta_0}^{\theta} \cos\theta\, \psi(\theta)\, d\theta - \cos\theta \int_{\theta_1}^{\theta} \sin\theta\, \psi(\theta)\, d\theta\right),$$

θ_0, θ_1 étant arbitraires.

2° Si la fonction φ est de la forme

$$\frac{1}{r^3}\Psi(\theta),$$

l'équation différentielle devient

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}+\frac{1}{r}=\frac{-1}{C^2 r}\Psi(\theta). \tag{5}$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre, et il suffit d'en connaître une intégrale particulière pour en déduire l'intégrale générale.

6. Mais il y a lieu de s'arrêter un instant sur ce cas particulier, afin d'interpréter la proposition bien connue concernant le rapport anharmonique de quatre intégrales d'une équation de Ricatti. Dans l'équation (5), mise sous la forme

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}=\frac{1}{r}\Phi(\theta),$$

faisons

$$r\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}=u; \tag{6}$$

nous transformons cette équation en une équation de Ricatti, savoir :

$$\frac{du}{d\theta}+u^2=\Phi(\theta),$$

dont quatre intégrales particulières u_1, u_2, u_3, u_4, répondant à une valeur de θ, ont un rapport anharmonique indépendant de θ. Mais, d'après la formule de transformation (6), ces quatre intégrales sont égales et de signe contraire aux tangentes des angles que fait la direction commune aux rayons vecteurs de quatre points situés, respectivement, sur les quatre trajectoires correspondantes, avec les vitesses de quatre mobiles décrivant chacun une de ces quatre trajectoires, aux instants où ces mobiles viennent passer, chacun, en un des points considérés. Donc :

Quatre points de même masse décrivant chacun une trajectoire différente, sous l'action de forces centrales issues d'un même point O, *et dont l'expression est de la forme*

$$\frac{1}{r^3}\psi(\theta),$$

et la constante des aires étant la même pour ces quatre points, les rayons vecteurs des hodographes, correspondant à quatre points situés sur ces quatre trajectoires et sur un même rayon vecteur issu du point O, *ont un rapport anharmonique constant.*

7. Supposons encore que l'expression de la force soit de la forme

$$\frac{Ar}{(r\cos\theta + a)^3},$$

c'est-à-dire que, comme dans l'un des cas où la trajectoire est une conique, la force soit proportionnelle au rayon vecteur, et en raison inverse du cube de la distance du mobile à une droite fixe. Alors l'équation différentielle des trajectoires prend la forme

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = B\,\frac{1}{\left(\cos\theta + \frac{a}{r}\right)^3},$$

B étant égale à

$$\frac{-A}{C^2}.$$

Posons

$$\frac{a}{r} + \cos\theta = \omega,$$

l'équation précédente se transformera comme il suit :

$$\frac{d^2\omega}{d\theta^2} + \omega = \frac{Ba}{\omega^3}.$$

Multipliant les deux membres de cette équation par $d\omega$ et intégrant, désignant en outre par D une constante arbitraire, on trouve

$$\left(\frac{d\omega}{d\theta}\right)^2 + \omega^2 = \frac{-Ba}{\omega^2} + 2D$$

et, par conséquent,

$$d\theta = \frac{\omega\,d\omega}{\pm\sqrt{2D\omega^2 - Ba - \omega^4}} = \frac{\omega\,d\omega}{\pm\sqrt{D^2 - Ba - (\omega^2 - D)^2}},$$

par suite aussi, en désignant par θ_0 une nouvelle arbitraire,

$$2(\theta - \theta_0) = \arcsin\frac{\omega^2 - D}{\sqrt{D^2 - Ba}}$$

ou bien

$$\omega^2 - D = \sqrt{D^2 - Ba}\,\sin 2(\theta - \theta_0),$$

ou encore

$$\left(\frac{a}{r} + \cos\theta\right)^2 - D = \sqrt{D^2 - Ba}\,\sin 2(\theta - \theta_0).$$

En revenant des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, on trouve l'équation d'une conique dont les deux tangentes issues de l'origine ont leur point de contact sur la droite donnée.

8. Le cas particulier que nous venons de traiter peut être généralisé comme il suit : Dans l'expression de la force

$$\frac{r}{(a+r\cos\theta)^3},$$

remplaçons le facteur

$$\frac{1}{(a+r\cos\theta)^3}$$

par une fonction donnée de la distance du mobile à une droite fixe, que nous pouvons supposer encore perpendiculaire à Ox. Alors l'expression de la force prendra la forme

$$r\,f(x).$$

D'ailleurs les équations du mouvement, en fonction des coordonnées cartésiennes x, y du mobile et l'accélération γ, sont les suivantes :

$$\frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\gamma}{r}.$$

La masse du mobile étant supposée égale à 1, on trouve

$$\frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dt^2}=f(x).$$

On en déduira

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x\,f(x),$$

puis, en multipliant les deux membres par dx, en intégrant et en désignant par x_0 une constante arbitraire :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2\int_{x_0}^{x}x\,f(x)\,dx,$$

ou bien

$$(7)\qquad dt=\pm\frac{dx}{\sqrt{2\int_{x_0}^{x}x\,f(x)\,dx}}.$$

D'ailleurs la loi des aires se traduit par l'équation

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C,$$

d'où l'on déduit

$$y = Cx\int_{t_1}^{t}\frac{dt}{x^2},$$

et, par conséquent, en vertu de la formule (7),

$$y = Cx\int_{x_1}^{x}\frac{dx}{x^2\sqrt{2\int_{x_0}^{x} x\,f(x)\,dx}}, \tag{8}$$

x_1 désignant une nouvelle constante arbitraire.

Dans le cas particulier qui vient d'être traité, la fonction $f(x)$ était égale à

$$\frac{1}{(x+a)^3},$$

et il n'y a plus de difficulté à vérifier que l'équation (8) représente une conique lorsque la fonction f reçoit cette détermination particulière.

9. Pour faire une autre application de la formule (8), supposons que la fonction $f(x)$ soit, par rapport à x, un binome du premier degré, savoir :

$$3\alpha x + 2\beta,$$

c'est-à-dire que la force soit proportionnelle à la distance du mobile au centre d'action, et aussi à sa distance à une droite fixe.

Alors on trouve

$$\int_{x_0}^{x} x\,f(x)\,dx = \alpha(x^3 - x_0^3) + \beta(x^2 - x_0^2).$$

On décomposera le second membre en un produit de la forme

$$\alpha(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$$

et l'on posera

$$(9) \qquad x = \frac{x_0+x_1+x_2}{3} + pu,$$

puis on choisira les invariants g_2, g_3 de la fonction p, comme il suit. En vertu de la formule (9), le produit

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

sera identique à un trinome de la forme

$$\frac{1}{4}(4p^3u - g_2 pu - g_3);$$

les constantes g_2, g_3 seront alors les invariants de notre fonction p. Soit alors

$$\frac{x_0+x_1+x_2}{3} = -pa;$$

la formule (8) deviendra

$$y = C\sqrt{\frac{2}{\alpha}}(pu-pa)\int_{u_1}^{u}\frac{du}{(pu-pa)^2}.$$

Mais on connaît la formule

$$\frac{1}{pu-pa} = \frac{1}{p'a}[\zeta(u-a)-\zeta(u+a)+2\zeta a] \quad (^1).$$

On en déduit, en différentiant par rapport à a,

$$\begin{aligned}\frac{p'a}{(pu-pa)^2} = \frac{-p''a}{p'^2a}&[\zeta(u-a)-\zeta(u+a)+2\zeta a]\\ &+\frac{1}{p'a}[p(u-a)+p(u+a)+2pa],\end{aligned}$$

---

(1) APPELL et LACOUR, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques*, p. 59

puis encore

$$\int \frac{du}{(pu - pa)^2}$$
$$= \frac{-p''a}{p'^3 a}\left(\log \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} + 2u\zeta a\right)$$
$$- \frac{1}{p'^2 a}[\zeta(u-a) + \zeta(u+a) + 2u pa] + D,$$

D désignant une constante. Donc ici la trajectoire sera définie par les deux équations

$$x = pu - pa,$$
$$y = C\sqrt{\frac{2}{\alpha}(pu - pa)}\left[\frac{-p''a}{p'^3 a}\left(\log \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} + 2u\zeta a\right) - \frac{1}{p'^2 a}[\zeta(u-a) + \zeta(u+a) + 2u pa] + D\right].$$

10. Outre le cas où la force est donnée par une formule telle que

$$\frac{Ar}{(a\cos\theta + r)^3},$$

il y a encore un cas où la trajectoire est une conique. C'est celui où l'expression de la force est de la forme

$$\frac{Ar}{(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

A, α, β, γ désignant des constantes. On peut, d'ailleurs, en choisissant convenablement les axes, supposer que la constante β est nulle; et si, supposant la trajectoire inconnue, on veut déduire la forme de cette trajectoire de l'expression ci-dessus, on reviendra aux coordonnées polaires, et l'on sera conduit à intégrer l'équation différentielle

$$(10) \qquad \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{-A}{C^2(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les développements fournis au n° 5 (1°) nous ont montré que l'intégration d'une telle équation peut s'opérer au moyen de deux quadratures. Ajoutons que cette équation ne diffère pas de celle que l'on trouve en appliquant la méthode du n° 3 au cas où l'hodographe est la conique représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{\gamma} + \frac{y^2}{\alpha} = k,$$

pourvu que k soit convenablement déterminée en fonction des constantes A et C. En effet, la tangente à cette conique fait avec l'axe Ox un angle θ déterminé par l'équation

$$\operatorname{tang}\theta = -\frac{\alpha x}{\gamma y},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{x}{\gamma \sin\theta} = \frac{y}{-\alpha\cos\theta} = \frac{k}{\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta}},$$

puis

$$x = \frac{k\gamma\sin\theta}{\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta}},$$

$$y = \frac{-k\alpha\sin\theta}{\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta}},$$

$$dx = \frac{k\alpha\gamma\cos\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$dy = \frac{-k\alpha\gamma\sin\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F(\theta) = R = \frac{k\alpha\gamma}{(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

Dans ces conditions, l'équation différentielle établie au n° 3 devient

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{-k\alpha\gamma}{C(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

et ne diffère pas de l'équation (10) si l'on suppose

$$k = \frac{A}{C\alpha\gamma}.$$

11. Le calcul précédent suppose essentiellement qu'il s'agit d'une ellipse ou d'une hyperbole. Comment faut-il modifier l'expression de la force si l'on veut que l'hodographe soit une parabole? Nous observerons que sur une parabole de paramètre p, si la tangente en un point fait avec l'axe de symétrie un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \theta$, le rayon de courbure en ce point est égal à

$$\frac{p}{\cos^3\theta},$$

et l'expression de la force agissant sur un point de masse 1 sera

$$\frac{Cp}{r^2\cos^3\theta},$$

et l'on sera ramené au calcul du n° 7, dans l'hypothèse où $a = 0$ et $B = \frac{p}{C}$.

12. Nous allons maintenant faire subir aux équations du mouvement

$$\frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{g}{r} \tag{11}$$

(où g désigne l'accélération) une transformation qui va nous permettre de généraliser la question traitée au n° 10. A cet effet, nous posons

$$y = ux,$$

et nous observons que l'équation

$$x\,dy - y\,dx = C\,dt.$$

par laquelle se traduit la loi des aires, se transforme comme il suit :

$$du = \frac{C}{x^2}\,dt, \tag{12}$$

ou bien

$$dt = \frac{x^2\,du}{C}.$$

Mais l'une des équations (11) peut se transformer ainsi

$$\frac{1}{x}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{g}{r},$$

ou bien, d'après la formule (12),

$$\frac{C^2}{x^3}\,\frac{d}{du}\left(\frac{dx}{x^2\,du}\right) = \frac{g}{r},$$

ou bien encore

$$-\frac{C^2}{x^3}\,\frac{d^2\left(\frac{1}{x}\right)}{du^2} = \frac{g}{r}.$$

13. Soit donc

$$g = \frac{A}{x^m\,\varphi(x, y)},$$

A désignant une constante, φ une fonction homogène de degré μ. L'équation différentielle ci-dessus deviendra

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{x}\right)}{du^2} = \frac{-A}{C^2}\,\frac{1}{x^{m+\mu-3}\,\varphi(1, u)},$$

et son intégration se ramènera à des quadratures si l'on a, comme dans la question qui fait l'objet du n° 10,

$$m + \mu - 3 = 0.$$

La relation cherchée entre x et u, d'où l'on déduira l'équation de la trajectoire, sera

$$(13)\qquad \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{-A}{C^2}} \int_{u_0}^{u} \frac{(u-z)\,dz}{\varphi(1, z)} + hu,$$

u_0, h étant arbitraires.

Par exemple, si φ désigne la racine carrée d'un polynome entier du troisième degré, de telle sorte que l'expression de l'accélération soit

$$\frac{A\,r}{\sqrt{\alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^3}},$$

on aura

$$\varphi(1, z) = \sqrt{\alpha + 3\beta z + \gamma z^2 + \delta z^3},$$

et l'on pourra trouver une transformation telle que

$$z = M + N\wp\varepsilon,$$

où M, *N désignent des constantes*, ε *une nouvelle variable* et telle aussi que l'on ait

$$\alpha + 3\beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 = 4\wp^3\varepsilon - g_2\wp\varepsilon - g_3,$$

g_2, g_3 *étant encore des constantes*. Alors l'équation (13) deviendra

$$\frac{1}{x} = \frac{N}{C}\sqrt{-A} \int_{v_0}^{v} (u - M - N\wp\varepsilon)\,d\varepsilon + hu,$$

en supposant

$$u = M + N\wp v, \qquad u_0 = M + N\wp u_0.$$

On en déduira

$$\frac{1}{x} = \frac{N^2}{C}\sqrt{-A} \int_{v_0}^{v} (\wp v - \wp\varepsilon)\,d\varepsilon + h(M + N\wp v),$$

ou bien

$$(14)\qquad \frac{1}{x} = \frac{N^2}{C}\sqrt{-A}\,[(v - v_0)\wp v + \zeta v - \zeta v_0] + h(M + N\wp v);$$

et comme on a $y = ux$, on trouvera aussi

$$(15)\quad \frac{1}{y} = \frac{1}{\mathrm{M}pv + \mathrm{N}}\left(\frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{C}}\sqrt{-\mathrm{A}}\,[(v - v_0)pv + \zeta v - \zeta v_0] + h(\mathrm{M} + \mathrm{N}pv)\right),$$

et les équations (14) et (15) définiront la trajectoire.

14. On voit encore que l'équation différentielle établie au numéro précédent sera une équation différentielle linéaire du second ordre, si l'on a

$$m + \mu = 4.$$

Par exemple, si φ désigne un polynome entier, homogène et du second degré en x et y, de telle sorte que l'expression de la force soit, à un facteur constant près,

$$\frac{r}{x^2(ax^2 + 2bxy + cy^2)},$$

l'équation différentielle ci-dessus deviendra une équation différentielle linéaire, du second ordre, intégrable au moyen des séries entières. Le calcul des coefficients successifs d'une telle série, en fonction des deux premiers, s'effectuera au moyen d'une formule de récurrence que l'on pourra réduire à deux termes, après avoir fait, dans le polynome

$$\varphi(1, u) = a + 2bu + cu^2,$$

la substitution

$$cu + b = \sqrt{b^2 - ac}\, v,$$

dans laquelle v désignera la nouvelle variable.