NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Théorèmes sur des courbes planes de genre un ou zéro

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 34-39

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__34_1>

[M6c]

THÉORÈMES SUR DES COURBES PLANES DE GENRE *un* OU *zéro*;

PAR M. G. FONTENÉ

1. THÉORÈME I. — *Soient* P *et* Q *les deux points doubles d'une quartique binodale, ou deux points quelconques d'une cubique, ou deux points pris dans le plan d'une conique : appelons* conique associée *à la courbe que l'on considère toute conique passant en* P *et* Q. *Si l'on prend sur la courbe les points*

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{llll} A_1, & A_2, & A_3, & A_4, \\ B_1, & B_2, & B_3, & B_4, \\ C_1, & C_2, & C_3, & C_4, \\ D_1, & D_2, & D_3, & D_4, \end{array}\right.$$

tels que, d'une part, les quatre points A *sont à une conique associée* α, *les quatre points* B *sont à une conique* *associée* β, *les quatre points* C *sont à une conique associée* γ, *et, d'autre part, les quatre points d'indice i sont à une* conique associée *i pour* $i = 1, 2, 3, 4$, *il arrive que les quatre points* D *sont à une conique associée* δ.

Pour une quartique bicirculaire, P et Q sont les points cycliques; pour une cubique circulaire ou une conique, P et Q peuvent être les points cycliques; une conique associée est alors un cercle.

On peut se donner arbitrairement les neuf points A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, ce qui conduit à énoncer le théorème en disant : Les coniques associées α, β, γ, qui passent respectivement par les trois points A, par les trois points B, par les trois points C, coupent encore la courbe en A_4, B_4, C_4 ; les coniques associées 1, 2, 3 qui passent respectivement par les trois points d'indice 1, par les trois points d'indice 2, par les trois points d'indice 3, coupent encore la courbe en D_1, D_2, D_3 ; alors la conique associée 4 qui passe en A_4, B_4, C_4, et la conique associée δ qui passe en D_1, D_2, D_3, rencontrent encore la courbe en un même point D_4.

Le théorème se démontre immédiatement pour une quartique binodale ou une cubique en considérant les arguments elliptiques des points de la courbe, qui est de genre *un*; pour une conique, en supposant que P et Q sont les points cycliques, on prendrait les arguments circulaires (angle excentrique employé par Joachimsthal).

Citons ce cas particulier, qui généralise un théorème de Joachimsthal :

Les cercles 1, 2, 3, 4, *osculateurs à une quartique bicirculaire, ou à une cubique circulaire, ou à une conique, aux quatre points où elle est coupée par un* *cercle* ($\alpha = \beta = \gamma$), *coupent encore la courbe en quatre points qui sont à un cercle* δ.

Il y aurait lieu de considérer les seize autres points d'intersection des coniques α, β, γ, δ avec les coniques 1, 2, 3, 4.

2. Théorème II. — *Soient* P, Q, R *trois points triples d'une sextique, ou deux points doubles et un point triple d'une quintique, ou deux points doubles et un point quelconque d'une quartique, ou trois points d'une cubique, ou deux points pris dans le plan d'une conique et un point de la conique : appelons* conique associée *à la courbe toute conique passant en* P, Q, R. *Si l'on prend sur la courbe les points*

$$(2) \qquad \left\{ \begin{matrix} A_1, & A_2, & A_3, \\ B_1, & B_2, & B_3, \\ C_1, & C_2, & C_3, \end{matrix} \right.$$

tels que, d'une part, les trois points A *sont à une conique associée* α, *les trois points* B *sont à une conique associée* β, *et, d'autre part, les trois points d'indice i sont à une conique associée i pour* $i = 1, 2, 3$, *il arrive que les trois points* C *sont à une conique associée* γ.

On peut se donner arbitrairement les quatre points A_1, A_2, B_1, B_2.

La courbe est de genre *un*, ou de genre *zéro* si c'est une conique, et le théorème se démontre comme le précédent.

3. *Rattachement du théorème II à un cas particulier du théorème I.* — Pour une quartique, ou une courbe de degré moindre, le théorème II est un cas particulier du théorème I.

Si, en effet, dans le théorème I on suppose

$$D_1 = A_4 = R, \qquad D_2 = B_4 = R',$$

on a

$$D_3 = C_4 = R'',$$

la conique associée $RR'R''$ coupe encore la courbe donnée en D_4; plus particulièrement, les trois points R, R', R'' peuvent se confondre, conformément au Tableau

$$\begin{array}{cccc} A_1, & A_2, & A_3, & R, \\ B_1, & B_2, & B_3, & R, \\ C_1, & C_2, & C_3, & R, \\ R, & R, & R, & D_4, \end{array}$$

et l'on a le théorème II pour une quartique ou une courbe de degré moindre.

Pour une cubique, les coniques considérées passent par trois points P, Q, R de la courbe. On peut en particulier supposer ces trois points en ligne droite, et les coniques sont formées de la droite PQR et d'une droite quelconque; on obtient alors, les points P, Q, R s'éliminant, un théorème bien connu relatif à deux systèmes de trois sécantes dans une cubique, conformément au Tableau (2); en appliquant la transformation du second ordre à ce dernier théorème, on obtient intégralement le théorème II.

Voici un exemple du théorème II pour lequel nous laisserons de côté la sextique et la quintique :

Les points d'osculation A_1, A_2, A_3 *des trois cercles osculateurs* 1, 2, 3 *que l'on peut mener à une quartique bicirculaire, ou à une cubique circulaire, ou à une conique, par un point* R *de la courbe, déterminent un cercle* ($\alpha = \beta = \gamma$) *qui passe en* R.

Ce théorème, qui généralise un théorème de Joachimsthal, rentre d'ailleurs dans celui qui a été donné à la fin du n° 1; le cercle δ est ici le cercle osculateur en R. Dans les *Nouvelles Annales* (2ᵉ série, t. IV, p. 391), Abel Transon a rattaché par la projection gauche, qui est une transformation du second ordre, le théorème de Joachimsthal pour une conique, ou plutôt le transformé homographique de ce théorème, au fait que les trois points d'inflexion d'une cubique nodale sont en ligne droite: il part de la conique et prend comme points principaux les points P, Q, R, de sorte que la conique, passant en R, donne une cubique nodale (plus une droite), tandis que les coniques qui passent en P, Q, R donnent des droites; on a vu plus haut le développement de cette idée.

4. *Démonstration géométrique du théorème I pour le cas d'une conique.* — Le théorème général du n° 1 est facile à établir géométriquement pour une ellipse, en supposant que P et Q sont les points cycliques; il suffit de considérer l'ellipse comme projection d'un cercle. A quatre points A, B, C, D de l'ellipse situés sur un cercle correspondent quatre points a, b, c, d du cercle projection, tels que les trois couples de côtés du quadrangle obtenu ont leurs bissectrices parallèles à deux directions déterminées, ou, simplement, tels que les droites ad et bc, par exemple, font avec une direction xy des angles égaux en sens contraires : nous dirons que les quatre points a, b, c, d sont *associés* sur le cercle pour la direction xy. Si l'on considère d'abord trois cordes $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, et si l'on détermine les points d_1 et d_2 respectivement associés aux points a_1, b_1, c_1 et aux points a_2, b_2, c_2, il est aisé de voir que la direction de la corde $d_1 d_2$ dépend seulement des directions des cordes primitives, et non de leur position; à l'égard de

la corde a_1a_2, par exemple, on détermine d_1 et d_2 en menant b_1c_1, b_2c_2, puis a_1d_1, a_2d_2 : en considérant le quadrilatère inscriptible $a_2a_1d_1d_2$, on voit que, si a_1a_2 se meut parallèlement à elle-même, l'angle en a_1 reste constant, par suite l'angle opposé d_2 reste constant, et la droite d_1d_2 se meut parallèlement à elle-même. Si l'on considère maintenant trois autres cordes a_3a_4, b_3b_4, c_3c_4 faisant avec xy les mêmes angles que a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, en sens contraires, et si l'on détermine les points d_3 et d_4 respectivement associés aux points a_3, b_3, c_3, et aux points a_4, b_4, c_4, il résulte de ce qui précède que la corde d_3d_4 fait avec xy le même angle que d_1d_2 en sens inverse; il suffit de replier la figure autour de xy. Le théorème à démontrer résulte de là immédiatement.

Des considérations géométriques analogues permettent d'établir, à propos du second théorème de Joachimsthal, ce fait connu que le triangle $A_1A_2A_3$ est un triangle semi-régulier inscrit à la conique (de sorte que les normales en A_1, A_2, A_3 sont concourantes). L'ellipse étant projetée suivant un cercle, ri étant la corde du cercle parallèle à l'axe focal de l'ellipse, on cherche un point a_1 tel que la corde ra_1 et la tangente a_1t_1 soient également inclinées sur ri, d'où l'on conclut aisément que la corde ra_1 réalise à partir de ri la trisection de l'angle $irt + k\pi$, rt étant la tangente en r : les points a_1, a_2, a_3 sont donc les sommets d'un triangle équilatéral; en outre, la corde a_2a_3, parallèle à la tangente a_1t_1, fait avec ri le même angle que ra_1, mais en sens inverse, de sorte que les quatre points r, a_1, a_2, a_3 sont associés pour la direction ri; donc....