Nouvelles annales de mathématiques

Maurice Fréchet

Généralisation du théorème de Tissot

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 446-448

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__446_1>

[P5]

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE TISSOT;

PAR M. MAURICE FRÉCHET,
Élève de l'École Normale supérieure.

THÉORÈME. — *Étant donnée une correspondance* PONCTUELLE *quelconque entre trois surfaces* S_1, S_2, S_3, *il existe* EN GÉNÉRAL *quatre couples de familles de courbes sur* S_1 *telles que les angles sous lesquels se coupent deux courbes d'un même couple soient conservés dans la correspondance.*

En effet, nous supposons la correspondance telle qu'on puisse exprimer les coordonnées de trois points correspondants M_1 sur S_1, M_2 sur S_2, M_3 sur S_3 au moyen des deux mêmes paramètres u, v. Soient alors m_1, m'_1 ; m_2, m'_2 ; m_3, m'_3 ; n, n' les valeurs de $\frac{du}{dv}$ pour les tangentes isotropes à S_1 et M_1, les transformées des tangentes isotropes à S_2 en M_2 et à S_3 en M_3, et pour les tangentes M_1T_1, $M_1T'_1$, à deux courbes de S_1 passant en M_1. Soient, de plus, V_1, V_2, V_3 les angles de M_1T_1, $M_1T'_1$ et des tangentes aux courbes correspondantes. On aura :

$$e^{2iV_1} = (m_1, m'_1, n, n'),$$
$$e^{2iV_2} = (m_2, m'_2, n, n'),$$
$$e^{2iV_3} = (m_3, m'_3, n, n').$$

On peut considérer m_1, m'_1 ; m_2, m'_2 ; m_3, m'_3 ; n, n' comme racines des équations respectives :

$$x^2 - 2p_k x - q_k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3), \qquad x^2 - 2\alpha x + \beta = 0.$$

En posant

$$r_k = \sqrt{p_k^2 - q_k}, \qquad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta},$$

on aura

$$(1) \quad e^{2iV_k} = \frac{m_k - n}{m_k - n'} : \frac{m'_k - n}{m'_k - n'} = 1 + \frac{4 r_k \gamma}{(p_k - \alpha)^2 - (r_k - \gamma)^2}.$$

On aura alors les courbes cherchées par les équations

$$e^{iV_1} = e^{iV_2} = e^{iV_3},$$

qui deviennent, en tenant compte de (1),

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{p_1^2 - p_2^2 - r_2^2 - r_1^2}{r_1 - r_2} - \frac{p_1^2 - p_3^2 - r_3^2 - r_1^2}{r_1 - r_3} \\ & \qquad = 2\alpha\left(\frac{p_2 - p_1}{r_2 - r_1} - \frac{p_3 - p_1}{r_3 - r_1}\right), \end{aligned} \right.$$

$$(3) \quad \frac{(p_1 - \alpha)^2 - r_1^2}{r_1} - \frac{(p_2 - \alpha)^2 - r_2^2}{r_2} = \gamma^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

De (2) on tire *une* valeur de α, et en portant dans (3) on en tire *une* valeur de γ^2, donc de $\beta = \alpha^2 - \gamma^2$.

D'ailleurs, il n'y a que quatre combinaisons de signes des quantités r_i donnant des systèmes différents de valeurs pour α et β, car on obtient les mêmes expressions de α et β en changeant de signe tous les r_i. A chaque combinaison correspond un seul couple de tangentes, ce qui démontre le théorème.

Il y aura une infinité de couples de familles satisfaisant aux conditions dans le seul cas où la correspondance serait une représentation géographique de l'une des surfaces sur l'une au moins des deux autres.