NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. IAGGI

Sur la détermination des fonctions qui admettent les substitutions d'un groupe donné, et seulement ces substitutions-là

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 485-496

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__485_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[D]

SUR LA DÉTERMINATION DES FONCTIONS QUI ADMETTENT LES SUBSTITUTIONS D'UN GROUPE DONNÉ, ET SEULEMENT CES SUBSTITUTIONS-LÀ;

PAR M. E. IAGGI.

Nous avons vu [1] que les fonctions uniformes $F(x)$, qui admettent les substitutions d'un groupe donné, et seulement ces substitutions-là, sont les intégrales de l'équation

$$(1)\quad \begin{cases} 2\,\dfrac{F'''(x)}{F'(x)} - 3\,\dfrac{F''^2(x)}{F'^2(x)} \\[2ex] \quad = 6\,\dfrac{\Phi''(x)}{\Phi(x)} - 3\,\dfrac{\Phi'^2(x)}{\Phi^2(x)} - 4\Psi(x) = \chi(x), \end{cases}$$

et que ces fonctions sont les quotients des fonctions

[1] *Détermination des fonctions qui admettent les substitutions d'un groupe quelconque donné, et seulement ces substitutions-là* (*Nouvelles Annales*, août 1902, p. 368).

entières Θ, intégrales de l'équation

$$(2) \qquad \Phi\Theta'' - \Phi'\Theta' + (\Phi'' - \Phi\Psi)\Theta = 0,$$

où

$$(3) \quad \Phi = \lambda e^{2\sum_i \int \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right) dx}, \qquad \Psi = \frac{3}{4}\frac{\Phi'^2}{\Phi} + 3\sum_i \left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right),$$

les quantités $p_i(x)$ étant les *périodes* du groupe

$$p_i(x) = s_i(x) - x,$$

et les quantités $h_i(x)$, $k_i(x)$ rendant convergentes les séries

$$\sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right), \qquad \sum_i \left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right)$$

et devant être annulées lorsque $\sum_i \frac{1}{p_i}$, $\sum_i \frac{1}{p_i^2}$ sont des séries convergentes.

Lorsqu'on se propose de déterminer les fonctions $F(x)$ d'un groupe donné, par les équations précédentes, la détermination se fait sans ambiguïté lorsque les séries $\sum_i \frac{1}{p_i}$, $\sum_i \frac{1}{p_i^2}$ sont convergentes; lorsque ces séries ne sont pas convergentes, il faut choisir des quantités h_i, k_i qui rendent convergentes les séries indiquées. Mais ce choix présente une ambiguïté, et l'on n'est pas assuré que les fonctions $F(x)$ obtenues ainsi sont bien des fonctions admettant les substitutions du groupe donné et seulement ces substitutions-là, en sorte que, dans ce cas, il devient nécessaire de vérifier ensuite si les fonctions $F(x)$ obtenues sont bien les fonctions du groupe donné, ou si les fonctions Θ, intégrales de l'équation (2) ont toutes le multiplicateur dont la formule est, comme on sait,

$$(4) \qquad \theta = \sqrt{\frac{\Phi(s)\,ds}{\Phi(x)\,dx}},$$

pour une substitution $s(x)$ quelconque du groupe. Il suit de là que le choix des quantités h_i, k_i ne peut être arbitraire et soumis à la seule condition que les séries indiquées soient convergentes; cela est d'ailleurs évident si l'on remarque que les intégrales Θ seraient arbitraires si les h_i, k_i et, par suite, les fonctions Φ et Ψ étaient arbitraires.

Mais on peut se donner *arbitrairement* les fonctions $h_i(x)$, sous la condition que $\sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right)$ soit convergente; les fonctions k_i sont alors déterminées.

En effet, supposons que l'on connaisse des fonctions Φ, Ψ, telles que l'équation (1) ait pour intégrales les fonctions *périodiques* $F(x)$ du groupe donné et, par suite, que l'équation (2) ait pour intégrales des fonctions à multiplicateur Θ du groupe qui, par leurs quotients, donnent les fonctions $F(x)$. Changeons les fonctions $h_i(x)$ dans la formule

$$\frac{\Phi'(x)}{2\Phi(x)} = \sum_i \left(h_i - \frac{1}{p_i}\right).$$

Ceci revient à ajouter à la série du second membre une certaine fonction que nous désignerons par $g'(x)$, car la nouvelle série obtenue avec les nouvelles fonctions h_i doit être convergente comme la précédente, et, par conséquent, la différence de ces deux séries est une série convergente, c'est-à-dire une fonction $g'(x)$. La fonction Φ est alors remplacée par la nouvelle fonction

$$\Phi_1(x) = \lambda e^{2g(x)} \Phi(x),$$

dans laquelle λ est un facteur constant arbitraire qui provient de $g(x)$, intégrale de $g'(x)$; [la fonction $\Phi(x)$ n'a d'ailleurs été déterminée qu'à un facteur constant près].

Déterminons maintenant les k_i de manière que les fonctions $F(x)$ déterminées par l'équation (1) restent les mêmes : la fonction $\chi(x)$ doit rester invariable lorsqu'on y remplace Φ par Φ_1. Or, $\chi(x)$ s'écrit

$$\chi(x) = 6\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{L}\,\Phi(x) - 12\sum_i\left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right).$$

Posons

$$\sum_i\left(k_i - \frac{1}{p_i^2}\right) = \psi(x),$$

en sorte que

$$(5)\qquad \chi(x) = 6\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{L}\,\Phi(x) - 12\psi(x).$$

Lorsqu'on remplace Φ par Φ_1, le premier terme de cette expression s'augmente de

$$12g'';$$

il s'ensuit que, pour que $\chi(x)$ reste invariable, ψ doit être augmenté également de $12g''$, c'est-à-dire que les premières fonctions $k_i(x)$ doivent être remplacées par de nouvelles fonctions telles que la différence des deux séries $\psi(x)$ et $\psi_1(x)$ soit $g''(x)$, dérivée de la fonction $g'(x)$ que nous avons choisie *arbitrairement*.

Cherchons ce que deviennent les fonctions Θ. Les nouvelles fonctions à multiplicateur, $\Theta_1(x)$, sont les intégrales de l'équation

$$(6)\qquad \Phi_1\Theta_1'' - \Phi_1'\Theta_1' + (\Phi_1'' - \Phi_1\Psi_1)\Theta_1 = 0,$$

où l'on a

$$(7)\qquad \Phi_1 = \lambda e^{2g}\Phi,$$

$$\Psi_1 = \frac{3}{4}\frac{\Phi_1'^2}{\Phi_1^2} + 3\psi_1 = 3(g'^2 + g'') + 3g'\frac{\Phi'}{\Phi} + \Psi,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\Phi_1'}{\Phi_1} = 2g' + \frac{\Phi'}{\Phi}, \qquad \frac{\Phi_1''}{\Phi_1} = 2g'' + 4g'^2 + 4g'\frac{\Phi'}{\Phi} + \frac{\Phi''}{\Phi}.$$

D'ailleurs, on peut désigner par

$$\Theta_1 = e^{\rho(x)}\,\Theta,$$

l'intégrale de l'équation (6), où $\rho(x)$ est une fonction jusqu'ici inconnue que nous allons déterminer. On a

$$\frac{\Theta_1'}{\Theta_1} = \rho' + \frac{\Theta'}{\Theta}, \qquad \frac{\Theta_1''}{\Theta_1} = \rho'' + \rho'^2 + 2\rho'\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Remplaçant $\frac{\Phi_1'}{\Phi_1}$, $\frac{\Phi_1''}{\Phi_1}$, $\frac{\Theta_1'}{\Theta_1}$, $\frac{\Theta_1''}{\Theta_1}$, Ψ_1, par les expressions précédentes dans l'équation (6) mise sous la forme

$$\frac{\Theta_1''}{\Theta_1} - \frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\frac{\Theta_1'}{\Theta_1} + \frac{\Phi_1''}{\Phi_1} - \Psi = 0,$$

nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned}\rho'' + \rho'^2 + 2\rho'\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{\Theta''}{\Theta} - \left(2g' + \frac{\Phi'}{\Phi}\right)\left(\rho' + \frac{\Theta'}{\Theta}\right)&\\ + 2g'' + 4g'^2 + 4g'\frac{\Phi'}{\Phi} + \frac{\Phi''}{\Phi}&\\ - 3(g'^2 + g'') - 3g'\frac{\Phi'}{\Phi} - \Psi = 0&,\end{aligned}$$

qui doit se réduire à l'équation (2) mise sous la forme

$$\frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\Phi'}{\Phi}\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{\Phi''}{\Phi} - \Psi = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante est

$$\rho' = g'$$

et les nouvelles fonctions Θ_1 sont donc données par la formule

$$\Theta_1(x) = \lambda e^{g(x)}\,\Theta(x).$$

où $\Theta(x)$ est l'intégrale générale de l'équation (2) et où $g(x)$ est l'intégrale de $g'(x)$, à une constante près qui est mise en évidence par le facteur arbitraire λ.

Cherchons enfin quel est le multiplicateur θ_1 des nouvelles fonctions; on a, par la formule connue,

$$(8)\quad \begin{cases} \theta_1(s,x) = \sqrt{\dfrac{\Phi_1(s)\,ds}{\Phi_1(x)\,dx}} \\ \qquad = \sqrt{\dfrac{e^{2g(s)}\,\Phi(s)\,ds}{e^{2g(x)}\,\Phi(x)\,dx}} = e^{g(s)-g(x)}\,\theta(s,x). \end{cases}$$

Ainsi, lorsqu'on multiplie la fonction $\Phi(x)$ par un facteur *arbitraire* $\varphi^2 = e^{2g(x)}$ et que l'on augmente $\psi(x)$ de g'', les fonctions $F(x)$ restent les mêmes, mais les fonctions à multiplicateur $\Theta(x)$ sont multipliées par $e^{g(x)}$, racine carrée de φ^2, et leur multiplicateur est multiplié par $e^{g(s)-g(x)}$.

Il résulte de là la possibilité, évidente *a priori*, d'obtenir une infinité de systèmes de fonctions à multiplicateur Θ qui, par leurs quotients, donnent les fonctions périodiques $F(x)$ du groupe donné ; on passe d'un système à un autre en multipliant les fonctions Θ du premier système par une même fonction *arbitraire* $\varphi(x)$. $\varphi(x) = e^{g(x)}$ étant arbitraire, on voit qu'on pourra obtenir un système de fonctions Θ dans lequel une de ces fonctions *est donnée a priori;* toutes les autres sont alors déterminées complètement. On peut, au contraire, se donner arbitrairement $\Phi_1(x)$. Mais il est évident que les fonctions $\Phi_1(x)$ et $\Theta_1(x)$ obtenues ainsi ne satisfont pas toutes à la condition d'être entières, condition dont nous nous sommes servi tout d'abord pour déterminer les équations (1) et (2). Si $\Phi(x)$ et les intégrales $\Theta(x)$ sont des fonctions entières, on n'obtiendra de nouvelles fonctions entières $\Phi_1(x)$, $\Theta_1(x)$ qu'autant que $\varphi(x)$ sera entière.

Rappelons que nous nous sommes servi, dans une Note précédente, de l'indétermination des fonctions $h_i(x)$, c'est-à-dire de la possibilité de la transformation de $\Phi(x)$, pour obtenir, dans le cas du groupe de $\mathrm{sn}(x \mid \mathrm{K}, i\mathrm{K}')$, soit les fonctions H, Θ de Jacobi, soit les fonctions σu, $\sigma_3 u$ de Weierstrass, et ajoutons qu'on pourrait obtenir également les fonctions $\mathrm{Al}(x)$ de Weierstrass, par un choix convenable de $\varphi = e^{g(x)}$, puisque ces dernières fonctions ne diffèrent des précédentes que par un facteur exponentiel.

De ce fait qu'on peut obtenir, pour un groupe donné, un système de fonctions $\Theta(x)$ dans lequel l'une est arbitraire ([1]), on ne peut conclure que le multiplicateur donné par les formules (8) et (4) soit arbitraire, ce qui reviendrait à dire qu'on peut choisir $g(x)$ de manière que θ_1 soit une fonction donnée de $s(x)$ et de x, ou encore que, pour toutes les substitutions $s(x)$ du groupe, on ait

$$g(s) = g(x) + \xi(x),$$

où $\xi(x)$ serait une fonction donnée. Toutefois, dans quelques cas, on peut vérifier que, quel que soit le groupe donné, on peut choisir $g(x)$ ou $\Phi_1(x)$ de manière que le multiplicateur soit une fonction donnée; soit, par exemple,

$$\theta_1 = \pm\sqrt{\frac{ds}{dx}}.$$

On voit immédiatement qu'il faut et qu'il suffit que

$$\Phi_1(s) = \Phi_1(x),$$

c'est-à-dire que Φ_1 doit être une fonction périodique

([1]) Nous raisonnons toujours dans l'hypothèse où existent des fonctions uniformes $\mathrm{F}(x)$ du groupe donné et ne considérons ici que des fonctions $\Theta(x)$ uniformes.

du groupe, et il est évident qu'on peut toujours prendre $g(x)$ pour qu'il en soit ainsi. Cependant, si l'on exigeait que Φ_1 et les nouvelles fonctions Φ_1 fussent, comme les premières, des fonctions entières, il faudrait qu'il y eût des fonctions entières $(\lambda\Phi_1+\mu)$ du groupe; or, dans ce cas, on sait que Φ_1 est la dérivée (à un facteur constant près) de ces fonctions $F(x)$ entières; toutes les fonctions $F(x)$ du groupe étant fonctions linéaires de l'une d'elles, les fonctions entières du groupe satisferaient à une équation de la forme

$$F'(x)=\frac{\lambda F(x)+\mu}{\nu F(x)+\rho},$$

et par conséquent ces fonctions entières seraient de la forme

$$F(x)=\lambda e^{\alpha x}+\mu.$$

Le cas où $\Phi(x)$ est une fonction entière et où le multiplicateur θ est égal à la racine carrée de s'_x ne peut donc se présenter que pour un groupe particulier pour lequel d'ailleurs $\theta=s'=1$.

Mais si l'on n'assujettit pas Φ à être entière, on voit qu'on peut toujours former un système de fonctions Θ, en général non entières, pour lequel le multiplicateur est la racine carrée de $s'(x)$.

Pour que l'on eût

$$\theta=\frac{dx}{ds},$$

c'est-à-dire

$$\Theta(s)\,ds=\Theta(x)\,dx,$$

il faudrait que l'on pût trouver une fonction $\Phi(x)$ telle que

$$\Phi(s)\,ds^3=\Phi(x)\,dx^3,$$

et il n'est guère possible, dans l'état actuel de cette théorie, de voir dans quels cas on pourra déterminer une fonction $\Phi(x)$ qui satisfasse à cette condition *pour toutes les substitutions du groupe, et seulement pour celles-là.*

Si l'on remarque que, $F(x)$ étant une fonction du groupe, on a pour toutes les substitutions s du groupe

$$F'(s)\,ds = F'(x)\,dx,$$

on voit qu'on pourrait obtenir des fonctions que laissent invariables les substitutions du groupe, par les quotients des fonctions F' qui, d'autre part, ont toutes pour multiplicateur $\frac{dx}{ds}$ quand on fait à x une substitution s du groupe. Mais il faut remarquer que ces quotients admettent, outre les substitutions du groupe donné, d'autres substitutions. En effet, soient deux fonctions d'un groupe quelconque donné, c'est-à-dire deux fonctions qui admettent toutes les substitutions du groupe donné et *seulement ces substitutions-là :*

$$F_{1,2} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}, \qquad F_{3,4} = \frac{\Theta_3}{\Theta_4}.$$

On a

$$F'_{1,2} = a\,\frac{\Phi}{\Theta_2^2}, \qquad F'_{3,4} = b\,\frac{\Phi}{\Theta_4^2},$$

où a et b sont deux constantes. Si c^2 désigne le rapport de a à b, le quotient de ces deux fonctions

$$f(x) = \frac{F'_{1,2}}{F'_{3,4}} = c^2\,\frac{\Theta_4^2}{\Theta_2^2} = (c\,F_{4,2})^2$$

est donc le carré de l'une des fonctions du groupe et par conséquent admet, outre les substitutions du groupe, qui sont les racines de l'équation

$$F_{4,2}(s) = F_{4,2}(x),$$

toutes les substitutions qui font changer de signe cette fonction $c F_{4,2}$ et sont les racines de l'équation

$$F_{4,2}(s) - F_{4,2}(x) = 0.$$

Ce quotient $f(x)$ *n'est donc pas une fonction du groupe donné ; son groupe contient comme sous-groupe le groupe donné.*

Les considérations qui précèdent nous amènent à montrer qu'avec un système de fonctions à multiplicateur d'un groupe donné l'on peut facilement former, outre les fonctions $F(x)$ du groupe, quotients de ces fonctions Θ, une infinité d'autres fonctions qui admettent toutes les substitutions du groupe donné, mais admettent en outre d'autres substitutions.

Soient Θ_1 et Θ_2 deux des fonctions à multiplicateur considérées ; ces deux fonctions suffisent à déterminer tout le système des fonctions Θ, pourvu que leur rapport ne soit pas constant, ce que nous pouvons supposer. Soient

$$\begin{aligned} P_m(x) &= a_0 \Theta_1^m + a_1 \Theta_1^{m-1}\Theta_2 + \ldots, \\ Q_m(x) &= b_0 \Theta_1^m + b_1 \Theta_1^{m-1}\Theta_2 + \ldots \end{aligned}$$

deux polynomes homogènes et de degré m en Θ_1 et Θ_2. Si $\theta(s, x)$ est le multiplicateur des fonctions Θ, on a visiblement, pour toute substitution $s(x)$ du groupe,

$$\begin{aligned} P_m[s(x)] &= P_m(x)\,\theta^m(s, x), \\ Q_m[s(x)] &= Q_m(x)\,\theta^m(s, x), \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\frac{P_m[s(x)]}{Q_m[s(x)]} = \frac{P_m(x)}{Q_m(x)}.$$

Le rapport de P_m à Q_m est donc une fonction qui admet toutes les substitutions du groupe ; mais elle en admet d'autres, à moins que m ne soit égal à *un*.

En effet, si l'on pose

$$y = F_{1,2}(x) = \frac{\theta_1(x)}{\theta_2(x)},$$

le rapport de P_m à Q_m s'écrit

$$f(x) = \frac{a_0 F_{1,2}^m(x) + a_1 F_{1,2}^{m-1}(x) + \dots}{b_0 F_{1,2}^m(x) + b_1 F_{1,2}^{m-1}(x) + \dots},$$

ou encore

$$\varphi(y) = \frac{a_0 y^m - a_1 y^{m-1} + \dots}{b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + \dots}.$$

Cette fonction rationnelle, de degré m, de y admet $m - 1$ substitutions :

$$s_1(y), \quad s_2(y), \quad \dots, \quad s_{m-1}(y),$$

et par conséquent $f(x)$ admet, outre les substitutions du groupe donné qui laissent $F_{1,2}(x)$ invariable, toutes les substitutions qui transforment $F_{1,2}(x)$ en l'une quelconque des fonctions

$$s_1[F_{1,2}(x)], \quad s_2[F_{1,2}(x)], \quad \dots, \quad s_{m-1}[F_{1,2}(x)],$$

et le groupe de $f(x)$ n'est pas identique au groupe donné, mais contient celui-ci comme sous-groupe.

On peut donc former une infinité de fonctions uniformes, autres que les fonctions $F(x)$, qui admettent les substitutions du groupe donné; mais ces fonctions admettent en outre d'autres substitutions qui, généralement, seront d'une forme toute différente de celle des fonctions du groupe donné. Entre deux des fonctions formées comme nous venons de l'indiquer existe une relation algébrique que l'on obtient par l'élimination de y entre les formules de ces deux fonctions :

$$\varphi(y) = \frac{a_0 y^m - a_1 y^{m-1} + \dots}{b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + \dots},$$

$$\psi(y) = \frac{a'_0 y^n + a'_1 y^{n-1} + \dots}{b'_0 y^n + b'_1 y^{n-1} + \dots}.$$

Cette relation ne dépend que des coefficients a, b, a', b', ... *qui sont d'ailleurs arbitraires dans la formation de ces fonctions; cette relation ne dépend donc en aucune manière du groupe de substitutions donné.*

Ajoutons enfin qu'on peut former des fonctions d'un ordre encore plus général que les précédentes et qui admettent, avec d'autres, les substitutions du groupe donné. Nous avons montré, en effet, dans une Note précédente, que, pour qu'une fonction admette toutes les substitutions d'un groupe, il est nécessaire et suffisant que cette fonction se mette sous la forme

$$\Phi[F(x)],$$

où $\Phi(y)$ est une fonction complète uniforme *quelconque* et $F(x)$ une fonction complète uniforme qui admette les substitutions du groupe donné et *seulement ces substitutions-là*. Dans ce qui précède, la fonction $\Phi(y)$ est une fonction *algébrique rationnelle;* mais cette fonction peut également être une fonction *uniforme transcendante* quelconque. Nous avons vu aussi que le groupe de la fonction $\Phi[F(x)]$ contient comme sous-groupe le groupe de $F(x)$ et n'est identique à ce groupe qu'autant que $\Phi(y)$ est une fonction rationnelle *linéaire*.