NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 510-524

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__510_1>

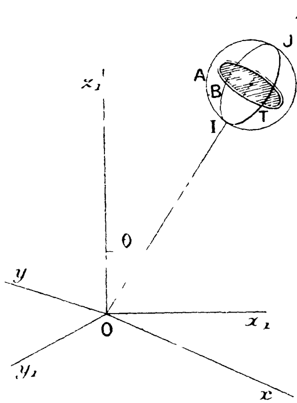
CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

QUESTION DE COURS. — *Établir en Cinématique le théorème de Coriolis et montrer comment on l'utilise en Dynamique.*

PROBLÈME. — *Une tige* OI, *mobile autour de son extrémité* O, *est terminée par deux anneaux identiques* IAJ, IBJ *assemblés à angle droit suivant un diamètre commun* IJ *prolongement de la tige.*

Un tore ayant cette droite IJ *comme axe peut tourner librement autour de cet axe.*

La position du système est définie par les angles θ, φ, ψ *d'Euler fixant l'orientation du trièdre* Oxyz (Oz *coïn-*



cide avec OI, Ox *et* Oy *sont dans les plans respectifs des anneaux) et par l'angle* χ *dont le tore a tourné autour de son axe à partir d'une position initiale prise arbitrairement.*

Toutes les pièces sont d'ailleurs supposées homogènes et pesantes.

Après avoir écarté la tige de la verticale et donné un mouvement de rotation, autour de OI, *au tore d'une part, et à l'ensemble d'autre part, on abandonne le système à lui-même.*

1° *Établir les équations du mouvement du système par la méthode de Lagrange;*

2° *En déduire que la vitesse de rotation propre du tore autour de son axe reste constante;*

3° *En déduire aussi que le mouvement du trièdre défini par* θ, φ, ψ *est celui d'un solide de révolution homogène et pesant, suspendu par un point de son axe.*

SOLUTION.

Prenons suivant la verticale ascendante l'axe Oz_1 du trièdre de référence.

Soient

A et C les moments d'inertie du tore par rapport à Ox ou Oy et Oz;
A' et C' les moments d'inertie pour l'ensemble de la tige et des anneaux;
P le poids total;
d la distance au point O du centre de gravité du système.

On a

$$\begin{aligned} 2T = &(A + A')(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) \\ &+ C(\chi' + \varphi' + \psi' \cos\theta)^2 + C'(\varphi' + \psi' \cos\theta)^2, \end{aligned}$$
$$U = Pd\cos\theta.$$

Les équations de Lagrange relatives à χ et à φ donnent deux intégrales premières, desquelles on déduit immédiatement

$$\chi' = \text{const.} = \chi'_0.$$
$$\varphi' + \psi' \cos\theta = \text{const.} = r_0.$$

L'équation de Lagrange relative à ψ et le théorème des forces vives donnent les deux intégrales premières,

$$(A + A')\psi' \sin^2\theta + \left(C + C' + C'\frac{\chi'_0}{r_0}\right) r_0 \cos\theta = \text{const.},$$
$$(A + A')(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) = 2Pd\cos\theta + \text{const.},$$

qui, jointes à

$$\varphi' + \psi' \cos\theta = r_0,$$

définissent le mouvement du trièdre. On reconnaît qu'elles définissent ainsi le mouvement, autour de O, d'un solide de révolution autour de Oz, de même poids et de même centre de gravité que le système donné, mais de moments d'inertie

$$A + A'$$

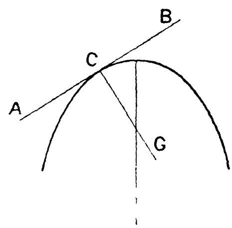
et

$$C + C' + \frac{C'\chi'_0}{r_0},$$

animé de la rotation initiale r_0 autour de son axe.

(Lille, novembre 1900.)

Une barre homogène repose par son milieu sur le sommet



d'une chaînette renversée dont l'axe est vertical. On écarte la barre de sa position d'équilibre et l'on suppose qu'elle recule sans glisser sur la chaînette. On suppose en outre que le centre du système mobile est en G *à une distance* $CG = a$ *sur la perpendiculaire au milieu de la barre; déterminer le mouvement de la barre.*

Epreuve pratique. — *Il n'y a pas d'épreuve pratique.*

(Besançon, juillet 1901.)

I. *Dans un plan fixe* P *on donne un cercle* C *et un de ses diamètres* D: *un plan* Π *glisse sur* P *de manière qu'une droite* Δ *du plan* Π *reste tangente à* C *et qu'un point* A *de* Δ *glisse sur* D *avec une vitesse constante. Lieux du centre instantané dans les plans* P *et* Π. *Lieux des points dont l'accélération centripète ou tangentielle est nulle à un instant donné.*

II. *Une plaque pesante, très mince et homogène, a la forme d'un triangle* PQR *rectangle en* P : *les côtés* PQ, PR *ont une même longueur* Ga; PQ *est assujetti à glisser sans frottement sur un plan horizontal fixe* H. *A l'instant initial la plaque est immobile au-dessus du plan* H *et on* *l'abandonne à l'action de la pesanteur. Déterminer son mouvement en admettant qu'elle puisse passer d'un côté à l'autre du plan* H.

SOLUTION.

Par le centre de gravité G, menons Gx, Gy parallèles à PQ et à PR, Gz normal à la plaque, et trois axes de directions invariables, Gx_1, Gy_1 horizontaux, Gz_1 en sens contraire de la pesanteur. La position de la plaque peut être déterminée par les trois angles d'Euler, ψ, θ, φ (φ étant toujours nul) et par les coordonnées ξ, η, $\zeta = 2a\sin\theta$, de G par rapport à des axes parallèles à Gx_1, y_1, z_1 ayant leur origine dans le plan H. La force vive est de la forme

$$\begin{aligned}M(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2) &+ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\\ &- 2Dqr - 2Erp - 2Fpq;\end{aligned}$$

or on a

$$p = \theta', \qquad q = \psi'\sin\theta, \qquad r = \psi'\cos\theta,$$

et l'on trouve

$$A = B = 2Ma^2, \qquad C = 4Ma^2, \qquad D = E = 0, \qquad F = -Ma^2,$$

$$\begin{aligned}2T = M[\xi'^2+\eta'^2 &+ 2(1+2\cos^2\theta)a^2\theta'^2\\ &+ 2(1+\cos^2\theta)a^2\psi'^2 + 2a^2\theta'\psi'\sin\theta].\end{aligned}$$

Les équations de Lagrange relatives à ξ, η, ψ donnent

$$\xi' = \eta' = 0, \qquad 2(1+\cos^2\theta)\psi' + \theta'\sin\theta = 0,$$

$$2\psi = \text{arc tang}\cos\theta - \text{arc tang}\cos\theta_0;$$

l'intégrale des forces vives donne ensuite

$$\theta'^2 = 8\frac{g}{a}\,\frac{(1+\cos^2\theta)(\sin\theta_0-\sin\theta)}{8\cos^4\theta+13\cos^2\theta+3}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer à* 0,001 *près le paramètre de la chaînette dessinée par un fil de longueur* 17, *dont une extrémité est à l'origine, l'autre au point* $x_1 = 14$, $y_1 = 8$, y_1 *en sens contraire de la pesanteur* ($a = 10,805$).

(Caen, juillet 1901.)

Un rectangle ABCD, *de grandeur invariable, de masse nulle, à deux sommets consécutifs* A, B *situés sur un axe fixe* Oz *faisant un angle donné avec la verticale. Ce rectangle peut tourner autour de* Oz *et glisser le long de cet axe. Le côté* CD *du rectangle est l'axe de révolution d'un solide* S, *homogène et pesant, qui peut tourner autour de* CD.

Étudier le mouvement du système en supposant les liaisons sans frottement.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Deux cylindres de révolution ont même centre et même axe de révolution. Le premier a pour rayon* R, *pour hauteur* h; *le second a pour rayon* R′ *et pour hauteur* h', *et l'on suppose* $R' < R$, $h' < h$. *Le volume compris entre les deux cylindres est rempli d'une matière homogène de densité* ρ.

Calculer : 1° *le moment d'inertie du solide ainsi constitué par rapport à l'axe de révolution;* 2° *le moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire au précédent mené par le centre de gravité;* 3° *son énergie cinétique lorsqu'il tourne avec une vitesse angulaire donnée* ω *autour de l'axe de révolution.*

On évaluera l'énergie cinétique en kilogrammètres, avec une erreur relative inférieure à 0,01, *en posant* $R = 1^m$, $R' = 0^m,80$, $h = 0^m,10$, $h' = 0^m,05$, $\rho = 7,5$ *et en supposant que le solide fasse* 180 *tours à la minute. On posera*

$$g = 9^m,81.$$

(Grenoble, juillet 1901.)

QUESTION DE COURS. — *Théorème de Lejeune-Dirichlet sur la stabilité de l'équilibre.*

PROBLÈME. — *Un cône pesant de révolution, de rayon de base* $0^m,1$, *d'arête* $0^m,2$, *a pour sommet un point fixe* O *autour duquel il peut tourner librement. Il est assujetti à s'appuyer par son arête circulaire sur la face* INTÉRIEURE *d'un cylindre creux fixe, de révolution autour d'un axe* Oz_1 *horizontal contenant le sommet* O *du cône; le rayon de ce cylindre est* $\sqrt{3}$ *décimètre.*

Étudier le mouvement de ce cône, en supposant qu'il n'y ait pas de frottement, et que le cône soit abandonné sans *vitesse lorsque la génératrice du cône passant par le point d'appui est horizontale.*

SOLUTION.

L'axe du cône fait un angle constant de 30° avec Oz_1. Les forces sollicitant le cône rencontrent son axe et le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à cet axe donne une intégrale première; le théorème des forces vives donne une seconde intégrale, en sorte que le problème est ramené aux quadratures.

Attachons au cône le trièdre positif qui, *dans la position initiale,* est défini par l'axe Oz du cône et la verticale descendante Ox du sommet O; soient θ, φ, ψ les angles d'Euler fixant la position de ce trièdre à l'instant t. En notant qu'initialement φ, ψ et leurs dérivées sont nulles, on obtient les équations

$$\theta = 30°, \qquad \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\psi, \qquad \alpha t = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin\psi}},$$

où

$$\alpha = \frac{8}{3}\sqrt{g\sqrt{3}} \qquad (g \text{ exprimée en décimètres}),$$

ψ s'exprime en fonction elliptique de αt comme dans la théorie du pendule simple

$$\sin\psi = \frac{1}{p\left(\frac{4}{3}\sqrt{g\sqrt{3}}\,t\right)} \qquad [p(u; -1, 0, +1)].$$

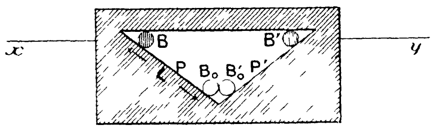
(Lille, juillet 1901.)

I. *Principe d'Archimède. Généralisation de ce principe dans le cas où les forces distribuées sur le solide rigide plongé dans le fluide envisagé sont quelconques.*

II. *Un point matériel* M, *de masse égale à* 1ᵍ, *est soumis à l'action de deux forces, l'une attractive, l'autre répulsive, émanant d'un même centre fixe* O. *La force attractive varie en raison inverse du carré de la distance du point* M *au centre* O, *la force répulsive en raison inverse du cube de cette même distance. A l'instant initial, le point* M *est placé en un point donné* M_0 *situé à* $0^{m},01$ *de distance du centre* O; *le segment qui représente sa vitesse initiale fait un angle de* 30° *avec le prolongement du vecteur* OM_0, *et la longueur de ce segment est de* $0^{m},04$; *à cet instant initial,* *l'intensité de la force attractive est de 14 dynes, celle de la force répulsive est de 12 dynes. On demande la trajectoire et la loi du mouvement du point* M.

(Nancy, juillet 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un système* PESANT *est formé de deux billes homogènes sphériques identiques* B, B′ *et d'un corps*



rigide R *dont la* SURFACE EXTERNE *est celle d'un parallélépipède rectangle* π, *mais dont la surface interne comprend deux plans inclinés* P, P′ *supportant les billes* B *et* B′. *Le corps* R *admet deux des trois plans de symétrie du parallélépipède* π *et dans l'un de ces deux plans (plan de la figure) sont placées les deux boules qui reposent,* RETENUES, *sur les plans* P *et* P′.

Dans une position où le TROISIÈME PLAN DE SYMÉTRIE *du parallélépipède* π *est horizontal, et les billes étant toujours retenues sur les plans inclinés et à un même niveau, le système est d'abord en équilibre* SOUS L'ACTION DE LA PESANTEUR *et* SOUS L'ACTION DES PRESSIONS *exercées sur les éléments de la surface* π QUI SONT SITUÉS AU-DESSOUS *d'un plan horizontal* FIXE XY, *avec une intensité* PROPORTIONNELLE A LA PROFONDEUR *de l'élément* AU-DESSOUS *de ce plan.*

Puis, au moyen de glissières verticales (supposées sans frottement) on ne permet plus au corps R *qu'un mouvement de translation verticale. Le système étant resté jusqu'ici dans sa même position d'équilibre,* ON ABANDONNE ALORS SANS IMPULSION RELATIVE *les billes* B, B′; *celles-ci se mettent à rouler sur les plans inclinés et l'on demande :*

1° *D'étudier le mouvement du système sous l'action des forces ci-dessus définies, et de calculer la pression d'une bille sur son plan incliné;*

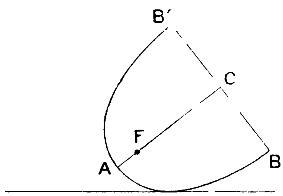
2° *De définir l'effet produit sur le système par le choc des billes* B, B′ *que l'on supposera devoir se figer en contact mutuel dès qu'elles se rencontreront;*

3° *Étudier le mouvement du système après le choc.*

Données :

M *masse du corps* R;
m *masse de chaque bille;*
g *gravité;*
K *pression rapportée à l'unité de surface et s'exerçant sur tout élément superficiel situé à l'*UNITÉ *de profondeur au-dessous de* XY;
B *inclinaison des plans* P, P′ *sur le* TROISIÈME PLAN DE SYMÉTRIE *de* π;
L *distance du centre de la bille* B *au centre de la même bille supposée venue dans le plan de la figure en sa position* B_0 *de contact avec l'autre bille supposée venue aussi dans la rigole formée par les deux plans inclinés;*
S *aire limitée par la ligne commune au plan* XY *et à la surface externe du corps* R.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque homogène a la forme d'un segment de parabole* BAB′. *Ce segment est limité à*



une droite BB′ *perpendiculaire à l'axe de la courbe et distant du sommet* A *d'une longueur* AC *égale à* 16AF, F *étant le foyer. La plaque pèse* 25^{kg}. *On la place verticalement sur un plan horizontal, son axe faisant un angle de* 45° *avec l'horizon. Quel poids faut-il appliquer au foyer pour que la plaque soit en équilibre?*

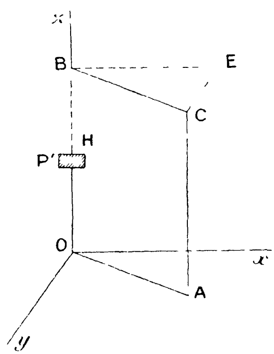
(Montpellier, juillet 1901.)

Étudier le mouvement d'un point non pesant, assujetti à rester sur un paraboloïde de révolution et attiré par une force perpendiculaire à l'axe en raison inverse du carré de la distance. Le plan attirant est le lieu des directrices des *paraboles méridiennes. Le mobile est lancé avec une vitesse tangente au parallèle du point de départ et égale à* $\sqrt{\frac{\mu}{z_0}}$, μ *étant le coefficient d'attraction (la masse est égale à* 1) *et* z_0 *le* z *du point de départ. On pourra supposer* $z_0 = 2p$. *Calcul de la réaction. On prendra le plan attirant pour plan des* xy.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un cylindre à section elliptique, homogène, pesant, est suspendu par diverses arêtes (supposées horizontales) passant par une extrémité du grand axe de l'ellipse. Il forme ainsi un pendule composé. Sachant que le petit axe de la section est égal à* 26, *quelle doit être la longueur du grand axe pour que le pendule simple synchrone ait une longueur donnée* l? *Minimum de* l.

(Poitiers, juillet 1901.)

Un châssis rectangulaire très mince, homogène, pesant OBCA *est assujetti à tourner autour de deux de ses*



sommets O *et* B *situés sur une verticale* Oz. *Il est mis en mouvement par un poids* P′ *attaché à l'extrémité d'un cordon inextensible* CEBH *qui a son extrémité fixée au sommet* C, *qui passe sur deux poulies très petites placées en* E *et en* B *et qui, ensuite, descend suivant la verticale du point* B. *On suppose* BE *perpendiculaire à* OB *et* BE = BC. *On négligera la masse du cordon.*

On demande :

1° *D'étudier le mouvement du châssis en supposant qu'à* *l'instant initial il est au repos dans une position* CBOA *faisant un angle* θ_0 *avec le plan* EBO *et qu'on l'abandonne à lui-même à partir de cette position;*

2° *De calculer la tension du cordon;*

3° *D'évaluer les pressions exercées sur les deux points fixes* O *et* B.

Données :

OA $= 2a$, OB $= 2b$;
e épaisseur très petite du châssis;
ρ *sa densité;*
l longueur du cordon;
θ_0 *écart initial sur le plan* EBOx.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer les coordonnées du centre de gravité d'un arc homogène de spirale logarithmique dont l'équation est*

$$r = ae^{m\theta}.$$

On prendra l'arc compris entre les limites $\theta = 0$ *et* $\theta = \alpha$.

(Toulouse, juillet 1901.)

Un cylindre circulaire droit, limité, homogène, pesant, de masse M, *est posé sur un plan fixe, incliné sur l'horizon d'un angle* α. *Deux points matériels de masse m sont fixés aux extrémités d'un même diamètre d'une section du cylindre. Étudier le mouvement, en supposant le plan et le cylindre parfaitement polis. Qu'arrive-t-il en particulier si, au début, les deux masses additionnelles sont à la même distance du plan incliné, le cylindre n'étant animé d'aucun mouvement de rotation autour de son axe?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère une lame homogène infiniment mince, ayant la forme d'un secteur de cercle* AOB. *Déterminer l'ouverture du secteur par la condition que les moments d'inertie de la lame, par rapport à la bissectrice de l'angle* AOB *et à la tangente au milieu* C *de l'arc* AB, *soient entre eux dans le rapport des nombres* 1 *et* 5.

(Paris, octobre 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Deux cylindres géométriquement identiques, homogènes et de masses différentes, sont placés de façon à être tangents tout le long d'une génératrice et leurs* *axes sont dans un plan horizontal* P. *Ils peuvent librement tourner autour de leurs axes et ceux-ci sont soumis à des liaisons sans frottements, qui ne leur permettent d'autre mouvement qu'une translation perpendiculaire à leur direction commune et située dans le plan* P. *Une sphère pesante de même rayon que les cylindres repose sur eux, et on lui donne un mouvement initial absolument quelconque. On suppose que les masses de la sphère et des deux cylindres sont liées par la relation*

$$m^2 = 4m'm'',$$

et l'on demande d'étudier le mouvement du système, les réactions de la sphère sur les cylindres, l'instant où la sphère quitte les cylindres et le mouvement qui suit cette séparation.

SOLUTION.

Pour chaque cylindre, on applique les équations de Lagrange en introduisant, comme force extérieure, la réaction de la sphère. On a ainsi quatre équations dont deux montrent que les rotations des cylindres sont constantes.

Les équations d'Euler appliquées à la sphère montrent que sa rotation est constante en grandeur et direction.

Enfin, on écrit les équations du mouvement du centre de gravité pour la sphère; l'une d'elles montre que son mouvement dans le sens des cylindres est uniforme.

Il reste finalement quatre équations pour déterminer les mouvements perpendiculaires aux cylindres et les deux réactions. En prenant comme variables l'abscisse x du centre de la sphère et le demi-angle θ des rayons de contact avec les deux cylindres on a immédiatement, par une intégration facile, x en fonction de θ, et l'équation pendulaire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{2\mathrm{R}}\sin\theta.$$

On en déduit les deux réations en fonction de θ et l'on constate que le contact de la sphère cesse simultanément avec les deux cylindres quand θ atteint la valeur déterminée par l'équation

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Le mouvement qui suit est très simple et il ne reste qu'à étudier la distance des axes des cylindres, ainsi que celles du centre de la sphère à ces axes, ce qui revient à voir si une équation du premier degré et deux équations du troisième degré ont des racines positives.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère, dans le plan des xy, la région limitée par la parabole $y^2 = x$ et la droite $x = 1$ et le solide S engendré en faisant tourner cette région autour de l'axe des x.*

1° *Déterminer complètement l'ellipsoïde central d'inertie du solide S supposé homogène et de densité égale à 1.*

2° *Calculer la force vive du solide S tournant avec une vitesse constante égale à l'unité autour de la droite $x = y = z$.*

(Grenoble, novembre 1901.

I. *On considère trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ *et un fil flexible, de masse négligeable, de longueur $12a$, dont une extrémité est fixée à l'origine, l'autre en un point de coordonnées $x = 0$, $y = 2a$, $z = 4a$. Sur ce fil sont enfilés trois anneaux très petits, pouvant glisser sans frottement; le premier à partir de l'origine est sollicité par une force* 2P *parallèle à* OX, *le suivant par une force* 4P *parallèle à* OY, *le dernier par une force* 4P *parallèle à* OZ. *Déterminer la figure d'équilibre et la tension du fil.*

II. *On donne une sphère homogène non pesante, de rayon a, dont chaque élément est attiré vers un point fixe* P *suivant la loi de Newton; l'attraction sur l'unité de masse à l'unité de distance est $\frac{11}{5}a^3\omega^2\sqrt{2}$, ω étant une constante. Le centre* S *de la sphère est relié à un point fixe* O *par une tige droite, infiniment mince, de longueur $2a$, passant dans un canal infiniment étroit creusé suivant un rayon de la sphère : la tige* OS *peut tourner librement autour du point* O *et la sphère autour de* OS : *la distance* OP *est égale à $2a$. A l'instant initial l'angle* POS *est droit, la droite* OS *tourne avec une vitesse ω autour de* OP *et la sphère avec une vitesse 11ω autour de* OS. *Former les intégrales premières du mouvement de la sphère : montrer quelle serait la forme de la trajectoire* *du point* S *si l'on ne se préoccupait pas de la rencontre de la sphère avec le point* P.

III. ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une barre très mince et homogène longue de* $0^m,60$ *à son extrémité inférieure sur un plan horizontal poli, avec lequel elle fait un angle de* 30° : *on l'abandonne sans vitesse à l'action de la pesanteur. Calculer, à* $0^s,001$ *près, le temps qu'elle met à tomber sur le plan.*

SOLUTIONS.

(I). Soit $\omega\alpha\beta\gamma\delta\omega$ le polygone de Varignon : $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$, $\omega\delta$, qui représentent les tensions des quatre parties du fil sont égales; les points α, ω, δ sont en ligne droite, et l'on trouve pour les longueurs des quatre portions du fil, $6a$, $\frac{3}{2}a$, $\frac{3}{2}a$, $3a$; la tension est 3P.

(II). Prenant trois axes fixes, dont OZ, dirigé suivant OP, on définit la position de la sphère par les angles d'Euler θ, ψ, φ. La constance de la projection sur OS et sur OP de l'axe du couple des quantités de mouvement et l'intégrale des forces vives (ou les équations de Lagrange) donnent

$$r = 11\,\omega,$$

$$\psi' = \frac{\omega}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}, \qquad \theta'^2 = \omega^2\,\frac{1 - \sin^2\frac{1}{2}\theta - \sqrt{2}\sin^3\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\theta\cos^2\frac{1}{2}\theta},$$

θ décroît de $\frac{\pi}{2}$ à zéro dans un temps fini.

$$(\text{III}).\qquad T = \sqrt{\frac{a}{2g}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{\frac{1}{3}+\cos^2\theta}}{\sqrt{\frac{1}{2}-\sin\theta}}\,d\theta,$$

on peut poser $\sin\theta = \frac{1}{2}\sin^2\mu$,

$$T = \sqrt{\frac{a}{3g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \frac{1}{32}\sin^4\mu + \frac{15}{2048}\sin^8\mu + \ldots\right)\sin\mu\,d\mu = 0^s,208.$$

(Caen, novembre 1901.)

Épreuve écrite. — *Une plaque carrée* ABCD *homogène et pesante, dont on néglige l'épaisseur, repose par le côté* AB *sur un plan horizontal fixe. On demande d'étudier le mouvement de la plaque dans l'hypothèse suivante : à l'époque initiale la plaque est inclinée de* 60° *sur le plan horizontal, le côté* AB *est immobile, et la plaque tourne autour de lui, en se dirigeant au-dessus du plan horizontal, avec la vitesse angulaire* $\sqrt{\frac{12g}{13a}}$; $2a$ *est la longueur de* AB, g *désigne l'accélération de la pesanteur. On supposera qu'il n'y a pas de frottement, et l'on se dispensera d'étudier la réaction du plan fixe sur la plaque.*

Épreuve pratique. — *Justifier la construction suivante de l'axe instantané de rotation et de glissement, qui a été indiquée par Poncelet :*

On mène, par un point arbitraire O *de l'espace, trois vecteurs* OV, OV′, OV″, *égaux aux vitesses de trois points* M, M′, M″ *du corps. L'axe instantané est perpendiculaire au plan* Π *des trois points* V, V′, V″. *On projette sur le plan* Π *les points* M *et* M′ *en* m *et* m', *et leurs vitesses en* mv *et* $m'v'$; *les perpendiculaires élevées en* m *et* m' *à* mv *et* $m'v'$ *se coupent au pied de l'axe sur le plan* Π.

(Montpellier, novembre 1901.)