Nouvelles annales de mathématiques

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1897). Solution de la question d'analyse par un correspondant

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 82-89

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__82_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1897);

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE PAR UN CORRESPONDANT.

On donne l'équation aux dérivées partielles

$$p^2 + q^2 + (px + qy - z)^2 = F\left(\frac{x^2 + y^2 + 1}{z^2}\right),$$

où p et q désignent les dérivées partielles du premier ordre de z considéré comme fonction de x et y.

1° *Former les équations des caractéristiques et prouver que ces équations admettent deux intégrales qui ne dépendent pas de la forme de la fonction* F.

2° *Déduire du résultat obtenu que les courbes caractéristiques sont planes et que les développables caractéristiques sont des cônes. Dire quelle relation existe entre le plan d'une courbe caractéristique et le sommet du cône caractéristique circonscrit suivant cette courbe.*

3° *Indiquer comment on pourra utiliser ces résultats pour intégrer complètement l'équation proposée.*

4° *On mènera l'intégration jusqu'au bout dans le cas particulier où la fonction* F *a la forme*

$$A\frac{x^2+y^2+1}{z^2}+B,$$

A *et* B *désignant deux constantes. Montrer que, dans ce cas, une intégrale complète est fournie par une surface du second degré dépendant de deux paramètres.*

Posons

$$u = px + qy - z, \qquad s = \frac{x^2+y^2+1}{z^2}.$$

L'équation à intégrer s'écrit

$$p^2 + q^2 + u^2 = F(s).$$

1° Les équations différentielles des bandes caractéristiques sont

$$\frac{dx}{dt} = p + ux, \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{F'(s)}{z}\left(\frac{x}{z} - sp\right),$$
$$\frac{dy}{dt} = q + uy, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{F'(s)}{z}\left(\frac{y}{z} - sq\right).$$
$$\frac{dz}{dt} = F(s) + uz,$$

On en déduit

$$\frac{du}{dt} = x\frac{dp}{dt} + y\frac{dq}{dt} = -\frac{F'(s)}{z}\left(su + \frac{1}{z}\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} + x\frac{du}{dt} + u\frac{dx}{dt} = \left[-\frac{sF'(s)}{z} + u\right]\frac{dx}{dt}.$$

Par suite,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} & \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ \dfrac{dx}{dt} & \dfrac{dy}{dt} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \text{const} = -\cot\omega.$$

On a dès lors les deux intégrales premières indépendantes de la forme de F :

$$\frac{p + ux}{q + uy} = -\operatorname{tang}\omega$$

et

$$x\cos\omega + y\sin\omega = \text{const.} = l.$$

2° L'intégrale

$$x\cos\omega + y\sin\omega = l$$

montre que les courbes caractéristiques sont des courbes planes, situées dans des plans parallèles à l'axe Oz.

L'intégrale

$$p\cos\omega + q\sin\omega + ul = 0$$

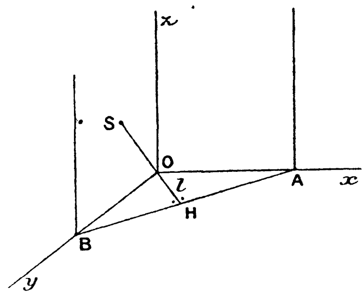
ou

$$p\left(\frac{\cos\omega}{l} + x\right) + q\left(\frac{\sin\omega}{l} + y\right) - z = 0$$

montre que tout plan tangent à une surface intégrale en un point de la caractéristique (ω, l) passe par le point $-\frac{\cos\omega}{l}$, $-\frac{\sin\omega}{l}$, 0.

La développable caractéristique (ω, l) est donc un cône.

Le sommet de ce cône est le point inverse de la projection de l'origine des axes sur le plan de la caractéristique, le module étant — 1 et le pôle étant l'origine.



3° Nous allons établir que la connaissance de ces deux intégrales permet de réduire à une quadrature la recherche des caractéristiques.

On obtient immédiatement

$$\begin{aligned}
&dp^2 + dq^2 + du^2 \\
&= \frac{F'^2}{z^2}\left[\frac{x^2+y^2}{z^2} + (p^2+q^2)s^2 - \frac{2s}{z}(px+qy) + \frac{1}{z^2} + \frac{2su}{z} + s^2u^2\right] dt^2 \\
&= \frac{F'^2 s}{z^2}(sF-1)\,dt^2.
\end{aligned}$$

Mais, d'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{ds}{dt} &= \frac{x}{z^2}\frac{dx}{dt} + \frac{y}{z^2}\frac{dy}{dt} - \frac{2s}{z}\frac{dz}{dt} \\
&= \frac{(px+qy) + u(x^2+y^2) - 2sz(F+uz)}{z^2},
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{dt}{z} = -\frac{ds}{2(sF-1)}.$$

La relation précédente s'écrit donc

$$dp^2 + dq^2 + du^2 = \frac{sF'^2\,ds^2}{4(sF-1)}.$$

Nous poserons

$$s = \frac{1}{\tau} \qquad \text{et} \qquad F(s) = G(\tau).$$

Nous avons les relations

$$p^2 + q^2 + u^2 = G(\tau),$$

$$dp^2 + dq^2 + du^2 = \frac{dG^2}{4(G-\tau)},$$

$$p \cos\omega + q \sin\omega = -ul,$$

$$x \cos\omega + y \sin\omega = l,$$

et nous prendrons comme inconnues auxiliaires

$$p \sin\omega - q \cos\omega = V,$$

$$x \sin\omega - y \cos\omega = W.$$

On en déduit d'abord

$$p^2 + q^2 = V^2 + u^2 l^2, \qquad dp^2 + dq^2 = l^2 du^2 + dV^2.$$

Les deux premières équations prennent alors la forme

$$(1 + l^2) du^2 + dV^2 = \frac{dG^2}{4(G-\tau)},$$

$$(1 + l^2) u^2 + V^2 = G(\tau).$$

Le changement de variables

$$\sqrt{1 + l^2}\, u = \rho \cos\varphi, \qquad V = \rho \sin\varphi$$

est bien naturel ; il donne

$$d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 = \frac{dG^2}{4(G-\tau)},$$

$$\rho^2 = G(\tau).$$

Éliminons ρ entre ces deux équations ; un calcul immédiat donne

$$\text{(A)} \qquad \varphi = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{\tau}{G-\tau}}\, \frac{dG}{G}.$$

Telle est la quadrature énoncée; elle définit φ en fonction de τ. On a ensuite

$$p\cos\omega + q\sin\omega = -\frac{l\sqrt{G}}{\sqrt{1+l^2}}\cos\varphi,$$

$$p\sin\omega - q\cos\omega = \sqrt{G}\quad\sin\varphi;$$

d'où l'on déduit les expressions de p et q en fonction de τ et des constantes l, ω, φ_0

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} p = \sqrt{G}\left(\quad\sin\varphi\sin\omega - \dfrac{l}{\sqrt{1+l^2}}\cos\varphi\cos\omega\right), \\ q = \sqrt{G}\left(-\cos\omega\sin\varphi - \dfrac{l}{\sqrt{1+l^2}}\cos\varphi\sin\omega\right). \end{cases}$$

Enfin on a

$$(\mathrm{C})\quad \begin{cases} x = l\cos\omega + W\sin\omega, \\ y = l\sin\omega - W\cos\omega, \\ z^2 = \tau(1 + l^2 + W^2), \end{cases}$$

W étant lié à τ par la relation

$$u + z = px + qy,$$

ou

$$(\mathrm{D})\qquad \cos\varphi\sqrt{1+l^2} + \sin\varphi\, W\sqrt{\frac{\tau(1+l^2+W^2)}{G}}.$$

Les bandes caractéristiques sont ainsi déterminées par les expressions de (x, y, z, p, q) en fonction de τ et des trois paramètres essentiels ω, l, φ_0. Leur connaissance achève l'intégration de l'équation donnée.

On observera que (W, z) sont les coordonnées d'un point d'une courbe caractéristique dans son plan (l, ω); la troisième équation (C) et l'équation (D) sont donc les équations de cette caractéristique, définissant z et W en fonction du paramètre τ.

La construction d'une surface intégrale passant par une courbe donnée est immédiate.

4° Dans le cas particulier proposé, on a

$$\text{(E)} \qquad G = \frac{A}{\tau} + B \qquad \text{ou} \qquad \tau = \frac{A}{G - B}.$$

L'intégrale (A) donne

$$2\varphi = \int \frac{\sqrt{A}\, dG}{G\sqrt{G^2 - BG - A}};$$

une inversion bien simple conduit à

$$\frac{\sqrt{A}}{G} = \left(\frac{B^2}{4A} - 1\right) \sin 2(\varphi - \varphi_0) - \frac{B}{2\sqrt{A}}.$$

Considérons φ comme le paramètre variable; cette équation définit G; (E) définit τ; (B) font connaître p et q; (D) donne W et enfin (C) déterminent x, y, z.

Insistons sur le cas où $\varphi_0 = 0$. Alors

$$\frac{1}{G} + \frac{B}{2A} = \frac{2}{\sqrt{A}}\left(\frac{B^2}{4A} - 1\right) \sin\varphi \cos\varphi.$$

Mais

$$\sin\varphi \cos\varphi = \frac{uV\sqrt{1 + l^2}}{\rho^2} = \frac{u(p \sin\omega - q \cos\omega)\sqrt{1 + l^2}}{G},$$

et

$$G = p^2 + q^2 + u^2.$$

Par suite

$$1 + \frac{B}{2A}(p^2 + q^2 + u^2) = \frac{B^2 - 4A}{2A\sqrt{A}}\, u(p \sin\omega - q \cos\omega)\sqrt{1 + l^2}.$$

Or cette équation est l'équation tangentielle d'une surface intégrale, l'équation du plan tangent étant

$$Z = pX + qY + u.$$

Cette surface est de seconde classe, c'est une quadrique, et, comme elle dépend essentiellement des deux paramètres l et ω, son équation ponctuelle fera connaître une intégrale complète de l'équation proposée.

En posant

$$\frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = m \qquad \text{(quantité donnée)},$$

$$\frac{\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{A}}{2\mathrm{B}\sqrt{\mathrm{A}}}\sqrt{1 + l^2} = a \qquad \text{(paramètre)},$$

on a à passer de l'équation tangentielle homogène

$$\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2 + m\mathrm{W}^2 + \mathrm{T}^2 - 2a(\mathrm{U}\sin\omega - \mathrm{V}\cos\omega)\mathrm{T} = 0$$

à l'équation ponctuelle correspondante; on trouve aisément comme résultat

$$z^2(1 - a^2) = m[x^2 + y^2 + 1 - a^2(x\cos\omega + y\sin\omega)^2 \\ + 2a(x\sin\omega - y\cos\omega)].$$