V. JAMET

Sur les intégrales de Fresnel

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 357-359

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__357_1>

[D3cα]

SUR LES INTÉGRALES DE FRESNEL;

PAR M. V. JAMET.

Dans un article paru au mois de novembre 1896, M. Fabry, voulant bien rappeler la tentative que j'avais faite pour amoindrir une petite difficulté relative à cette question, en donnait lui-même une solution simple et directe, à laquelle je me propose d'apporter, à mon tour, une nouvelle simplification. Il s'agit, au fond, d'établir que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz$$

a la même valeur, quand on la calcule en supposant que la variable décrit la demi-droite indéfinie dirigée suivant la partie positive de l'axe des x, que si on la calculait en faisant décrire à la variable une demi-droite indéfinie, issue de l'origine et dirigée suivant la bissectrice de l'angle formé par les parties positives des deux axes de coordonnées.

Or, si l'on prend sur cette bissectrice un point M, qu'on le projette en A sur l'axe Ox et qu'on fasse

$$\mathrm{OA} = x, \qquad z = x + yi,$$

l'intégrale

$$\int e^{-z^2}\,dz, \tag{1}$$

calculée tout le long du segment AM, est égale à

$$ie^{-x^2}\int_0^x e^{y^2-2ixy}\,dy, \tag{2}$$

et comme l'intégrale (1), calculée tout le long du contour du triangle OAM, est nulle, tout revient à démontrer que l'expression (2) tend vers zéro, quand x est de plus en plus grand. Or celle-ci a un module inférieur à

$$e^{-x^2}\int_0^x e^{y^2}\,dy,$$

et le théorème sera démontré si l'on fait voir que cette dernière expression, égale d'ailleurs à

$$\left(1-\frac{1}{e^{x^2}}\right)\times\frac{\displaystyle\int_0^x e^{y^2}\,dy}{e^{x^2}-1},$$

tend vers zéro, quand x est de plus en plus grand. Mais le premier de nos deux facteurs ayant pour limite 1, il suffit d'établir, pour toute valeur positive de x, l'inégalité

$$\frac{\displaystyle\int^x e^{y^2}\,dy}{e^{x^2}-1} < \frac{1}{x}.$$

ou l'inégalité équivalente

$$x\int_0^x e^{y^2}dy - e^{x^2} + 1 < 0.$$

A cet effet, je pose

$$f(x) = x\int_0^x e^{y^2}dy - e^{x^2} + 1$$

et j'en conclus

$$f'(x) = \int_0^x e^{y^2}dy - xe^{x^2},$$

$$f''(x) = -2x^2e^{x^2};$$

d'où il résulte que la fonction $f'(x)$, nulle avec x et décroissante quand x croît, est négative pour toute valeur positive de x. Or la fonction $f(x)$ est nulle avec x; mais elle décroît quand x augmente; donc elle est négative pour toute valeur positive de x. C. Q. F. D.