Nouvelles annales de mathématiques

A. Mannheim

Expression de la variation de longueur d’une normale

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 481-483

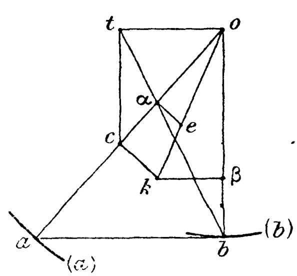
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__481_0>

[O1]

EXPRESSION DE LA VARIATION DE LONGUEUR D'UNE NORMALE;

Par M. A. MANNHEIM.

On donne les courbes (a), (b). *Du point* a *on mène la normale* ao *à* (a) *et la tangente* ab *à* (b); *la normale en* b *à* (b) *coupe au point* o *la normale* ao. *Dé-*



terminer l'expression de la variation de longueur de ao *pour une variation angulaire infiniment petite de la tangente* ab.

Sur la droite oa, construisons le point c de façon que $\frac{1}{oc} = \frac{1}{o\alpha} - \frac{1}{oa}$, le point α étant le centre de courbure de (a). Pour cela, menons du point o la droite ot parallèlement à ab. Cette droite est coupée au point t par la droite $b\alpha$: la perpendiculaire tc à ab donne le point c.

La perpendiculaire ck à ao coupe au point k la droite βk élevée à bo du centre de courbure β de (b) : la droite ok est la normale en o à la courbe décrite par ce point lorsqu'on fait varier la tangente ab [1].

Cette normale ok est coupée au point e par la perpendiculaire αe à ao.

Une formule connue [2] donne

$$(1) \qquad d(ao) = e\alpha \frac{d(a)}{\alpha a}.$$

Appelons $d\varphi$ l'angle de contingence de (b) en b; on a

$$d(a) = oa.d\varphi.$$

Portons cette valeur dans la relation (1), il vient

$$d(ao) = e\alpha \frac{oa}{\alpha a} d\varphi.$$

Les triangles semblables $o\alpha e$, ock donnent

$$\frac{e\alpha}{kc} = \frac{o\alpha}{oc},$$

d'où

$$e\alpha = \frac{1}{oc} o\alpha.kc.$$

Portant cette valeur dans l'égalité précédente, elle devient

$$d(ao) = \frac{1}{oc} \frac{oa.o\alpha}{\alpha a} kc.d\varphi.$$

Tenant compte de la valeur de $\frac{1}{oc}$ rappelée plus haut il reste

$$(2) \qquad d(ao) = kc.d\varphi.$$

Telle est l'expression demandée.

Comme l'on sait, la variation de longueur de ao est positive ou négative selon que α, tournant autour de e,

---

[1] *Principes et développements de Géométrie cinématique,* p. 36.
[2] *Loc. cit.,* p. 45.

s'éloigne ou se rapproche de a. La même règle s'applique pour l'expression (2), le point c tournant autour de k.

Comme exemple, voici l'énoncé d'un problème que l'expression (2) permet tout de suite de résoudre :

Une corde se déplace de façon que l'arc qu'elle sous-tend sur une courbe donnée soit de longueur constante, construire le centre de courbure de son enveloppe.