NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. SADIER

Sur un problème d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 109-111

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__109_0>

[C1f]

SUR UN PROBLÈME D'ALGÈBRE;

PAR M. J. SADIER.

Prouver que pour toutes les valeurs réelles et positives de la variable x l'expression $y = \frac{x^a - x^{1-a}}{x - 1}$, dans laquelle on a $0 < a < 1$, peut être représentée par

$$(2a - 1)\theta \qquad (0 < \theta < 1).$$

Cette question, posée dans le *Journal de Mathématiques spéciales* sous le n° 260, est reproduite au n° 503 des questions d'Algèbre de M. Laisant (*Recueil de probl. de math.*, t. III).

Une solution a été donnée (*J. S.*, 1896, p. 44). Elle est insuffisante : on y démontre l'existence d'un maximum (ou minimum, suivant le signe de $2a - 1$) et les valeurs 0 pour $x = 0$ et $x = \infty$. On n'y prouve pas que y reste toujours compris dans l'intervalle limité par ces deux racines.

Pour abréger l'écriture posons

$$b = 1 - a, \qquad c = a - b \qquad (a + b = 1;\ a \text{ et } b > 0).$$

On a

$$(x - 1)y = x^a - x^b,$$

d'où l'on déduit

$$x(x - 1)^2 y' = (ax + b)x^b - (bx + a)x^a.$$

Soit V le second membre :

$$V = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = 1.$$

Prouvons que V ne s'annule pour aucune autre valeur de x. Nous allons pour cela résoudre l'équation

$$\frac{ax+b}{bx+a}=x^c,$$

en laissant de côté la racine $x=0$, qui d'ailleurs n'annule pas la dérivée.

Les racines de cette équation sont données par les points d'intersection des deux courbes

$$y_1=\frac{ax+b}{bx+a}, \qquad y_2=x^c \quad (^1).$$

La première est une hyperbole équilatère; la seconde appartient à la famille des courbes paraboliques, dont l'équation est de la forme

$$y=x^m.$$

Nous avons deux cas à distinguer : $c>0$ et $c<0$.

(A) : $c>0 (a>b)$; y_1 croît constamment de $\frac{b}{a}$ à $\frac{a}{b}$ lorsque x croît de 0 à ∞, et y_2 croît constamment de 0 à ∞. Les deux branches de courbe, sans point d'inflexion, se coupent en un seul point d'abscisse $x=1$.

(B) : $c<0 (a<b)$; y_1 décroît constamment de $\frac{b}{a}$ à $\frac{a}{b}$ et y_2 de ∞ à 0; la courbure, comme dans le cas précédent, ne change pas de sens.

Donc, dans les deux cas, V n'a qu'un changement de signe pour $x=1$.

Cette discussion est résumée dans les deux Tableaux

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

suivants :

$$\text{(A)} : c > 0 \quad \left\{ \begin{array}{c|ccccc|} x & 0 & & 1 & & \infty \\ y' & & + & 0 & - & \\ y & 0 & \text{croît} & \underset{(\text{max.})}{c} & \text{décroît} & 0 \end{array} \right.,$$

$$\text{(B)} : c < 0 \quad \left\{ \begin{array}{c|ccccc|} x & 0 & & 1 & & \infty \\ y' & & - & 0 & + & \\ y & 0 & \text{décroît} & \underset{(\text{min.})}{c} & \text{croît} & 0 \end{array} \right..$$

Donc y reste compris entre 0 et c, lorsque x croît de 0 à $+\infty$. Donc

$$y = c\theta = (a - b)\theta = (2a - 1)\theta. \qquad \text{Q. E. D.}$$