

MAURICE FRÉCHET

**Sur une généralisation des notions
d'aire et de plan**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 241-248

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__241_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K9aα]

**SUR UNE GÉNÉRALISATION DES NOTIONS D'AIRE
ET DE PLAN;**

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

La généralisation que je propose pour la notion d'aire avait été déjà énoncée séparément par M. Peano (1890) et M. Laisant (1899). M. Peano en donne même une application fort intéressante à la définition de l'aire d'une surface [Sulla definizione dell'area d'una superficie (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 19 janvier 1890)]. M. Laisant, qui ne connaissait pas la Note de M. Peano, a également proposé la généralisation de notion de plan [Aire d'une courbe gauche fermée (Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, 18 septembre 1899)].

Le premier paragraphe de cet article ne présente donc rien de nouveau, le second me parait apporter une utile justification de l'extension proposée et peut avoir un certain intérêt au point de vue du calcul fonctionnel.

1^o Nous ne considérerons, dans ce qui suit, que des courbes L, planes ou gauches, formées d'un ou de plusieurs contours fermés à tangente continue, sauf en un nombre fini de points isolés. Supposons appliquée suivant chaque élément de L une force F représentée en grandeur, direction et sens par la moitié de cet élément (en supposant qu'un sens de parcours ait été préalablement défini sur L).

La résultante générale et le moment résultant de ce système de forces pris à l'origine seront des vecteurs finis

$$R : \frac{1}{2} \int_L dx, \quad \frac{1}{2} \int_L dy, \quad \frac{1}{2} \int_L dz,$$

$$S : \begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} \int_L y dz - z dy, \\ S_2 = \frac{1}{2} \int_L z dx - x dz, \\ S_3 = \frac{1}{2} \int_L x dy - y dx. \end{cases}$$

D'ailleurs, puisque la courbe L est composée de lignes fermées, les trois premières intégrales sont nulles. Donc le système de forces se réduit à un couple dont le moment résultant est le même en un point quelconque et a pour projections sur les axes de coordonnées les aires S_1, S_2, S_3 des trois projections de L .

D'ailleurs, si la courbe est plane, son aire est égale, comme on sait, à la longueur $\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$ du vecteur S , et son plan est perpendiculaire à ce vecteur. Mais la définition de ce vecteur est indépendante de la question de savoir si la courbe est plane ou non. Il est alors naturel de prendre ces propriétés comme définition dans le cas général. Nous appellerons donc *AIRE d'une courbe L , plane ou gauche, formée d'un ou de plusieurs contours fermés, la longueur du vecteur S qui a pour projection les aires S_1, S_2, S_3 des projections de L et DIRECTION DE PLAN de cette courbe la direction de plan perpendiculaire à ce vecteur*. Les aires S_1, S_2, S_3 seront d'ailleurs comptées positivement ou négativement selon que la projection du sens de parcours de L sur un plan de coordonnées sera le sens direct de rotation défini dans ce plan ou non.

Nous allons montrer que cette définition, non seulement contient la définition ordinaire comme cas particulier, mais qu'elle permet d'énoncer encore, dans le cas de courbes gauches, certaines propriétés de l'aire et du plan d'une courbe plane.

Tout d'abord, la définition mécanique que nous avons donnée du vecteur S nous permet de constater que la définition de ce vecteur est indépendante du choix des axes de coordonnées. Par conséquent, l'aire et le plan d'une courbe gauche ne dépendent que de cette ligne elle-même.

On voit de même que la projection du vecteur S sur un axe quelconque est la somme des moments des forces F par rapport à cet axe. Par suite, l'aire de la projection d'une courbe GAUCHE L sur un plan quelconque P est égale au produit de l'aire de cette courbe par le cosinus de l'angle du plan P avec le PLAN de la courbe L .

Il en résulte immédiatement la proposition suivante :

Étant donnée une courbe fermée plane ou gauche L , il existe en général une direction de plan P et une seule telle que l'aire de la projection de L sur un plan quelconque perpendiculaire à P soit constamment nulle.

C'est cette direction P que nous avons appelée *direction du plan de la courbe*. S'il existe deux telles directions, toute projection de la courbe a une aire nulle. Il en est ainsi, par exemple, lorsque L se compose de deux courbes fermées L_1, L_2 telles que L_2 s'obtienne en effectuant une translation quelconque de L_1 et renversant le sens de parcours. Il serait intéressant de chercher si ce cas peut aussi se présenter pour une courbe fermée d'un seul morceau et sans points doubles.

Le théorème précédent fait apparaître la direction de plan d'une courbe comme une direction privilégiée jouissant de propriétés particulières, même lorsque la courbe n'est pas plane.

Cette observation est encore confirmée par la remarque suivante :

Tout plan de symétrie d'une courbe plane ou gauche est perpendiculaire à la direction du plan de cette courbe.

2° Arrivons maintenant au théorème qui montre le mieux le caractère, en quelque sorte nécessaire, de notre généralisation (que sa définition mécanique avait pu faire paraître un peu artificielle).

Auparavant, rappelons quelques définitions. Nous appellerons *fonction de la ligne L* une quantité déterminée par la ligne L et qui ne varie qu'avec elle. Nous dirons que deux courbes L, L' ont un voisinage défini par le nombre ϵ , si l'on peut établir entre les points de L et de L' une correspondance univoque et réciproque dans laquelle la distance de deux points correspondants reste inférieure à ϵ .

Par définition, une fonction de ligne U_L sera continue si $(U_{L'} - U_L)$ tend vers zéro lorsque ϵ tend vers zéro, L restant fixe.

Enfin étant données deux courbes L, L', nous désignerons par $L + L'$ l'ensemble des courbes L, L' duquel on a supprimé, s'il en existe, les arcs communs à L, L' parcourus en sens contraires.

La courbe $L + L'$ rentrera comme L et L' dans la catégorie de courbes à laquelle nous nous limitons.

Ceci posé, il suffit de réfléchir à la manière dont on définit, en Géométrie élémentaire, l'aire d'une courbe

plane L pour constater que la méthode ordinaire permet d'énoncer la proposition suivante :

L'aire d'une ligne PLANE fermée L est la SEULE fonction de ligne U_L qui jouisse des quatre propriétés suivantes lorsque la ligne L reste dans un plan fixe :

I. *Elle est continue ;*

II. *Elle vérifie l'équation fonctionnelle*

$$U_{L+L'} = U_L + U_{L'};$$

III. *Elle ne varie pas lorsqu'on déplace la courbe L sans la déformer ;*

IV. *Elle est égale à 1 pour un carré de côté égal à 1 parcouru dans le sens direct.*

Nous sommes conduits à chercher s'il existe une fonction de ligne jouissant des mêmes propriétés dans le cas d'une courbe plane ou gauche.

D'après ce qui précède, cette fonction U_L coïncidera avec l'aire de L lorsque la courbe L sera plane. Mais, pour qu'on puisse étendre les quatre conditions à une courbe gauche, il faudra supprimer l'hypothèse que L reste dans un plan fixe. Cela suffit pour qu'il soit maintenant impossible de réaliser les quatre conditions. Car si les sens de parcours des faces L_1, L_2, L_3 d'une pyramide triangulaire de sommet P et de base L sont convenablement choisis, on aura

$$L = L_1 + L_2 + L_3$$

et, par conséquent, on devrait avoir

$$U_L = U_{L_1} + U_{L_2} + U_{L_3}.$$

Or L_1, L_2, L_3, L étant des courbes planes, les quan-

tités $U_L, U_{L_1}, U_{L_2}, U_{L_3}$ seront les aires des quatre faces de la pyramide et cette égalité, qui est exacte lorsque P est dans le plan de L, n'aura pas lieu quel que soit P.

On ne peut donc pas généraliser d'une manière immédiate; mais cela tient à ce qu'il faut généraliser les conditions en même temps que les objets auxquels elles s'appliquent. Et la considération du vecteur S nous conduit naturellement à cette extension. Nous pourrons appeler *fonction vectorielle continue de la ligne L* un vecteur dont les trois projections sont des fonctions continues de la ligne L et nous énoncerons la proposition suivante :

Le vecteur S est la seule FONCTION VECTORIELLE U_L de la ligne fermée L qui jouisse des quatre propriétés suivantes :

I. *Elle est continue;*

II. *Elle vérifie l'équation fonctionnelle*

$$U_{L+L'} = (U_L + U_{L'}),$$

l'expression $(U_L + U_{L'})$ désignant la somme GÉOMÉTRIQUE des deux vecteurs $U_L, U_{L'}$;

III. *Dans un déplacement de L sans déformation, le vecteur U_L subit le même déplacement;*

IV'. *La longueur du vecteur U_L est égale à 1 lorsque L est un carré de côté égal à 1 parcouru dans le sens direct.*

Il suffit de se reporter à la définition mécanique de S pour constater que S vérifie bien ces quatre conditions. Nous allons montrer qu'il n'y a pas d'autre solution.

En effet, s'il existe un vecteur U_L vérifiant I', II', III', IV', sa longueur satisfera aux conditions I, II, III, IV, lorsque L est une ligne plane d'un plan fixe arbitraire. Donc, cette longueur mesure l'aire de L lorsque L est une courbe plane.

D'autre part, la direction du vecteur U_L doit être perpendiculaire au plan de la ligne plane L. En effet, considérons deux lignes L, L' d'un plan P, symétriques par rapport à une droite D du plan P; leurs aires seront égales et de signes contraires. Donc l'aire de L + L' est nulle et, par conséquent,

$$U_{L+L'} = 0;$$

les vecteurs U_L et $U_{L'}$ sont, par suite, égaux et de sens contraire, puisque leur résultante est nulle. Or, on passe de L à L' et, par suite, de U_L à $U_{L'}$ par une rotation de 180° autour de D. Les vecteurs U_L , $U_{L'}$ doivent donc être symétriques par rapport à D et, comme ils sont directement opposés, ils sont nécessairement perpendiculaires à D. En résumé, quelle que soit la ligne L du plan P, le vecteur U_L est constamment perpendiculaire à toute droite de ce plan, il est donc perpendiculaire à ce plan.

Il résulte de ce qui précède que le vecteur U_L coïncide certainement avec le vecteur S quand la ligne est plane. Il est facile de montrer qu'il en est encore de même pour une ligne fermée gauche quelconque L. En effet, inscrivons une ligne polygonale fermée Π_n de n côtés dans cette ligne L, de façon que les sens de parcours se correspondent, et soit A un point quelconque de l'espace. On pourra déterminer les sens de parcours des triangles L_1, L_2, \dots, L_n de sommet A ayant pour bases les côtés de Π_n , de façon que l'on ait

$$\Pi_n = L_1 + L_2 + \dots + L_n,$$

d'où

$$U_{\Pi_n} = (U_{L_1} + U_{L_2} + \dots + U_{L_n}).$$

Par suite, la projection sur Oxy de U_{Π_n} sera la somme algébrique des projections de U_{L_1}, \dots, U_{L_n} , c'est-à-dire des aires des projections L'_1, \dots, L'_n de L_1, \dots, L_n sur xOy . Or, si Π'_n est la projection de Π_n sur xOy , l'aire de Π'_n sera égale à cette somme algébrique. En définitive, les projections de U_{Π_n} seront les aires algébriques des projections de Π_n .

Si, maintenant, on fait tendre les longueurs des côtés de Π_n vers zéro, avec $\frac{1}{n}$, la propriété de continuité montre qu'il en sera de même pour L . Donc U_L est identique à S .

On voit ainsi que, pour avoir une véritable généralisation de l'aire, il faut remplacer le *nombre* qui mesure l'aire par le *vecteur* S . On pourrait appeler le vecteur S , *aire vectorielle* de L et sa longueur *aire scalaire* de L . On pourrait alors énoncer ainsi un théorème bien connu dans le cas des courbes planes :

L'aire vectorielle de la projection de L sur un plan P est égale à la projection de l'aire vectorielle de L sur la perpendiculaire à P .

Ce théorème doit être entendu en grandeur et en signe; c'est-à-dire que l'aire de la projection sera affectée d'un signe ainsi que les longueurs portées sur l'axe Δ perpendiculaire au plan P . Les aires seront comptées positivement quand un observateur placé sur l'axe Δ , la tête dans le sens positif par rapport aux pieds, voit le contour projeté parcouru dans le sens direct.

