

A.-G. GREENHILL

Étude géométrique du mouvement planétaire

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 337-352

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__337_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[U1]

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DU MOUVEMENT PLANÉTAIRE;

PAR M. A.-G. GREENHILL.

Dans *Matière et mouvement*, petit Livre sur un grand sujet, J.-C. Maxwell donne (p. 110) une démonstration géométrique de la *première loi* de Képler, sur le mouvement des planètes :

L'orbite d'une planète est une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers.

La démonstration de Maxwell utilise la considération de l'*hodographe* d'Hamilton. Elle diffère en cela de la méthode géométrique donnée par Newton en 1687 dans les *Principia mathematica philosophiae naturalis* (lib. I, sect. III, prop. XI).

Je me propose, dans la Note actuelle, de continuer les deux méthodes. Je montrerai comment on peut étudier géométriquement, d'une manière rigoureuse, le mouvement d'un corps qui reçoit des impulsions radiales égales, à des intervalles angulaires égaux. Je montrerai ensuite, à la manière de Newton, que les effets de l'attraction solaire peuvent être reproduits, quand on suppose que ces impulsions deviennent continues. Tout se passe, ainsi qu'on le verra, comme si le corps était plongé dans un champ de gravitation centrale variant en raison inverse du carré de la distance au point attirant.

Dans la figure de la page suivante, S représente le Soleil, P une planète qui se meut dans la direction PR.

Supposons qu'à l'intérieur de l'angle KSK₂ l'attraction solaire est *concentrée* suivant la droite RS, bissec-

trice de cet angle : la planète reçoit ainsi une impulsion qui change la direction de son mouvement de PR en RP₂.

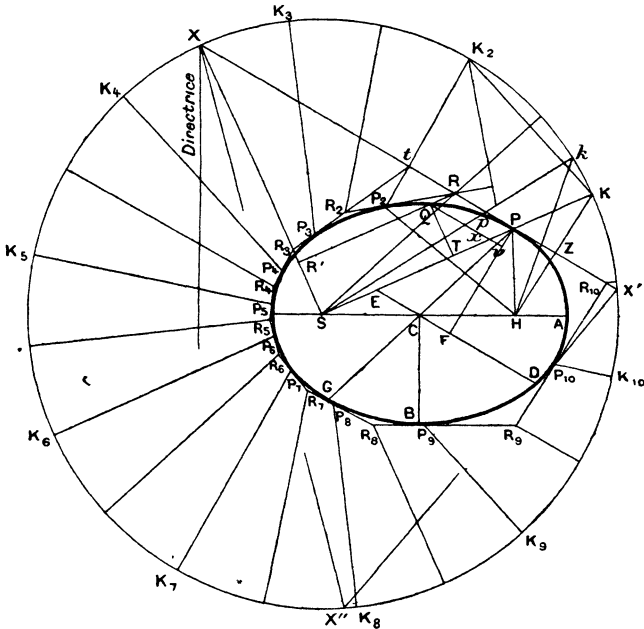
Décrivons le cercle KK₂, . . . , de centre S, et menons KH perpendiculaire à PR, le point H étant tel que

$$\widehat{HPR} = \widehat{KPR};$$

on a

$$PH = PK.$$

Construisons la figure à une échelle telle que le vecteur HK ait une longueur égale à la vitesse du point P,



et que KK₂, perpendiculaire à SR, soit égal à la vitesse communiquée par l'impulsion. Alors la longueur HK₂ sera égale à la nouvelle vitesse du mobile P, et de plus

la droite RP_2 , suivant laquelle est dirigée cette vitesse, doit être perpendiculaire à HK_2 . Au point P_2 , où la trajectoire rencontre SK_2 , on a

$$HP_2 = P_2K_2,$$

à cause de

$$HR = RK = RK_2;$$

par suite

$$HP_2 + P_2S = SK_2 = SK = HP + PS.$$

Il en résulte que PR_1RP_2 sont tangentes, en P_1P_2 , à l'ellipse ayant pour foyers S, H , et pour grand axe SK .

Portons sur le cercle, à la suite l'une de l'autre, une série de cordes égales K_2K_3, K_3K_4, \dots . Une nouvelle impulsion centrale, représentée en grandeur par K_2K_3 et dirigée suivant R_2S , changera la direction du mouvement de P_2R_2 en R_2P_3 , cette dernière droite étant perpendiculaire à HK_3 . Au point P_3 , situé sur SK_3 , on a

$$HP_3 = P_3K_3,$$

de telle sorte que R_2P_3 touche au point P_3 l'ellipse précédemment définie.

En continuant de cette manière, on voit que, sous l'effet d'impulsions égales, réparties à des intervalles angulaires égaux, le mobile décrit une trajectoire polygonale $RR_2R_3R_4, \dots$, constituant avec les droites $SR, SR_2, SR_3, SR_4, \dots$ une sorte de toile d'araignée. Cette trajectoire est circonscrite à une ellipse, les points de contact étant situés sur les droites SK, SK_2, SK_3, \dots , qui forment entre elles des angles égaux. Ce résultat est bien d'accord avec un théorème très connu relatif aux sections coniques.

. La figure qui accompagne cet article représente un polygone fermé de dix côtés.

Le polygone RR_2R_3, \dots est aussi inscrit dans une

ellipse, ayant en commun avec l'ellipse précédente le foyer S et la directrice correspondante.

Soit, en effet, X le point où la droite PR prolongée rencontre la perpendiculaire élevée à SP en S; ce point est sur la directrice, qui peut être tracée en abaissant du point X une perpendiculaire sur SH. (Sur la figure le point X se trouve sur le cercle KK_2, \dots ; c'est un fait accidentel.)

Menons RR' perpendiculaire à SX , et désignons par 2α l'angle KSK_2 , c'est-à-dire l'angle constant sous lequel les cordes égales $KK_2 \dots$ sont vues du point S. On a

$$\frac{SR}{RX} = \sec \alpha \frac{RR'}{RX} = \sec \alpha \frac{SP}{PX}.$$

Si donc e désigne l'excentricité de la première ellipse, R se trouve sur une section conique d'excentricité $e \sec \alpha$, et ayant en commun avec la première ellipse le foyer S et la directrice correspondante. De même pour R_2, R_3, \dots .

Jusqu'ici, nous avons supposé dans la construction que le cercle KK_2, \dots est donné; nous en avons déduit la position de H et la vitesse de P.

Mais supposons données les vitesses suivant PR et suivant RP_2 , le changement de vitesse étant dû à l'impulsion agissant suivant RS, bissectrice de l'angle PSP_2 . On obtient alors le point H par l'intersection des droites PH et P_2H , construites en faisant

$$\widehat{ZPH} = \widehat{SPR} \quad \text{et} \quad \widehat{RP_2H} = \widehat{SP_2R_2};$$

K est alors l'intersection de HZ, perpendiculaire à PR, et de la droite SP prolongée; on peut enfin décrire le cercle KK_2 , dont le centre est S.

Si H est à l'extérieur du cercle KK_2, \dots , l'ellipse de

la figure est remplacée par une hyperbole, et la construction est la même que précédemment.

Pourtant, si PH et P_2H sont parallèles, le cercle a un rayon infini; l'ellipse PP_2 , ... est remplacée par une parabole, et l'ellipse RR_2 , ... par une hyperbole dont l'excentricité a pour valeur $\sec\alpha$. Les triangles PSR, RSP_2 sont maintenant semblables, et le cercle hodo-graphe KK_2 , ... doit être remplacé par un cercle contenant le point S.

Pour le mouvement parabolique dans un champ de gravité uniforme : on suppose que la force continue est répartie suivant des impulsions égales, ayant lieu à des intervalles de temps égaux, et dont les lignes d'action constituent une série de parallèles équidistantes. On obtient ainsi une trajectoire polygonale, circonscrite et inscrite à deux paraboles égales et coaxiales.

En résumé, nous supposons que la gravitation du Soleil S agit d'une façon intermittente, par une série d'impulsions égales dont les lignes d'action font entre elles des angles égaux; dans ces conditions, l'orbite d'une planète devient un polygone, circonscrit à une conique et inscrit à une autre conique. Les deux coniques ont même foyer S et même direction correspondante.

Nous allons maintenant établir que ces impulsions intermittentes égales, supposées devenir de plus en plus fréquentes, à des intervalles angulaires de plus en plus petits, sont, à la limite, équivalentes à un champ de force, d'intensité variant en raison inverse du carré de la distance de S, conformément à la loi de Newton sur la gravitation universelle.

Dans les *Principia* (lib. I, sect. II, prop. I), Newton démontre de la manière suivante la deuxième loi de Képler :

L'aire balayée par le rayon vecteur mené du Soleil

à une planète est proportionnelle au temps employé à la parcourir.

Il suppose le point R près de P, de telle sorte que l'arc PQ peut être remplacé par sa corde; il suppose en outre que la direction PR du mouvement est changée en PQ, par une impulsion dirigée suivant RQ, parallèlement à SP.

L'égalité des aires SPQ, SPR montre alors que l'aire balayée par le vecteur SQ est la même que si aucune force centrale n'agissait; elle croît donc conformément avec le temps.

On désigne en général par $\frac{1}{2}h$ la vitesse d'accroissement de cette aire; on a donc

$$h = SP^2 \times \text{vitesse angulaire de SP.}$$

Considérons alors une orbite elliptique PQ, de foyer S, décrite sous l'action d'une force émanée de ce point S, et soit p la position occupée par le point P après un petit intervalle de temps Δt ; on a

$$h = \lim \frac{2 \text{aire SP}p}{\Delta t} = \lim SY \frac{Pp}{\Delta t} = SY \times \text{vitesse de P,}$$

en appelant SY la perpendiculaire abaissée de S sur la tangente PR.

On a, d'après une propriété bien connue de l'ellipse,

$$SY \cdot HK = 2 \overline{CB}^2;$$

par suite

$$\text{vitesse de P} = \frac{h}{SY} = \frac{\frac{1}{2}h}{\overline{CB}^2} HK.$$

Le vecteur HK peut donc être supposé mesurer la vitesse de P, si l'échelle est convenablement choisie,

et le cercle KK_2, \dots peut être pris pour hodographe, ainsi que nous l'avons fait au début.

Pendant que P vient en p , et que SP tourne dans le temps Δt du petit angle $KS k = \Delta\theta$, le vecteur Kk représente la variation de vitesse due à la force centrale dont l'intensité est F, pour l'unité de masse. Cette variation de vitesse étant d'autre part égale à $F \Delta t$, on a

$$\frac{F \Delta t}{\text{vitesse de P}} = \frac{Kk}{HK},$$

d'où

$$F = \frac{\text{vitesse de K} \times \text{vitesse de P}}{HK};$$

mais

$$\text{vitesse de K} = \text{vitesse angulaire de SP} \times SK = \frac{h \cdot SK}{SP^2},$$

$$\frac{\text{vitesse de P}}{HK} = \frac{\frac{1}{2} h}{BC^2},$$

donc enfin

$$F = \frac{\frac{1}{2} h^2 SK}{BC^2 \cdot SP^2} = \frac{2h^2}{L} \frac{1}{SP^2},$$

si L désigne la longueur de *latus rectum*, $4 \frac{BC^2}{SK}$.

Telle est essentiellement la démonstration donnée par Maxwell dans *Matière et mouvement* (§ CXXXIII, p. 111).

Pour employer ses expressions, l'accélération de P est perpendiculaire et proportionnelle au vecteur vitesse de K, dans l'hodographe $KK_2 \dots$. Puisque cet hodographe est un cercle ayant S pour centre, l'accélération est proportionnelle à la vitesse angulaire de SP, et par suite inversement proportionnelle au carré de SP, en vertu de la deuxième loi de Képler.

Nous allons donner la démonstration même de Newton

(*Principia*, lib. I, sect. III, prop. XI), traduite du latin. Nous écrirons SP^2 au lieu de SPq , notation archaïque qui survit encore dans des Ouvrages techniques, où l'on trouve mq ou qm pour désigner les *mètres carrés*, au lieu de m^2 , dans la notation de M. Hospitalier.

Newton établit d'abord (lib. I, sect. II, prop. VI) que si PQ est un petit arc d'une orbite quelconque décrite sous l'action d'une force centrale F émanée du point S, on a

$$F = \frac{2h^2}{SP^2} \lim \frac{QR}{QT^2},$$

QT étant mené perpendiculairement à SP, et QR parallèle à SP.

En effet, QR peut être considéré comme la distance dont le mobile s'éloigne, pendant un temps très court t , de la direction primitive PR de son mouvement, et cela dans la direction de la force F qui le sollicite suivant PS. On a donc

$$QR = \frac{1}{2} F t^2.$$

Or, d'après la deuxième loi de Képler,

$$ht = 2 \text{ aire } SPQ = SP \cdot QT,$$

puisque le triangle SPQ peut être considéré comme rectiligne. On a donc à la limite

$$F = \lim \frac{2QR}{t^2} = \frac{2h^2}{SP^2} \lim \frac{QR}{QT^2}.$$

L'auteur démontre plus loin (sect. III, prop. XI) que, si PQ est un arc d'une ellipse ayant un foyer en S, on a

$$\lim \frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{L}.$$

En effet, des théorèmes bien connus donnent pour la conique représentée sur la figure

$$(1) \quad \frac{QR}{Pv} = \frac{Px}{Pv} = \frac{PE}{PC} = \frac{AC}{PC},$$

$$(2) \quad \frac{Pv \cdot vG}{Qv^2} = \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CD}^2},$$

$$(3) \quad \lim \frac{\overline{Qv}^2}{\overline{QT}^2} = \lim \frac{\overline{Qx}^2}{\overline{QT}^2} = \frac{\overline{PE}^2}{\overline{PF}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CB}^2},$$

d'où, en multipliant membre à membre (1), (2), (3) :

$$\begin{aligned} \lim \frac{QR}{Qv^2} &= \lim \frac{AC}{PC} \frac{\overline{CP}^2}{vG \cdot \overline{CD}^2} \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CB}^2} \\ &= \frac{AC}{PC} \frac{\overline{CP}^2}{2CP \cdot \overline{CD}^2} \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CB}^2} = \frac{AC}{2CB^2} = \frac{1}{L}. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Les petites impulsions incessantes, représentées par les cordes Kk et dont l'ensemble constitue l'arc fini KK_2 , et qui font décrire au mobile P l'arc d'ellipse PQP_2 , ont une résultante dirigée suivant RS , bissectrice de l'angle PSP_2 et représentée en grandeur par la corde KK_2 . Si la force attractive incessante est remplacée par cette impulsion unique, le corps suivra la trajectoire brisée composée des lignes droites PR et RP_2 , et arrivera finalement au point P_2 et avec une vitesse dirigée suivant RP_2 , c'est-à-dire dans les mêmes conditions qu'en suivant sa trajectoire elliptique sous l'influence de l'attraction continue. Mais le temps nécessaire à ce parcours sera augmenté dans le rapport

$$\frac{\text{aire du quadrilatère } SPRP_2}{\text{aire du secteur curviligne } SPQP_2}.$$

Si l'on remplaçait les impulsions centripètes par des impulsions centrifuges, on obtiendrait ~~une~~ trajectoire polygonale inscrite et circonscrite à deux hyperboles, ~~ayant un foyer~~ commun en S et même directrice correspondante. La démonstration est la même que précédemment, et s'applique à l'orbite décrite sous l'action d'une force répulsive émanée de S, et variant en raison inverse du carré de la distance (*Principia*, lib. I, sect. III, prop. XII). Dans la construction de la figure, que nous laissons comme exercice au lecteur, le point H devra se trouver en dehors du cercle $KK_2 \dots$.

Nous signalerons la propriété suivante de la conique et du cercle $KK_2 \dots$. Appelons X et X' les points où la tangente en P coupe le cercle; les secondes tangentes menées à la conique par les points X et X' se coupent en X'' sur le cercle, de telle sorte que le triangle $XX'X''$ est inscrit dans le cercle et circonscrit à la conique. Il existe donc, en vertu du théorème de Poncelet, une infinité de tels triangles. H est leur orthocentre commun, et ils ont tous pour cercle des neuf points le cercle principal de la conique.

L'enveloppe des diverses trajectoires elliptiques décrites par un mobile partant de P avec une vitesse donnée de direction variable est l'ellipse qui a pour foyers S et P et dont un sommet se trouve en K. Le point de contact d'une ellipse avec son enveloppe est à P' sur le prolongement de PH.

Une impulsion radiale, agissant en P dans la direction SP, n'entraînera pas de modification pour la valeur de h , c'est-à-dire pour le *latus rectum* L de la nouvelle orbite : cette dernière passera donc par un point fixe P'', situé sur le prolongement de PS, puisque L est moyenne harmonique entre PS et SP''.

Si la direction de la vitesse initiale est PK, le mobile

arrivera en K avec ~~une~~ vitesse nulle, de telle sorte que le cercle $KK_2\dots$ peut être appelé le *cercle de vitesse nulle*. On peut dire aussi que la vitesse en P est celle qu'acquiert un mobile partant sans vitesse du point K situé sur le cercle, et se mouvant suivant KP sous l'attraction du point S.

Supposons que S soit le centre et P un pôle de la Terre. Lançons du point P des projectiles, avec une vitesse initiale v , qui, supposée dirigée verticalement, les amènerait à une hauteur PK comparable au rayon de la Terre PS; alors

$$\frac{1}{2}v = g \cdot SP \left(1 - \frac{SP}{SK}\right).$$

Dans ces conditions, et en admettant que le milieu ne présente pas de résistance, la trajectoire d'un de ces projectiles, pour une vitesse initiale faisant l'angle β avec la verticale, est une ellipse ayant un foyer en S et l'autre au point H tel que $\widehat{KPH} = 2\beta$.

La portée, à la surface de la Terre, est, en milles marins, égale à 120α , où $\widehat{PSH} = \alpha$ est, exprimé en degrés, l'angle qui satisfait à la relation

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(2\beta - \alpha)} = \frac{PH}{SP} = \frac{PK}{SP}.$$

Désignons par $\frac{1}{n}$ ce dernier rapport. La portée est maximum si l'on a

$$\widehat{PHS} = 2\beta - \alpha = 90^\circ, \\ \sin \alpha = -\cos 2\beta = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}v^2 = \frac{g \cdot SP}{n+1}.$$

Si l'on veut par exemple que la portée maximum soit la distance du pôle à l'équateur, il faudra faire

$$\alpha = 45^\circ, \quad n = \sqrt{2}, \quad \beta = 67^\circ 30'.$$

Le projectile doit être lancé dans une direction faisant avec l'horizon un angle de $22^{\circ}30'$.

On trouvera que le temps nécessaire au parcours est d'environ 30^m . On verra aussi que la vitesse initiale doit être au moins d'environ 7200 m/s pour qu'un projectile lancé du pôle atteigne l'équateur.

Si l'on fait $n = 1$, on obtient la vitesse d'un satellite qui tournerait autour de la Terre en rasant sa surface. Le temps de la révolution d'un tel satellite serait $\frac{1}{17}$ de jour ⁽¹⁾.

Un projectile, lancé avec cette vitesse sous un angle de β° avec la verticale, aurait une portée de 120β milles marins.

On peut appeler $\sqrt{2g \cdot SP}$ la *vitesse parabolique*; en effet, pour une vitesse initiale ayant cette valeur, SK est infini, et la trajectoire est une parabole ayant son foyer en S. Si l'on fait

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \pi SP = 10^7 \text{ m,}$$

on trouve que la vitesse parabolique est d'environ

$$11200 \text{ m/s.}$$

On dit que la première et la deuxième lois de Képler ont résulté d'une discussion laborieuse des observations de la planète Mars. On peut cependant les déduire aisément du Tableau des demi-diamètres apparents du Soleil, pris de jour en jour, et de sa marche horaire en longitude, Tableaux qui figurent dans *l'Annuaire du Bureau des Longitudes*.

1° On trouve que le diamètre D du Soleil est relié à sa longitude θ , comptée à partir de l'aphélie, par une

(1) Voir l'anecdote rapportée par Hérodote (Livre IV, § 36).

relation de la forme

$$D = a + b \cos \theta, \quad a + b = 1956'', \quad a - b = 1892'',$$

ce qui démontre la première loi.

2° La marche horaire en longitude, c'est-à-dire la vitesse angulaire, est proportionnelle à l'aire apparente, c'est-à-dire à D^2 , ce qui prouve la deuxième loi.

La loi de la gravitation universelle de Newton, appliquée au Soleil et à une planète, est exprimée par la formule

$$F = \frac{G \cdot S}{S P^2}, \quad \text{d'où} \quad G \cdot S = \frac{2 h^2}{L},$$

S désignant la masse du Soleil, et G la *constante de la gravitation*. Cette constante, d'après les expériences de M. C.-V. Boys, a pour valeur numérique, en unités C. G. S.,

$$G = 666 \cdot 10^{-10}$$

(voir *La Constante de la gravitation*, rapport présenté au Congrès international de Physique, réuni à Paris en 1900; chez Gauthier-Villars, à Paris).

Si Δ désigne la densité moyenne de la Terre, E sa masse, r son rayon, g l'accélération de la pesanteur à sa surface (toujours en unités C. G. S.), on a

$$g = \frac{G \cdot E}{r^2} = \frac{4}{3} \pi r G \Delta = \frac{8}{3} 10^9 G \Delta,$$

puisque le quart du méridien terrestre $= \frac{1}{2} \pi r = 10^9$ cm.

Par suite

$$G \Delta = \frac{3}{8} g 10^{-9},$$

et, puisque

$$g = 981 \text{ cm/s}^2, \\ \Delta = 5,53 \text{ g/cm}^3,$$

$$E = \frac{4}{3} \pi r^3 \Delta = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{10^9}{\frac{1}{2} \pi} \right)^3 \Delta = \frac{32}{3 \pi^2} 10^{27} \Delta \approx 6 \cdot 10^{27} \text{ g}.$$

La durée de la révolution terrestre T , exprimée en secondes, est donnée par

$$T = \frac{\text{aire de l'orbite elliptique}}{\frac{1}{2}h} = 2\pi \frac{AC \cdot BC}{h},$$

d'où

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{h^2}{AC \cdot BC^2} = \frac{G \cdot S}{AC^3}.$$

Désignons, suivant Laplace et d'autres auteurs, la vitesse angulaire moyenne $\frac{2\pi}{T}$ par n , et par a la distance moyenne AC , on aura

$$n^2 a^3 = G \cdot S.$$

C'est la troisième loi de Képler, qui s'énonce ainsi :

Le carré du temps de la révolution d'une planète est proportionnel au cube de sa distance moyenne au Soleil.

Nous avons supposé dans ce calcul que le Soleil était fixe et ne cédait pas à l'attraction de la planète. Cette hypothèse est suffisamment voisine de la vérité, quand il s'agit du mouvement de la Terre par rapport à un astre aussi vaste que le Soleil; mais il faut recourir à des considérations plus rigoureuses, quand on examine le système constitué par une étoile double, pour la Terre et la Lune, ou bien quand on étudie le mouvement d'une grosse planète.

Appelons E la masse de la planète P , la Terre par exemple. Pour calculer le mouvement relatif de P par rapport au Soleil, l'accélération $\frac{G \cdot E}{SP^2}$, due à l'attraction de la planète, doit être appliquée au système des deux astres, et cela en sens inverse de l'accélération $\frac{G \cdot S}{SP^2}$ due

à l'attraction solaire. On doit donc écrire, dans le cas actuel,

$$F = \frac{G(S + E)}{SP^2}, \quad G(S + E) = \frac{2h^2}{L},$$

d'où

$$n^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{G(S + E)}{a^3}.$$

Telle est la forme corrigée de la troisième loi de Képler, telle qu'elle est donnée dans *Matière et mouvement* (§ CXXXVII). Le terme correctif n'est pas négligeable pour les planètes les plus grosses et les plus lointaines du système solaire.

Supposons par exemple qu'on veuille déterminer la masse S du Soleil. Soient

M la masse de la Lune ;
 a' sa distance moyenne ;
 n' son moyen mouvement.

On aura

$$\frac{S + E}{E + M} = \frac{n^2 a^3}{n'^2 a'^3}.$$

Or, on a, comme on sait, en nombres ronds,

$$\frac{n}{n'} = \frac{1}{13}, \quad \frac{a}{a'} = 400, \quad \frac{E}{M} = 80.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{S}{E} &= \frac{81}{80} \frac{(400)^3}{13^2} - 1 \approx 350\,000, \\ S &= 21 \times 10^{32} \text{ g.} \end{aligned}$$

La troisième loi de Képler permet d'appliquer des considérations de similitude mécanique au système solaire, et à un modèle réduit de ce système (on peut appeler un tel modèle un *orrery*, d'après le nom de Lord Orrery, celui qui l'a construit le premier).

Si le modèle conserve les densités relatives des diverses parties du système solaire, $S + E$ sera proportionnel à a^3 et au rapport des densités du système et du modèle. Ainsi, d'après la troisième loi de Képler, le rapport des densités sera proportionnel à n^2 . Ce résultat, vrai pour le problème des deux corps, le Soleil et une planète, est encore applicable à un modèle de tout le système solaire, même en tenant compte des perturbations planétaires. En résumé, un modèle du système solaire, libre dans l'espace, et soumis à sa propre gravitation, satisfera aux conditions de la similitude géométrique, mais les temps seront altérés dans le rapport inverse des racines carrées des densités de l'original et du modèle. Si le modèle est construit avec conservation des densités, il sera géométriquement semblable à l'original à un moment quelconque.