Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 364-369

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__364_0>

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre. Œuvres scientifiques de *Gustave Robin,* publiées par M. *Louis Raffy,* professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — 1 vol. in-8° de VI-215 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903. Prix : 7fr.

M. L. Raffy a entrepris la tâche difficile de publier les œuvres du regretté et éminent savant que fut Gustave Robin.

La rédaction de la *Théorie nouvelle des fonctions* était particulièrement délicate, puisque M. Raffy a dû, en quelque sorte, la construire tout entière, faute de manuscrit, d'après des notes prises au cours de nombreux entretiens avec Robin.

La part de l'éditeur est donc, en l'occurrence, beaucoup plus grande que celle d'un simple rédacteur et M. Raffy a été, en écrivant cet Ouvrage, un véritable collaborateur de Robin, dont il a commenté, développé et ordonné les idées.

Ce qui importe dans cette Œuvre ce n'est pas le détail, fort bien mis au point et rédigé avec ce souci de l'élégance, cette recherche du mot juste, qui caractérisent les livres de M. Raffy. C'est l'idée directrice qu'il faut examiner, celle qui constitue l'originalité de l'Œuvre.

A ce point de vue, la lecture seule de l'*Introduction* pourrait suffire; s'il n'était pas nécessaire, pour la critique, de voir les conséquences et les conclusions.

« Notre objet, dit l'auteur, est de constituer l'Analyse avec la seule idée de nombre, le nombre sera le seul élément avec lequel nous opérerons; c'est-à-dire que toute lettre représentera toujours pour nous un nombre au lieu d'être, comme dans les théories classiques, le signe d'une grandeur. »

Une telle profession de foi ne devient évidemment intelligible que si l'auteur nous apprend ce qu'il entend par le mot *nombre*.

C'est là une notion fondamentale qui a déjà été étudiée, fouillée par beaucoup de savants éminents tels Weierstrass, Kronecker, Dedekind, Grassmann, Méray, Jules Tannery, etc., et la série n'est certes pas close, car le champ reste toujours ouvert dans un domaine où l'abstraction règne en maîtresse et où le concept *a priori* est la base.

Le nombre peut être conçu uniquement comme mesure d'une grandeur concrète tangible. C'est probablement en faisant allusion à ce mode de conception que M. Raffy reproche aux lettres d'être les *signes de grandeurs.*

Mais le nombre peut, au contraire, être conçu uniquement comme un symbole purement abstrait, n'ayant en quelque sorte aucune existence concrète. Dans ce cas, une catégorie de nombres est définie non en elle-même, comme formée d'une série d'objets définissables chacun isolément et indépendamment les uns des autres, mais par ses propriétés, par les définitions de l'égalité et des opérations fondamentales irréductibles. Sous cet aspect le nombre n'est plus *le signe d'une grandeur.* Cette façon de concevoir le nombre répugne à l'esprit de Robin :

« On a constitué de la sorte un système cohérent, dans lequel on a cherché et réussi à éviter toute contradiction. Mais les fractions ainsi introduites ne peuvent pas être considérées comme des nombres. »

Peut-être eût-ce été l'occasion favorable de dire au lecteur ce que c'est qu'un *nombre,* au sens que Robin attache à ce mot, car tout ici n'est que convention et il suffit, pour s'entendre, de préciser le sens des termes que l'on emploie.

Malheureusement M. Raffy ne nous donne aucune indication sur le sens *général* que Robin attache à l'idée de nombre et il se contente, en supposant acquise la notion *a priori* du nombre entier, de définir les *objets* qui constituent les *nombres fractionnaires* et *négatifs.*

Cette définition ne diffère que par la forme de la définition classique comme mesure d'une grandeur commensurable avec l'unité. Au lieu de partager l'unité en parties égales, l'auteur groupe des objets égaux pour former l'unité; mais plus loin la nécessité de considérer des fractions à *dénominateur indéfiniment croissant* l'oblige cependant à admettre l'axiome d'Archimède, à savoir que : « Chaque objet peut être considéré comme un groupe formé d'un nombre *illimité* d'autres objets équivalents entre eux. » Ce qui revient à admettre la possibilité du partage en n parties égales, si grand que soit n.

Le nombre fractionnaire positif défini, la notion de *sens* conduit aux nombres négatifs.

En résumé, Robin n'admet comme éléments constitutifs de l'Analyse que les nombres rationnels positifs et négatifs, définis comme mesures ou représentations d'objets commensurables avec l'unité.

En dehors de ces objets il ne connaît pas de *nombre* et ainsi sa conception voisine celle de Kronecker, qui cependant bâtit très différemment son Analyse.

Ce premier point acquis, l'Introduction nous dit :

« En constituant l'Analyse tout entière avec la seule idée de nombre, nous en excluons deux idées qu'on est habitué à y voir intervenir, mais qui sont absolument distinctes de l'idée de nombre et qui, transportées de l'étude des grandeurs, dans le domaine de l'Analyse, ont faussé l'esprit de cette science et l'on fait dévier soit vers des développements relatifs à des grandeurs, soit vers des développements purement verbaux : ce sont les idées d'*infiniment petit* et de *limite*. »

Cette déclaration belliqueuse paraît rouvrir la discussion, de savoir si les idées *philosophiques* et *expérimentales* d'infiniment petit et de limite ont quelque lien avec les *définitions* nettes que l'on donne des mêmes termes en Analyse. Il est tout naturel que le physicien que fut Robin se soit posé cette question; pour un mathématicien pur elle n'a que peu d'intérêt.

La question est d'ailleurs de celles qui sont insolubles, comme toutes celles qui mettent aux prises le concept abstrait pur avec le concret.

Les mathématiciens de nos jours, se dégageant de l'expérience, ont bâti une science formelle, solide et inattaquable, fondée sur une terminologie rationnellement définie. C'est ce formalisme qui déplaît à Robin qui ne veut connaître que des objets tangibles, soumis à l'expérience et à ses imperfections.

L'esprit tout entier du Livre se trouve dans cette citation de l'Introduction :

« Nous ne citerons, pour donner une idée de notre méthode, qu'une question, absolument fondamentale dans les applications de l'Analyse :

» *Trouver un nombre x tel que, si on le connaissait et si l'on faisait sur lui une série d'opérations arithmétiques dont $f(x)$ désignera le résultat, $f(x)$ fût égal à zéro.*

» C'est là ce qu'on appelle *résoudre l'équation* $f(x) = 0$. Or, il est très rare que ce problème soit possible : il n'existe généralement pas de nombre ([1]) répondant à la question proposée. Par contre, il arrive très fréquemment qu'on peut résoudre la suivante :

» *Trouver une suite indéfinie de nombres x_1, x_2, x_3, ... différant entre eux de fractions qui finissent par être aussi petites qu'on veut, tels de plus que les nombres $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., forment une suite dont tous les termes soient inférieurs en valeur absolue à des fractions qui finissent par être aussi petites qu'on veut.* »

C'est clair, Robin ne connaît que les nombres rationnels et substitue à ce que nous appelons un nombre irrationnel, ce que nous nommons ses *valeurs approchées*.

Il reste à savoir si l'on peut, tout en conservant la rigueur qu'on a le droit d'exiger du raisonnement mathématique, aller jusqu'au bout.

Étant donné un nombre (rationnel) x, en général, f étant le symbole d'une fonction quelconque, $f(x)$ est irrationnel ; donc, au sens de Robin, $f(x)$ n'a pas *une* valeur, mais une *infinité* de valeurs qui sont ce que nous appelons les valeurs approchées de $f(x)$.

Le texte dit :

« On représente par $f(x)$ un terme *quelconque*, pris à partir d'un rang *suffisamment élevé* dans l'une des suites qui correspondent à x ; réciproquement on dit que chacune de ces diverses suites *définit* la valeur $f(x)$ de la fonction pour la valeur x de la variable. »

Les deux parties de cet énoncé sont-elles bien d'accord?

Dans la première, la valeur de $f(x)$ est indéterminée,

([1]) Au sens de Robin, c'est-a-dire *rationnel*.

puisque c'est l'une *quelconque* des valeurs lointaines de la suite; dans la seconde il semble qu'on revient au concept classique que l'auteur abhorre, puisqu'il y est dit que *les suites* DÉFINISSENT LA VALEUR de $f(x)$. Il semble donc que dans cette seconde Partie *la valeur* de $f(x)$ ne soit qu'un symbole représentatif d'un ensemble de suites équivalentes.

M. Raffy, en rédigeant les idées de Robin, est-il sûr de s'être dégagé de l'influence des notions acquises et de l'ambiance classique?

Au problème inverse du Calcul des fonctions (p. 73), nous trouvons l'énoncé suivant :

Trouver une suite convergente

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots,$$

telle que les nombres

$$f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots, \quad f(x_n), \quad \ldots$$

forment une suite convergente ayant pour limite A.

Quels sont dans cet énoncé les *nombres* $f(x_1)$, $f(x_2)$, ...? Puisque $f(x_1)$ a plusieurs valeurs, comment choisir celle qui figurera dans cet énoncé?

On voit, par ces quelques citations, l'esprit de l'Ouvrage et les difficultés qu'une telle méthode a à surmonter. Il ne nous est pas possible, dans une aussi brève analyse, d'entrer dans de plus amples détails; mais le Volume est de ceux qu'il est bon de lire et d'examiner, et nous devons remercier M. Raffy du soin consciencieux qu'il a mis à nous présenter les idées de Robin, mais à sa place nous aurions plutôt intitulé ce Volume : *Application de la méthode des valeurs approchées à la détermination des fonctions.*

CARLO BOURLET.

SUR LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES, par M. *Jules Richard,* professeur au lycée de Dijon. — 1 vol. in-12 de 248 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903. Prix : $3^{fr}25$.

Ce petit Volume, fort intéressant et d'une lecture facile, n'est pas, et n'a pas la prétention d'être, *un Traité* de la philosophie des Mathématiques. C'est une série de Notes les unes assez développées, les autres brèves, sans lien apparent entre elles, sur la philosophie de notre science. A côté de faits connus, de vues empruntées à d'éminents mathématiciens modernes, tels Henri Poincaré et Jules Tannery, l'auteur nous donne quelques aperçus qui sont les fruits de ses réflexions personnelles et qui ne manquent ni de profondeur ni de saveur.

Dans la *première Partie,* M. J. Richard traite de la logique mathématique et analyse, avec beaucoup de finesse, les règles et la puissance du raisonnement.

Suivent des études variées sur la Géométrie, le postulat d'Euclide, l'infini, le continu, l'espace, etc.

Beaucoup de Chapitres sont originaux, mais on voit mal le plan d'ensemble, le fil directeur qui a guidé l'auteur. Peut-être, intentionnellement, a-t-il voulu se contenter de rédiger quelques Notes, prises au cours de travaux scientifiques.

Ce Volume plaira surtout à ceux qui, n'ayant pas encore beaucoup lu, voudront avoir des idées justes sur grand nombre des points où la Mathématique confine à la Philosophie.

Nous ne pouvons qu'en recommander la lecture.

C. B.