NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1904)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 369-373

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__369_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1904).

Sujets des compositions.

Mathématiques élémentaires.

On donne, dans un plan, deux points A et A′ et une droite D menée par A; un cercle variable Γ, situé dans ce plan, passe constamment par A et A′. Autour du point variable M où ce cercle rencontre D, on fait tourner la tangente en ce point à Γ d'un angle donné α dans le plan orienté; soit Δ la droite ainsi obtenue.

1° La droite Δ rencontre Γ en un point M′ autre que M; le lieu des points M′ est une droite D′ que l'on construira.

Trouver le lieu géométrique de la projection orthogonale du point A′ sur Δ.

2° Démontrer que le lieu géométrique du pôle P de Δ par rapport à Γ est une droite d.

3° Soit d_1 une droite donnée dans le plan; chercher si cette droite peut être regardée comme lieu d du point P, en choisissant convenablement la droite D et l'angle α.

4° Trouver l'enveloppe de d lorsque D tourne autour du point A, l'angle α restant constant.

5° Soit T le triangle dont les sommets sont le point P et les points de rencontre de Δ avec Γ : étudier le déplacement du cercle circonscrit à ce triangle.

Mathématiques spéciales.

On donne un cylindre défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y^2 - 2px = 0$$

et un plan dont l'équation est

$$z - by + \lambda(x - ay) = 0.$$

1° Calculer les coordonnées du sommet S de la parabole section du cylindre par plan. Trouver la courbe C lieu géométrique de ce sommet quand λ varie, a et b restant fixes. Montrer que cette courbe possède en général deux points doubles et peut être placée sur deux cônes du troisième ordre.

2° On considère la courbe particulière C′ obtenue en posant

$$a = 1, \qquad b = 0.$$

Quelles sont les relations qui existent entre les valeurs de λ qui correspondent aux points de rencontre de C′ avec un plan arbitraire?

Discuter la réalité des points de rencontre de cette courbe avec un plan osculateur quelconque.

3° Démontrer que, par toute droite tangente en un point A à C′, on peut mener trois plans qui lui soient tangents chacun en un point autre que A; réalité de ces plans.

Les plans bitangents à la courbe C′ se partagent en deux familles; démontrer que les plans de l'une des familles sont tangents au cylindre parabolique et ceux de l'autre famille tangents à une surface du second ordre dont on déterminera le genre.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On donne deux axes rectangulaires ox et oy; un point C de l'axe oy, d'ordonnée positive h, est le centre d'une circonférence de rayon R située dans le plan xoy. Une droite AB, de longueur constante a, se déplace de façon que son extrémité A reste sur l'axe ox et son extrémité B sur la circonférence. On suppose

$$R < h \qquad \text{et} \qquad a > R + h.$$

Soient ξ l'abscisse variable du point A, et φ, θ les angles que font respectivement les directions AB et CB avec la direction oy. Soient en outre λ et t les valeurs respectives de $\tang\frac{\varphi}{2}$ et de $\tang\frac{\theta}{2}$.

1° Les paramètres ξ, λ et t satisfont à des relations de la forme

$$\frac{d\xi}{\sqrt{P(\xi)}} = \frac{d\lambda}{\sqrt{Q(\lambda)}} = \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

où $P(\xi)$, $Q(\lambda)$, $R(t)$ sont trois polynomes du quatrième degré respectivement en ξ, en λ et en t, à coefficients constants. Former ces relations et en déduire les expressions de ξ, λ et t en fonctions elliptiques d'un paramètre u, à l'aide des fonctions sn, cn, dn de Jacobi. On fera en sorte que, dans ces expressions, à la valeur $u = 0$ corresponde la plus grande valeur que peut prendre ξ, lorsque les éléments géométriques de la figure sont tous réels. On discutera les formules obtenues.

2° Exprimer en fonction de u la surface du triangle ABC et le rapport des vitesses des points A et B dans le mouvement de AB.

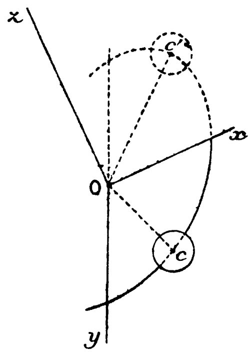
3° Soient Γ la courbe enveloppe de AB et M le point de contact de AB avec cette enveloppe. Démontrer que la différentielle de l'arc $s = M_0M$ de la courbe Γ, compté à partir d'un certain point fixe M_0, est donnée par la formule

$$ds^2 = (da_1 - \sin\varphi \, d\xi)^2,$$

où a_1 désigne le segment AM estimé positivement dans le sens AB. Déduire de là l'expression de s en fonction de u.

Mécanique rationnelle.

Soit $Oxyz$ un trièdre trirectangle dont le sommet O est fixe. Le point O est le centre d'un anneau formé par une tige circulaire infiniment mince, sans masse, placée dans le plan xOy et



invariablement liée à ce plan. Deux sphères massives, homogènes, identiques, ayant leurs centres c et c' sur la tige, sont traversées par elle et ne peuvent ainsi que glisser le long de l'anneau; elles sont en outre assujetties, par certaines liaisons, à rester symétriques par rapport à l'axe Ox. On suppose d'ailleurs que ces liaisons sont sans frottement et qu'il en est de même du glissement des sphères sur l'anneau. Enfin, aucune force extérieure n'agit sur le système ainsi constitué.

1° Former les équations différentielles qui déterminent la rotation instantanée du trièdre $Oxyz$ et l'angle u que font avec Ox les droites Oc et Oc'. Indiquer ensuite comment, en supposant ces équations intégrées, on pourra calculer les angles d'Euler qui définissent la position du trièdre relativement à des axes fixes convenablement choisis et comment aussi l'on peut calculer les forces de liaison qui agissent sur chacune des sphères, regardée comme libre.

2° A un certain moment, on introduit brusquement une liaison nouvelle qui fixe invariablement les deux sphères à la tige : déterminer les variations de vitesse qui peuvent se produire, ainsi que les percussions de liaison que subit à ce moment chacune des sphères.

3° La liaison brusquement introduite étant supposée persistante, former les équations différentielles du mouvement du système. Admettant en outre qu'à l'instant de la percussion l'angle u était égal à $\frac{\pi}{4}$, étudier complètement ce mouvement; puis trouver un point de l'anneau tel que si, à une époque ultérieure donnée, on fixe brusquement ce point, le système soit subitement et tout entier immobilisé.

Nota. — On appellera a le rayon de l'anneau, b et m le rayon et la masse de chacune des sphères.