A. VACQUANT

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1904). Solution de la question de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 494-505

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__494_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1904).

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

On donne un cylindre défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y^2 - 2px = 0$$

et un plan dont l'équation est

$$z - by + \lambda(x - ay) = 0.$$

1° *Calculer les coordonnées du sommet* S *de la parabole section du cylindre par le plan. Trouver la courbe* C, *lieu géométrique de ce sommet quand* λ *varie,* a *et* b *restant fixes. Montrer que cette courbe possède en général deux points doubles et peut être placée sur deux cônes du troisième ordre.*

2° *On considère la courbe particulière* C′ *obtenue en posant*

$$a = 1, \qquad b = 0.$$

Quelles sont les relations qui existent entre les valeurs de λ qui correspondent aux points de rencontre de C′ avec un plan arbitraire?

Discuter la réalité des points de rencontre de cette courbe avec un plan osculateur quelconque.

3° *Démontrer que, par toute droite tangente en un point A à C′, on peut mener trois plans qui lui soient tangents chacun en un point autre que A; réalité de ces plans.*

Les plans bitangents à la courbe C′ se partagent en deux familles; démontrer que les plans de l'une des familles sont tangents au cylindre parabolique et ceux de l'autre famille tangents à une surface du second ordre dont on déterminera le genre.

1. Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du sommet S de la parabole section du cylindre

$$y^2 - 2px = 0$$

par le plan P

$$z - by + \lambda(x - ay) = 0.$$

Le point S sera sommet de la parabole si la tangente ST en ce point est perpendiculaire au diamètre SM de la parabole. Les équations de ST et de SM sont respectivement

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0,$$
$$z - by + \lambda(x - ay) = 0$$

et

$$y - y_0 = 0,$$
$$z - by + \lambda(x - ay) = 0.$$

Les paramètres directeurs de ST sont

$$-y_0, \quad -p, \quad -p(b + a\lambda) + \lambda y_0;$$

ceux de SM sont

$$-1, \quad 0, \quad \lambda.$$

Pour que ces deux droites soient perpendiculaires, il faut

$$y_0 + \lambda[\lambda y_0 - p(b + a\lambda)] = 0.$$

Les coordonnées du sommet de la parabole sont définies par les équations suivantes, dans lesquelles on a enlevé l'indice o :

$$(1) \qquad \begin{cases} y(1+\lambda^2) - p\lambda(b+a\lambda) = 0, \\ z - by + \lambda(x - ay) \quad = 0, \\ y^2 - 2px \quad = 0. \end{cases}$$

On en déduit

$$y = \frac{p\lambda(b+a\lambda)}{1+\lambda^2},$$

$$x = \frac{y^2}{2p} = \frac{p\lambda^2(b+a\lambda)^2}{2(1+\lambda^2)^2},$$

$$z = by - \lambda\left(\frac{y^2}{2p} - ay\right) = y\left(b + a\lambda - \frac{\lambda y}{2p}\right),$$

$$z = y\left(b + a\lambda - \frac{\lambda^2(b+a\lambda)}{2(1+\lambda^2)}\right),$$

$$z = \frac{p\lambda(b+a\lambda)^2(2+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)^2}.$$

Les coordonnées du sommet S de la parabole sont donc

$$(C) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{p\lambda^2(b+a\lambda)^2}{2(1+\lambda^2)^2}, \\ y = \dfrac{p\lambda(b+a\lambda)}{1+\lambda^2} = \dfrac{2p\lambda(b+a\lambda)(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)^2}, \\ z = \dfrac{p\lambda(b+a\lambda)^2(2+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)^2}. \end{cases}$$

Quand λ varie, a et b restant fixes, ces équations montrent que S décrit une courbe unicursale C d'ordre 5.

Si l'on élimine λ entre les deux premières équations (1), on obtient l'équation

$$(S_3) \left\{ \begin{aligned} & y[(x-ay)^2+(z-by)^2] \\ & \quad + p(z-by)[b(x-ay)-a(z-by)] = 0, \end{aligned} \right.$$

représentant une surface réglée du troisième ordre S_3 admettant pour droite double la droite D

$$\begin{aligned} z - by &= 0, \\ x - ay &= 0, \end{aligned}$$

autour de laquelle tournent les plans P, et pour génératrice la droite, parallèle au plan zOx, définie par les deux premières équations (1). S_3 est donc un conoïde d'axe D, de plan directeur zOx. La surface S_3 et le cylindre parabolique ont en commun la droite de l'infini du plan zOx, et le reste de l'intersection est la courbe C.

La droite double D de S_3 rencontre le cylindre au point O et en un deuxième point O'; les points O et O' sont, par suite, points doubles de C. Les coordonnées de O' sont

$$x = 2a^2p, \qquad y = 2ap, \qquad z = 2abp.$$

On peut retrouver ces points doubles à l'aide des équations (C). En effet, on a le même point O pour les valeurs différentes $\lambda = 0$, $\lambda = -\frac{b}{a}$ du paramètre λ, et l'on a le point O' pour les valeurs de λ, racines de l'équation

$$2ap = \frac{p\lambda(b+a\lambda)}{1+\lambda^2}$$

ou

$$a(2+\lambda^2) = b\lambda.$$

Pour ces valeurs, x et z prennent les mêmes valeurs $2a^2p$ et $2abp$. Le point double O' ne correspond à des branches réelles que si l'on a

$$b^2 - 8a^2 \geqq 0.$$

Si l'on considère le cône Γ de sommet O, de directrice C, il sera du troisième ordre, car tout plan mené par le point double O de C coupe cette courbe en trois autres points et, par suite, coupe Γ suivant trois génératrices. De même, le cône Γ', ayant pour sommet le deuxième point double O' et pour directrice C, est du troisième ordre.

L'équation du cône Γ s'obtient immédiatement en remplaçant, dans l'équation (S_3), y par $\frac{2px}{y}$; d'où

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} 2x[(x-ay)^2+(z-by)^2] \\ \quad +y(z-by)[b(x-ay)-a(z-by)] = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} x - 2a^2p &= X, \\ y - 2ap &= Y, \\ z - 2abp &= Z, \end{aligned}$$

les équations (1) s'écrivent

$$(1)' \quad \begin{cases} (Y+2ap)(1+\lambda^2) - p\lambda(b+a\lambda) = 0, \\ Z - bY + \lambda(X - aY) = 0, \\ (Y+2ap)^2 - 2p(X+2a^2p) = 0. \end{cases}$$

En faisant une combinaison linéaire et homogène en X, Y avec la première et la troisième de ces équations, puis, remplaçant, dans l'équation obtenue, λ par sa valeur tirée de la deuxième, on obtient l'équation du cône Γ', savoir :

$$(\Gamma') \quad \begin{cases} 2(X-aY)[(X-aY)^2+(Z-bY)^2] \\ \quad +Y(Z-bY)[b(X-aY)-a(Z-bY)] = 0. \end{cases}$$

Les deux cônes Γ et Γ' admettent pour génératrice double la droite D.

2. Si l'on suppose $a = 1$, $b = 0$, les équations (C) deviennent

$$(\mathrm{C}') \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{p\lambda^4}{2(1+\lambda^2)^2}, \\ y &= \frac{p\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{2p\lambda^2(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)^2}, \\ z &= \frac{p\lambda^3(2+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)^2}. \end{aligned} \right.$$

Elles définissent une courbe C′ de cinquième ordre et unicursale. Les valeurs du paramètre λ correspondant aux points d'intersection de C′ avec un plan quelconque

$$ux + vy + wz + h = 0$$

sont les racines de l'équation du cinquième degré

$$pu\lambda^4 + 2pv\lambda^2(1+\lambda^2) + pw\lambda^3(2+\lambda^2) + 2h(1+\lambda^2)^2 = 0$$

ou

$$\begin{aligned} pw\lambda^5 &+ (pu + 2pv + 2h)\lambda^4 \\ &+ 2pw\lambda^3 + (2pv + 4h)\lambda^2 + 2h = 0. \end{aligned}$$

En désignant les racines par λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 et posant

$$S_1 = \Sigma\lambda_1, \qquad S_2 = \Sigma\lambda_1\lambda_2, \qquad \ldots,$$

on a les relations

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &S_1 pw + pu + 2pv + 2h = 0, \\ &S_2 pw - 2pw \qquad\quad = 0, \\ &S_3 pw + 2pv + 4h \quad\; = 0, \\ &S_4 pw \qquad\qquad\qquad = 0, \\ &S_5 pw + 2h \qquad\quad\;\; = 0. \end{aligned} \right.$$

La deuxième et la quatrième de ces relations, savoir

$$\begin{aligned} pw(S_2 - 2) &= 0, \\ pw S_4 \quad &= 0, \end{aligned}$$

équivalent, en supposant $w \neq 0$, aux relations

$$\begin{aligned} S_2 - 2 &= 0, \\ S_4 \quad &= 0; \end{aligned}$$

ce sont les relations demandées, le plan (u, v, w, h) étant quelconque.

Si $w = 0$, le plan donné est parallèle à Oz et les valeurs de λ correspondant aux points d'intersection de ce plan avec C' sont racines de l'équation bicarrée

$$(pu + 2pv + 2h)\lambda^4 + 2(pv + 2h)\lambda^2 + 2h = 0,$$

et les valeurs de λ sont deux à deux égales et de signes contraires.

Les relations

$$\begin{aligned} S_2 - 2 &= 0, \\ S_4 \quad &= 0 \end{aligned}$$

peuvent s'écrire

$$\begin{gathered} \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1(\lambda_4 + \lambda_5) \\ + \lambda_2(\lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_3(\lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_4\lambda_5 - 2 = 0, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_5 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4\lambda_5 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_5 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 = 0. \end{gathered}$$

Si le plan sécant est osculateur à C' en un point de paramètre λ, on aura

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda,$$

et les relations deviennent

$$\begin{gathered} 3\lambda^2 + 3\lambda(\lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_4\lambda_5 - 2 = 0, \\ \lambda^3(\lambda_4 + \lambda_5) + 3\lambda^2\lambda_4\lambda_5 = 0 \end{gathered}$$

ou

$$\begin{gathered} 3\lambda(\lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_4\lambda_5 + 3\lambda^2 - 2 = 0, \\ \lambda(\lambda_4 + \lambda_5) + 3\lambda_4\lambda_5 = 0. \end{gathered}$$

De ces équations linéaires en $\lambda_4 + \lambda_5$ et $\lambda_4\lambda_5$, on déduit

$$\lambda_4 + \lambda_5 = \frac{3(2 - 3\lambda^2)}{8\lambda},$$
$$\lambda_4 \lambda_5 = \frac{3\lambda^2 - 2}{8}.$$

Les valeurs λ_4, λ_5 correspondant aux points de rencontre d'un plan osculateur λ avec la courbe C' sont donc racines de l'équation

$$u^2 + \frac{3(3\lambda^2 - 2)}{8\lambda} u + \frac{3\lambda^2 - 2}{8} = 0.$$

Elles sont réelles si

$$\frac{9(3\lambda^2 - 2)^2}{64\lambda^2} - \frac{4(3\lambda^2 - 2)}{8} \geqq 0$$

ou

$$(3\lambda^2 - 2)[9(3\lambda^2 - 2) - 32\lambda^2] \geqq 0,$$
$$(3\lambda^2 - 2)(-5\lambda^2 - 18) \geqq 0,$$

ou

$$3\lambda^2 - 2 \leqq 0,$$

c'est-à-dire

$$-\sqrt{\frac{2}{3}} \leqq \lambda \leqq +\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

3. Soient λ le paramètre du point de contact A, μ celui du deuxième point de contact B et λ_5 celui du troisième point de rencontre E d'un plan bitangent à C' avec la courbe C'. On aura

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$$
$$\lambda_3 = \lambda_4 = \mu,$$

et les relations trouvées précédemment deviennent

$$\lambda^2 + \mu^2 + 4\lambda\mu + 2\lambda_5(\lambda + \mu) - 2 = 0,$$
$$\lambda\mu[\lambda\mu + 2\lambda_5(\lambda + \mu)] = 0.$$

La solution

$$\mu = 0, \qquad \lambda_5 = \frac{2 - \lambda^2}{2\lambda}$$

donne le plan mené par la tangente en A à C′ et le point double O; cette solution est singulière. Restent les solutions définies par les relations

$$\lambda^2 + \mu^2 + 4\lambda\mu + 2\lambda_5(\lambda + \mu) - 2 = 0,$$
$$\lambda\mu + 2\lambda_5(\lambda + \mu) = 0.$$

En éliminant λ_5 on a l'équation en μ

$$\mu^2 + 3\lambda\mu + \lambda^2 - 2 = 0,$$

qui a toujours ses racines réelles, car on a

$$9\lambda^2 - 4(\lambda^2 - 2) = 5\lambda^2 + 8 > 0.$$

Il faut maintenant examiner le cas où le plan mené par la tangente en A à C′ est parallèle à Oz, c'est-à-dire où $w = 0$. Ce plan sera bitangent à C′ si l'équation bicarrée

$$(pu + 2pv + 2h)\lambda^4 + 2(pv + 2h)\lambda^2 + 2h = 0,$$

donnant les λ des points de rencontre de ce plan avec C′, a deux racines doubles, ce qui exige

$$(pv + 2h)^2 - 2h(pu + 2pv + 2h) = 0$$

ou

$$pv^2 - 2hu = 0,$$

équation qui exprime que le plan $(u, v, 0, h)$, bitangent à C′, est tangent au cylindre parabolique.

Ce résultat s'apercevait sur les équations (1), car, y étant donné, il lui correspond deux valeurs de λ et, par suite, deux points de C situés sur la génératrice du cylindre parabolique définie par cette valeur de y; en ces deux points, le plan tangent au cylindre le long de cette génératrice est tangent à C. La même propriété existe pour la courbe C′.

Les plans bitangents à C′ forment donc deux familles;

l'une se compose des plans tangents au cylindre et l'autre famille est telle que, par toute tangente à C', il passe deux de ces plans; d'ailleurs les plans de la seconde famille enveloppent une surface développable, car leurs coordonnées (u, v, w, h) sont liées par deux relations qu'on obtiendrait en éliminant λ, μ et λ_5 entre les cinq équations (2). Cette surface développable a pour directrices la courbe C' et une surface qui sera du second ordre, puisque par toute droite tangente à C' on peut mener deux plans tangents à cette surface.

On peut trouver l'équation tangentielle de cette quadrique de la manière suivante.

Dans le cas actuel les équations (2) deviennent

$$\begin{gathered}
[2(\lambda+\mu)+\lambda_5]pw+pu+2pv+2h=0,\\
[\lambda_5(\lambda^2+\mu^2+4\lambda\mu)+2\lambda\mu(\lambda+\mu)]pw+2pv+4h=0,\\
\lambda^2\mu^2\lambda_5 pw+2h=0,\\
\lambda^2+\mu^2+4\lambda\mu+2\lambda_5(\lambda+\mu)-2=0,\\
[\lambda\mu+2\lambda_5(\lambda+\mu)]\lambda\mu=0.
\end{gathered}$$

En éliminant λ_5 entre ces équations on obtient

$$\begin{gathered}
(\lambda+\mu)^2+\lambda\mu-2=0,\\
[4(\lambda+\mu)^2-\lambda\mu]pw+2(pu+2pv+2h)(\lambda+\mu)=0,\\
[-\lambda\mu(\lambda\mu+2)+4\lambda\mu(\lambda+\mu)^2]pw+2(2pv+4h)(\lambda+\mu)=0,\\
-\lambda^3\mu^3pw+4h(\lambda+\mu)=0.
\end{gathered}$$

En remplaçant $(\lambda+\mu)^2$ par $2-\lambda\mu$ et en résolvant les trois dernières équations par rapport à u, v, w, on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{u}{2\lambda^3\mu^3-10\lambda^2\mu^2+22\lambda\mu-16}\\
&\quad=\frac{v}{-2\lambda^3\mu^3+5\lambda^2\mu^2-6\lambda\mu}=\frac{w}{4(\lambda+\mu)}=\frac{h}{p\lambda^4\mu^3},
\end{aligned}$$

de sorte que, en posant

$$\lambda\mu=\alpha,$$

on peut prendre pour nouvelles coordonnées homogènes d'un plan bitangent à C′, de la deuxième famille, les quantités (u, v, w, h) définies par

$$\begin{aligned} h &= p\alpha^3, \\ u &= 2\alpha^3 - 10\alpha^2 + 22\alpha - 16, \\ v &= -2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 6\alpha, \\ w^2 &= 16(2-\alpha). \end{aligned}$$

On a ainsi une représentation paramétrique de la surface développable engendrée par les plans bitangents à C′ de la seconde famille. D'ailleurs sur les équations (C′) on voit que la courbe C′ est symétrique par rapport au plan $z=0$; par suite si (u, v, w, h) est une solution de l'équation de la quadrique cherchée, $(u, v, -w, h)$ en est une autre; l'équation de cette quadrique ne contiendra pas de termes en w. Donc, si l'on considère les équations

$$\begin{aligned} h^2 &= p^2\alpha^6, \\ u^2 &= (2\alpha^3 - 10\alpha^2 + 22\alpha - 16)^2, \\ v^2 &= (-2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 6\alpha)^2, \\ w^2 &= 16(2-\alpha), \\ uh &= p\alpha^3(2\alpha^3 - 10\alpha^2 + 22\alpha - 16), \\ vh &= p\alpha^3(-2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 6\alpha), \\ uv &= (2\alpha^3 - 10\alpha^2 + 22\alpha - 16)(-2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 6\alpha), \end{aligned}$$

on doit pouvoir déterminer les multiplicateurs m_1, $m_2, \ldots, m_6$ de façon à obtenir, quel que soit α, l'équation

$$\frac{h^2}{p^2} + m_1 u^2 + m_2 v^2 + m_3 w^2 + m_4 u\frac{h}{p} + m_5 v\frac{h}{p} + m_6 uv = 0.$$

En annulant les coefficients de $\alpha^6, \alpha^5, \ldots, \alpha$ dans le second membre de la combinaison linéaire à établir, on obtient six équations linéaires pour déterminer les multiplicateurs. On trouve ainsi par un calcul facile mais assez long

$$m_1 = \frac{1}{7}, \qquad m_2 = \frac{13}{7}, \qquad m_3 = -\frac{8}{7},$$

$$m_4 = -\frac{9}{14}, \qquad m_5 = \frac{15}{7}, \qquad m_6 = \frac{6}{7}.$$

Il faut ensuite vérifier que le terme indépendant de α dans la combinaison linéaire est nul, c'est-à-dire il faut vérifier l'égalité

$$16^2 m_1 + 32 m_3 = 0$$

ou

$$16^2 - 32 \times 8 = 0,$$

ce qui est.

L'équation tangentielle de la quadrique demandée est

$$u^2 + 13 v^2 - 8 w^2 + 6 uv + \frac{h}{p}\left(-\frac{9}{7}u + 15 v\right) + \frac{h^2}{p^2} = 0;$$

elle représente une surface à centre unique qui est un hyperboloïde à deux nappes, car l'équation s'écrit

$$\left[\frac{h}{p} + \frac{1}{2}\left(-\frac{9}{7}u + 15 v\right)\right]^2$$
$$-\frac{1}{4}\left(-\frac{9}{7}u + 15 v\right)^2 + u^2 + 13 v^2 - 8 w^2 + 6 uv = 0$$

ou

$$\left[\frac{h}{p} + \frac{1}{2}\left(-\frac{9}{7}u + 15 v\right)\right]^2 + \frac{115}{14^2}u^2 + \frac{219}{14}uv - \frac{173}{4}v^2 - 8 w^2 = 0,$$

équation de la forme

$$A^2 + B^2 - k^2 v^2 - 8 w^2 = 0,$$

B désignant une fonction linéaire en u et v, et k un coefficient numérique.