

GEORGES LERY

**Sur les complexes en involution et sur
la surface de Kummer**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 49-68

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__49_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[N¹1c, M²4k]

**SUR LES COMPLEXES EN INVOLUTION ET SUR LA SURFACE
DE KUMMER (1);**

PAR M. GEORGES LERY.

On considère deux complexes linéaires en involution A et B.

1° *Soit Q une quadrique dont chaque système de génératrices appartient à l'un de ces complexes. Par les points communs à trois d'entre elles il en passe généralement une simple infinité d'autres : on dira qu'elles forment un SYSTÈME de quadriques Q.*

A tout système de quadriques Q en correspond un autre, tel que toute quadrique de l'un de ces systèmes touche toute quadrique de l'autre.

2° *L'enveloppe commune des quadriques de ces deux systèmes est une surface de Kummer.*

3° *Toute surface de Kummer est susceptible de cette double génération. Chercher de combien de manières.*

(1) Mémoire ayant obtenu le prix au Concours des *Nouvelles Annales* en 1903.

4° *Propriétés corrélatives.*

5° *On considère toutes les surfaces de Kummer, Σ , conjuguées aux deux complexes linéaires en involution A et B. Il n'y en a généralement qu'une qui touche neuf droites de l'un de ces complexes.*

6° *Toutes celles qui touchent huit droites du complexe A, par exemple, en touchent généralement une infinité d'autres, formant une surface du huitième ordre.*

7° *Celles qui touchent sept droites du complexe A touchent, outre les conjuguées de ces sept droites par rapport à B, un huitième couple de droites appartenant à A et conjuguées par rapport à B.*

8° *Les droites bitangentes à une surface Σ et communes aux complexes A et B engendrent deux surfaces distinctes du quatrième ordre, circonscrites à Σ le long des lignes asymptotiques particulières, (α) et (β) , qui appartiennent respectivement aux complexes A et B.*

9° *La courbe (α) , par exemple, est généralement définie par huit de ses points; mais sept d'entre eux en déterminent neuf autres.*

10° *Il existe une famille de surfaces Σ admettant la même ligne asymptotique (α) . Les quatre complexes linéaires, en involution deux à deux, ainsi qu'avec A et P, auxquels chacune de ces surfaces est conjuguée, sont fixes.*

11° *Il n'existe qu'une surface de cette famille tangente à une génératrice de B. Il en existe trois bitangentes à une droite du complexe A, et les trois couples de points de contact forment deux à deux des divisions harmoniques.*

12° *Les génératrices de A, qui touchent à la fois deux surfaces de la famille en question, les touchent suivant des lignes asymptotiques.*

I.

1. *Complexes en involution.* — Je rappelle d'abord quelques propriétés des complexes linéaires en involution.

Un complexe linéaire B définit une corrélation entre les points et les plans de l'espace; à une droite a correspond sa conjuguée a' ; si a appartient à un complexe linéaire A, a' fait partie d'un complexe A'; lorsque A est en involution avec B, il se confond avec A'.

Une droite a du complexe A, passant par un point m , se trouve dans le plan du complexe relatif à m , plan que je désigne par mA ; si elle tourne autour de m , sa conjuguée a' par rapport à B décrira un faisceau projectif autour du pôle m' de mA , dans le plan polaire de m , qui est évidemment $m'A$.

Les droites qui rencontrent a et a' font partie de B, car, si m est un point de a , le plan mB contient a' .

Soit une quadrique Q dont les deux systèmes de génératrices appartiennent respectivement à A et B. Soit a une droite du premier système; sa conjuguée a' se trouve aussi sur Q, car cette quadrique se transforme en elle-même si l'on fait une corrélation par rapport à B, puisque les génératrices du second système ne sont pas changées.

Toutes les propriétés précédentes restent exactes si l'on fait jouer à A le rôle de B, et réciproquement.

Génération d'une quadrique Q. — Soient a, a' deux droites de A, a' la conjuguée de a par rapport à B. Les droites qui coupent a, a' et a engendrent une quadrique Q : 1° elles font partie de B, puisqu'elles rencontrent a et a' ; 2° les directrices font partie de A, car

si trois droites d'une série réglée (ici a , a' et α) appartiennent à un complexe linéaire A , toutes lui appartiennent.

2. *Le système (Q).* — Je suppose que a et α décrivent respectivement des faisceaux plans projectifs mA et nA ; a' décrit aussi un faisceau $m'A$ projectif au premier. A chaque position de a correspond, d'après 2^o, une quadrique Q ; on a ainsi une famille de quadriques Q à un paramètre.

Ces quadriques passent par huit points fixes; on en a tout de suite quatre : m , n et les deux pôles par rapport à B des plans mA et nA , soient m' et n' ; en second lieu les génératrices qui font partie de B et passent en l'un de ces quatre points y décrivent un faisceau plan; leurs conjuguées par rapport à A (qui se trouvent aussi sur les quadriques) décrivent le faisceau plan conjugué; on a ainsi quatre nouveaux points communs aux quadriques Q .

Remarque. — Un système (Q) est défini par trois quadriques Q_1 , Q_2 , Q_3 . Les génératrices du système A de ces quadriques qui passent en deux des huit points communs, m et n , définissent respectivement deux faisceaux plans projectifs, mA et nA , au moyen desquels on peut construire un système (Q) comprenant Q_1 , Q_2 et Q_3 .

3. *Génératrices des quadriques Q.* — Celles qui appartiennent à A forment une congruence (A) dont je vais chercher l'ordre et la classe.

Les droites de cette congruence issues d'un point p doivent se trouver dans le plan pA et sur le cône lieu des droites passant par p et rencontrant deux droites

correspondantes, a et α , des faisceaux plans générateurs. Ce cône est évidemment du second ordre; il y a donc deux droites de la congruence issues de p . On verrait aussi facilement qu'il y en a deux dans un plan. (A) est donc une congruence (2, 2). Le raisonnement précédent montre qu'elle appartient au complexe des droites rencontrant deux génératrices correspondantes de deux faisceaux plans homographiques; c'est, on le démontre sans peine, un complexe tétraédral.

La congruence (B) des génératrices du second système possède des propriétés analogues.

A toute droite de (A) correspond une droite du faisceau mA , qui la coupe; donc, une quadrique Q qui la contient. Il y a donc deux quadriques Q qui passent par un point p , ou qui touchent un plan.

4. *Le système (Q').* — Soit b_0 une droite de (B); elle est sur une quadrique Q_0 . Par un point de b_0 passent deux droites de (A): l'une est la génératrice a_1 de Q_0 qui passe par le point; soit a_2 l'autre; toutes deux rencontrent la conjuguée b'_0 de b_0 par rapport à A. Si le point décrit b_0 , la droite a_2 donnera sur b'_0 une division homographique, et par suite décrira une quadrique Q'_0 .

Q'_0 est quadritangente à toute quadrique Q ; en effet, b_0 rencontre Q en deux points, par chacun desquels passent deux génératrices a_1 et a_2 ; l'une est sur Q_0 , l'autre sur Q , et en même temps sur Q'_0 , d'après le mode de génération de celle-ci. Donc Q et Q'_0 ont en commun deux génératrices du premier système, et par suite deux du second; comme ce second système fait partie de B, quelle que soit Q , on voit que toutes les génératrices du second système de Q'_0 appartiennent à B.

Si b_0 décrit Q_0 , on obtient une famille à un para-

mètre de quadriques Q' . Trois d'entre elles déterminent un système (Q') , dont les génératrices forment deux congruences (A') et (B') . (A') et (A) ont en commun toutes les génératrices de l'un des systèmes des trois quadriques de base; elles sont donc identiques. De même (B) et (B') .

Ainsi la congruence (A) a ses droites distribuées de deux façons différentes sur des systèmes de quadriques.

II.

5. *Enveloppe.* — Si les surfaces d'une famille à un paramètre touchent une surface Q' , leur enveloppe est circonscrite à Q' . On voit ainsi que les systèmes (Q) et (Q') ont même enveloppe.

Cette enveloppe est le lieu des points par lesquels passent deux quadriques Q confondues. Combien y a-t-il de tels points sur une droite δ ? Par un point de δ passent deux quadriques Q , qui coupent δ en deux autres points; on a ainsi sur δ une correspondance $(2,2)$ (involutive), qui possède quatre points doubles. L'enveloppe est une surface Σ du quatrième ordre.

Chacun des points de base du système Q est un point multiple de Σ ; en l'un de ces points, m , le cône des tangentes de Σ est l'enveloppe des plans tangents des quadriques Q ; or, ces plans, donnant sur mA et mB les droites correspondantes de deux faisceaux projectifs, enveloppent un cône du second ordre.

Le système (Q') , qui a même enveloppe, donne pour Σ huit autres points coniques. *L'enveloppe cherchée, qui est du quatrième ordre et a seize points doubles, est une surface de Kummer.*

C'est la surface focale des congruences (A) et (B) ; en effet, par tout point p de l'enveloppe passent deux

quadriques Q confondues, donc deux droites de (A) confondues : p est sur la surface focale de (A) ; réciproquement, tout point de cette surface appartient à Σ .

6. *Génération d'une surface de Kummer.* — On sait depuis longtemps qu'étant donnée une surface du quatrième ordre à seize points doubles, on peut séparer ces points de quinze façons différentes, en deux groupes de huit, les points d'un même groupe étant les points de base d'un système de quadriques inscrites à la surface. On a donc quinze couples de systèmes de quadriques ayant même enveloppe; deux quadriques, appartenant respectivement aux deux systèmes d'un couple, sont tangentes; enfin leurs génératrices font partie de deux des six complexes linéaires conjugués à la surface.

Toute surface de Kummer est donc susceptible, de quinze manières, de la génération indiquée.

7. *Faits corrélatifs.* — Si l'on fait une corrélation par rapport au complexe A , les quadriques Q , de même que les quadriques Q' , se transforment chacune en elle-même. Les quadriques Q touchent donc huit plans, qui sont les plans polaires des huit points de base. Leur enveloppe Σ admet chacun d'eux comme plan tangent singulier, la courbe de contact étant une conique, polaire réciproque du cône des tangentes au point singulier correspondant. Σ possède donc seize plans singuliers et est de quatrième classe, puisqu'elle se transforme en elle-même.

Je considère un point p de la surface Σ ; par p passent une quadrique Q et une quadrique Q' , sur lesquelles se trouvent les droites a et b , issues de p et appartenant respectivement aux congruences (A) et (B) . Dans la corrélation par rapport à A , a se transforme en elle-même,

b se change en sa conjuguée b' , qui se trouve aussi sur Q et Q' , comme nous le savons, fait partie de (B) et est bitangente à la surface focale Σ . Le plan tangent à Σ en p est le plan des deux tangentes a et b ; il a pour pôle dans la corrélation le point p' où a est coupée par b' ; inversement p a pour plan polaire le plan ab' . Ainsi, un point de Σ et le plan tangent en ce point ont bien pour transformés un autre point et son plan tangent. En prenant les polaires réciproques par rapport à B , a devient a' , b et b' sont conservées, p et p' donnent les plans tangents aux points p_1 et p'_1 de rencontre de a' avec b et b' . On reconnaît ainsi l'existence de quadrilatères gauches dont les sommets sont des points de Σ , dont les plans sont tangents en ces sommets, et dont les arêtes sont bitangentes à Σ , les points de contact étant les sommets; il y a ∞^2 tels quadrilatères: chaque point p en détermine un.

III.

8. Pour étudier les questions suivantes, il sera utile de considérer les groupes de trois complexes dont les droites communes sont les génératrices d'un même système d'une quadrique Q ou d'une quadrique Q' . On sait que tout complexe qui contient les génératrices d'un système est en involution avec tout complexe contenant les droites du deuxième système.

Soit un ensemble linéaire et homogène de complexes à n paramètres; les complexes en involution avec ceux-ci forment un ensemble analogue à $6 - n$ paramètres.

Soit $n = 2$; tous les complexes conjugués, à A et B , par exemple, forment un réseau R , dont on peut supposer, sans restreindre la généralité, que les complexes de base R_1, R_2, R_3, R_4 sont deux à deux en involution;

A, B et R; forment alors un groupe de six complexes de Klein.

Soit $n = 3$; à une gerbe de complexes correspond une autre gerbe; elles définissent chacune une série réglée; les droites des deux séries sont les génératrices des deux systèmes d'une quadrique. Ainsi, soient C et C' deux complexes du réseau R; A, C et C' ont en commun les génératrices d'un système d'une quadrique dont le second système appartient à B, puisque B est en involution avec A, C et C'.

9. *Représentation des complexes du réseau R.* — Ces complexes dépendent de quatre paramètres homogènes qu'on peut regarder comme les coordonnées tétraédriques d'un plan dans un espace E'.

Une série réglée Q du premier espace E, intersection des complexes A, C et C', a pour image dans E' la droite q , intersection des plans représentatifs de C et C'.

Une droite a , du complexe A, peut être considérée comme l'intersection de A avec trois complexes de R; elle a pour image le point commun aux plans représentant les trois complexes. Il faut remarquer que ces trois complexes et A sont transformés respectivement en eux-mêmes dans la corrélation par rapport à B; ils contiennent donc la conjuguée a' de a ; a et a' sont leurs deux droites communes.

Deux séries réglées Q et Q', ayant en commun deux droites a et a' sont représentées par deux rayons q et q' se coupant au point-image de a et a' .

Transformation inverse. — A un plan de E' correspond dans E un complexe de R, qui, coupé par A, donne une congruence; à une droite q correspond un faisceau de R qui, avec A, définit une série réglée Q; enfin un

point est l'image d'une série réglée dont la section par A se compose de deux droites a et a' , qui sont bien conjuguées par rapport à B , car les complexes qui les déterminent sont en involution avec B . *À deux droites sécantes correspondent deux quadriques ayant deux génératrices communes du système A , conjuguées par rapport à B .*

D'après cela, le système (Q) a pour image une série de droites q , rencontrant les images q'_1, q'_2, q'_3 de trois quadriques du système (Q') . Donc, *les q forment un système de génératrices d'une quadrique σ , et les q' le second système.* La quadrique σ est l'image de (A) : à chacun de ses points correspondent deux droites a et a' de cette congruence, bitangentes à Σ .

IV.

10. Neuf droites de A ont pour images neuf points, par lesquels passe en général une seule quadrique σ , image d'une congruence (A) , dont j'appelle Σ la surface focale. Σ est bitangente aux neuf droites [et à leurs conjuguées par rapport à B , qui font partie aussi de (A)]. (*Cinquième question.*)

Huit droites de A ont pour images huit points de E' , par lesquels passe un faisceau de quadriques σ , ayant en commun une biquadratique gauche. On a alors dans E une famille à un paramètre de surfaces Σ , bitangentes aux droites a dont les images sont les points de la biquadratique.

Ces droites, qui dépendent d'un paramètre, forment une surface réglée dont nous allons chercher l'ordre. Halphen a démontré qu'une surface réglée d'ordre m et un complexe d'ordre n ont en commun mn droites. Or un plan coupe la biquadratique en quatre points, à cha-

cun desquels correspondent deux droites; donc le complexe de R qui a pour image ce plan contient huit droites de la surface réglée : comme $m = 1$, $n = 8$. (*Sixième question.*)

Enfin les quadriques σ qui passent par sept points ont un huitième point fixe. Donc, étant données sept droites de A , les surfaces Σ , conjuguées à A et B , qui leur sont bitangentes, touchent aussi deux fois les sept conjuguées de ces droites par rapport à B , et les deux droites d'un huitième couple. (*Septième question.*)

V.

11. Les droites de la congruence (A) qui appartiennent à B forment une surface réglée, dont l'ordre s'obtient en appliquant une formule d'Halphen : un complexe d'ordre m et une congruence d'ordre n , de classe n' , ont en commun une surface d'ordre $m(n + n')$; ici $m = 1$, $n = n' = 2$. On peut aussi faire un raisonnement direct : sur chaque quadrique Q , les droites a et a' sont en involution, et cette involution a deux droites doubles; ces droites doubles, confondues avec leurs conjuguées par rapport à B , font partie de B . Ceci posé, une droite b_0 rencontre quatre de ces droites, car par b_0 passent deux quadriques Q_0 et Q'_0 , sur chacune desquelles se trouvent deux droites doubles. La surface réglée, coupée par b_0 en quatre points, est du quatrième ordre.

Les droites de (B) qui sont dans A forment aussi une surface réglée d'ordre 4.

En un point p de Σ , le plan tangent est déterminé par les droites a et b , des congruences (A) et (B), qui passent en p . Si a appartient à B , le plan tangent contient deux droites de B : c'est pB . La courbe de contact

de la surface réglée formée des droites telles que a a donc pour tangente en p une droite du complexe B; p est un point quelconque de cette courbe. Or, si les tangentes d'une courbe appartiennent à un complexe linéaire, le plan osculateur en tout point est le plan du complexe. Donc en p le plan osculateur est pB , c'est-à-dire le plan tangent de Σ ; donc la courbe de contact est une asymptotique de Σ . Je l'appelle (β) .

Les droites de (B) qui sont dans A forment une surface réglée $[\alpha]$ circonscrite à Σ le long d'une courbe (α) , asymptotique de Σ et dont les tangentes appartiennent à A.

12. La surface réglée $[\alpha]$, du quatrième ordre, a deux droites doubles : les deux directrices de la congruence (A, B); car toute droite de B, qui rencontre l'une, rencontre l'autre et appartient à la congruence; or, par un point de l'une passent deux droites de (B) : elles font partie de A, donc sont sur $[\alpha]$.

La courbe (α) est tracée sur $[\alpha]$; c'en est une asymptotique, car son plan osculateur, tangent à Σ , est tangent à $[\alpha]$. Elle est rencontrée en deux points par toute génératrice de $[\alpha]$; on voit sans peine que ces points sont conjugués harmoniques par rapport au segment déterminé sur la génératrice par les directrices de la congruence (A, B).

Si l'on se donne un point de (α) , la droite de $[\alpha]$ issue de ce point est bien déterminée : elle appartient à (A, B); son second point de rencontre avec (α) est défini, d'après la remarque précédente.

13. Nous avons vu qu'une droite a , de A, et sa conjuguée a' , par rapport à B, ont pour image un point de E'. Quelle est l'image d'une droite b de B?

. La droite b et sa conjuguée b' par rapport à A peuvent être considérées comme les directrices d'une congruence, intersection de A et d'un certain complexe C du réseau R ; car il suffit que C appartienne à la fois au réseau R , et au faisceau défini par A et le complexe spécial dont b est l'axe. Le second complexe spécial du faisceau (A, C) est b' . Inversement, A et un complexe C de R déterminent une congruence dont les deux directrices appartiennent à B , qui est en involution avec A et C , et sont conjuguées par rapport à A , car une corrélation par rapport à A change la congruence en elle-même. D'après cela, b et b' correspondent à un plan de l'espace E' , le plan qui est l'image de C .

Deux droites de E' , q et q' , qui se rencontrent, représentent une quadrique Q et une quadrique Q' ; leur point commun est l'image des génératrices a et a' communes aux deux quadriques; leur plan correspond aux génératrices b et b' suivant lesquelles se coupent encore Q et Q' .

14. Si b coïncide avec sa conjuguée b' , c'est-à-dire si b appartient à A , le plan correspondant satisfait à une condition, donc touche une surface ω ; on peut mener à ω deux plans tangents par toute droite q , car il y a deux droites $b \equiv b'$ sur la série réglée Q . Donc ω est une quadrique. Comme les deux directrices de la congruence (A, C) sont confondues et que C est en involution avec A , C doit être un complexe spécial; la réciproque est vraie; donc ω est l'enveloppe des plans-images des complexes de R spéciaux.

Dans E' , entre un plan c , qui représente un complexe C de R , et le point γ , image de la gerbe de R en involution avec C , il y a évidemment une corrélation. Pour que C soit spécial, il faut et il suffit qu'il appar-

tienne à la gerbe avec laquelle il est en involution. Alors c doit contenir γ ; la quadrique de base de la corrélation est donc l'enveloppe des plans c représentant les complexes spéciaux de R : c'est ω . Par suite, un plan et son pôle par rapport à ω sont les images d'un complexe de R , et de la gerbe des complexes de R en involution avec lui.

15. Ceci posé, la surface $[\alpha]$, lieu de droites $b \equiv b'$, qui sont bitangentes à Σ , est représentée dans E' par une suite de plans, tangents à ω et à l'image σ de Σ : ce sont les plans de la développable (ω, σ) .

Donner huit points de (α) , c'est, comme on l'a vu, donner huit droites de $[\alpha]$, ou huit plans de la développable (ω, σ) ; celle-ci est déterminée, par suite la surface $[\alpha]$.

Quant à la courbe (α) , c'est sur $[\alpha]$ le lieu des points pour lesquels le plan tangent est le plan du complexe A. Elle est bien déterminée, et l'on voit que huit points la définissent.

Donner sept points de (α) , c'est donner sept génératrices b de $[\alpha]$, et sept plans tangents de la développable (ω, σ) ; celle-ci a un huitième plan bien déterminé.

Les surfaces $[\alpha]$ qui contiennent sept droites b en contiennent donc une huitième.

Il y a plus : je dis que la surface $[\alpha]$ est définie par les sept points donnés et est unique. Cela tient à ce que l'on connaît en ces points les plans tangents, qui sont les plans du complexe A. Une surface du quatrième ordre à deux droites doubles est déterminée, si ces deux droites sont connues, par huit points, ou par sept points et une tangente en l'un d'eux, ou enfin par quatre points et, en chacun d'eux, une tangente différente de

la génératrice. En outre, nous savons que, si la surface $[\alpha]$ est définie, la courbe (α) l'est. Donc :

La courbe (α) est déterminée en général par quatre de ses points.

VI.

16. Il existe un faisceau tangentiel de quadriques σ inscrites à une même développable (ω, σ_0) . Il y a donc une famille de surfaces Σ ayant la même ligne asymptotique (α) , et conjuguées aux complexes A et B. Elles ont même surface $[\alpha]$, à laquelle elles sont circonscrites le long de (α) .

Les faces du tétraèdre conjugué commun aux quadriques σ représentent quatre complexes du réseau R : C, C', C'' et C''', qui sont en involution avec A et B.

Ils sont en involution deux à deux, car le plan-image de C', par exemple, contient le pôle par rapport à ω , du plan-image de C; donc C' est en involution avec C (n° 14).

Chacune des surfaces Σ est conjuguée par rapport à l'un quelconque d'entre eux, soit C, c'est-à-dire se transforme en elle-même dans la corrélation que définit C. Nous allons le vérifier en cherchant quelle est la transformation de l'espace E' qui correspond à cette corrélation effectuée dans E; cette transformation faisant correspondre à tout point d'une quadrique σ du faisceau un autre point de σ , la corrélation par rapport à C transformera toute bitangente a de Σ en une autre bitangente.

17. J'appelle \ominus la corrélation par rapport à C, et \ominus' la transformation correspondante dans E'. \ominus transforme involutivement une droite de A en droite de A, et une

série réglée définie par A et deux complexes de R en une série analogue; si la droite ou la série réglée appartient à C, elle est conservée. Enfin tout complexe de R est changé en lui-même.

Par suite \mathcal{C}' transforme involutivement un point en point, une droite en droite : c'est une homographie; le plan-image de C est un plan double, dont chaque point est son propre correspondant, le pôle de ce plan par rapport à ω est un point double. On a donc affaire à une homologie dont les éléments singuliers sont le plan-image de C et son pôle par rapport à ω , le rapport d'homologie étant -1 , puisqu'elle est involutive.

Cette homologie \mathcal{C}' transforme σ en elle-même, car son point double est pôle de son plan double par rapport à σ . Donc la corrélation \mathcal{C} change Σ en elle-même.

Par conséquent les surfaces Σ de la famille sont conjuguées par rapport aux quatre complexes fixes C, C', C'' et C'''.

VII.

18. Il y a une quadrique σ du faisceau tangente à un plan (qui ne touche pas ω); il existe donc une surface Σ de la famille bitangente à une génératrice de B (qui n'appartient pas à A).

Il y a trois quadriques σ passant par un point; donc trois surfaces Σ sont bitangentes à une génératrice a de A. Les plans tangents des trois quadriques $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, en leur point commun, forment, comme l'on sait, un trièdre conjugué par rapport à toutes les quadriques du faisceau, en particulier par rapport à ω . Le plan tangent à σ_1 est l'image de deux bitangentes b_1, b'_1 à Σ_1 , qui coupent a aux deux points de contact de celle-ci; de même, le plan tangent à σ_2 représente deux droites $b_2,$

b'_2 qui rencontrent α en ses deux points de contact avec Σ_2 . Les deux plans tangents étant conjugués par rapport à ω , les complexes correspondants sont en involution; on en déduit que les deux couples b_1, b'_1 , et b_2, b'_2 font partie d'une même série réglée et sont conjugués harmoniques. Les points de contact de α avec Σ_1 et Σ_2 forment donc deux couples harmoniques.

19. Soit une droite l , du complexe A, *simplement* tangente à Σ en un point m ; par m passe une *bitangente* qui appartient à A; le plan tangent, déterminé par ces deux droites, est le plan du complexe A. Donc m est un point de (α) , et la droite l est tangente en m à toutes les surfaces Σ de la famille. Les droites l sont toutes les droites de A qui rencontrent (α) .

20. *Remarques.* — I. Si une droite a de A tourne autour d'un point p , sa conjuguée a' par rapport à B tourne autour d'un point p' ; les deux faisceaux plans ainsi définis constituent une quadrique sur laquelle les deux droites appartenant à B sont confondues en une seule : pp' . Dans E' , le rayon qui représente cette quadrique est tangent à ω , car ses points de rencontre avec ω sont confondus.

La réciproque est vraie.

Une quadrique σ a quatre génératrices de chaque système tangentes à ω ; par suite, dans le système (Q) qui définit une surface Σ , il y a quatre quadriques décomposées en couples de plans : elles fournissent huit plans et huit points singuliers : de même (Q') donne les autres éléments singuliers. Comme chaque quadrique Q est quadritangente à toute Q', on déduit facilement de ces remarques les relations des points et plans singuliers.

II. On peut se demander quelle est l'image, dans E' , de la seconde ligne asymptotique (β), ou plutôt de la surface réglée [β] circonscrite à Σ le long de (β). C'est la biquadratique gauche commune à ω et σ .

III. ω est l'image d'une surface de Kummer particulière : tous ses points et ses plans tangents sont singuliers. Ses bitangentes sont les droites de la congruence (A, B).

Notes. — I. Je me suis servi, dans ce qui précède, de propriétés des complexes en involution. Je vais indiquer pour ces propriétés une méthode de démonstration très simple; elle repose sur la notation de Grassmann.

Étant donné un certain nombre de segments $c_i c'_i$, les segments mn , tels que la somme algébrique des volumes des tétraèdres $mn c_i c'_i$ soit nulle, sont situés sur les droites d'un complexe C. On pose

$$C = \Sigma c_i c'_i,$$

et l'équation du complexe est

$$mnC = 0.$$

Tout complexe linéaire, on le démontre facilement, a une équation analogue. Le point m étant choisi, n se trouve dans le plan nC , qui est le plan du complexe en m .

Pour deux complexes A et B en involution, la somme des tétraèdres obtenus en développant le produit

$$\Sigma a_i a'_i \cdot \Sigma b_i b'_i$$

comme s'il était algébrique est nulle; on écrit

$$AB = 0.$$

Avec cette notation on étudie facilement les complexes en involution.

II. La correspondance entre l'espace E et l'espace F' s'introduit naturellement si l'on cherche une solution analytique de la question.

Je conserve la notation de Grassmann, qui condense beaucoup l'écriture.

Trois complexes A, C, C' définissent un système de génératrices d'une quadrique, dont l'équation s'obtient en écrivant que la droite de la congruence (C, C'), issue d'un point m, fait partie de A; cette droite est l'intersection des plans des deux complexes mC et mC' et se représente par mC . mC'.

La condition cherchée est

$$(1) \quad mC . mC' . A = 0.$$

C'est, sous forme symbolique, l'équation qu'on aurait en coordonnées cartésiennes ou tétraédrales, si l'on effectuait les opérations indiquées : chercher l'intersection des plans des complexes C et C', relatifs au point m; exprimer qu'elle appartient à A.

Pour que la quadrique considérée soit une quadrique Q, il faut que C et C' appartiennent au réseau R :

$$C = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3 + \alpha_4 R_4,$$

$$C' = \alpha'_1 R_1 + \dots$$

L'équation (1), développée, devient

$$Q \equiv \Sigma (\alpha_i \alpha'_k - \alpha_k \alpha'_i) m R_i . m R_k . A = 0.$$

Les coefficients des six quantités

$$m R_i . m R_k . A \quad (i \neq k)$$

satisfont à la relation

$$(\alpha_i \alpha'_k - \alpha_k \alpha'_i)(\alpha_l \alpha'_m - \alpha_m \alpha'_l) + \dots = 0;$$

on peut les considérer comme coordonnées de Plucker d'une droite q .

Ceci posé, pour que Q appartienne à une gerbe définie par trois quadriques, dont les équations sont

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0,$$

il faut que l'on ait

$$(2) \quad Q \equiv \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3,$$

ce qui entraîne

$$\dot{q} = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3.$$

Les λ ne peuvent être quelconques, puisque le complexe $\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3$ est spécial; ils sont liés par

$$(\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3)(\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3) = 0$$

ou

$$(3) \quad \Sigma q_2 q_3 \cdot \lambda_2 \lambda_3 = 0.$$

Le système Q est donc défini par l'équation

$$\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 = 0,$$

les paramètres étant liés par la condition (2).

Nous voyons ainsi que le système Q est un faisceau à un paramètre, qui entre au second degré dans l'équation; d'autre part, la représentation des quadriques du système par les droites q d'une série réglée :

$$q = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3$$

se présente naturellement.