LANCELOT

Surfaces algébriques : points singuliers

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 535-554

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__535_1>

[$M^2 1 b$]

SURFACES ALGÉBRIQUES : POINTS SINGULIERS;

PAR M. LANCELOT,

Professeur au lycée de Bastia (Corse).

Soit une surface algébrique S de degré m, représentée, en coordonnées cartésiennes, par l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

et un point $M(x, y, z)$ de cette surface.

Une droite D passant par ce point a pour équations

$$\frac{X - x}{u} = \frac{Y - y}{v} = \frac{Z - z}{w} = \lambda$$

ou

$$X = x + \lambda u, \qquad Y = y + \lambda v, \qquad Z = z + \lambda w,$$

et les λ des points où elle coupe la surface S sont les racines de l'équation

$$f(x + \lambda u, y + \lambda v, z + \lambda w) = 0.$$

Développons cette équation par la formule de Taylor. En coordonnées homogènes, les coordonnées courantes d'un point de la droite peuvent s'écrire, uv et w étant les paramètres directeurs de la droite D,

$$x+\lambda u,\quad y+\lambda v,\quad z+\lambda w,\quad t+\lambda.0.$$

D'où l'équation en λ,

$$f(x+\lambda u, y+\lambda v, z+\lambda w, t+\lambda.0)=0$$

ou

$$f(x,y,z,t)+\frac{\lambda}{1}(uf'_x+vf'_y+wf'_z+0.f'_t)+\ldots$$
$$+\frac{\lambda^p}{p!}(uf'_x+vf'_y+wf'_z+0.f'_t)_{(p)}+\ldots=0.$$

Revenons aux coordonnées cartésiennes

$$f(x,y,z)+\frac{\lambda}{1}(uf'_x+vf'_y+wf'_z)$$
$$+\frac{\lambda^2}{1.2}(uf'_x+vf'_y+wf'_z)_{(2)}+\ldots$$
$$+\frac{\lambda^p}{p!}(uf'_x+vf'_y+wf'_z)_{(p)}+\ldots=0.$$

Le point M étant sur la surface, $f(x,y,z)=0$; l'équation en λ a donc toujours au moins une racine nulle.

Points simples. — Supposons que les coordonnées du point M considéré sur la surface n'annulent pas les trois dérivées premières ; c'est-à-dire que l'on n'ait pas simultanément

$$f'_x=0,\qquad f'_y=0,\qquad f'_z=0.$$

Dans ce cas, pour une droite quelconque passant par ce point, le coefficient de λ

$$uf'_x+vf'_y+wf'_z$$

n'est pas nul. Une seule des racines de l'équation en λ est nulle et un seul des points d'intersection de la droite et de la surface se trouve situé en M. Le point M est dit *point simple* de la surface.

Si l'on prend pour u, v, w un système de solutions de l'équation linéaire

$$uf'_x + vf'_y + wf'_z = 0,$$

le coefficient de λ^2 est nul. Deux, au moins, des racines de l'équation en λ sont nulles, et deux des points d'intersection de la droite et de la surface sont confondus avec le point M. La droite est dite alors *tangente à la surface au point* M.

Il y a, en un point M, une infinité de tangentes, ayant pour paramètres directeurs les systèmes de l'équation linéaire homogène à trois inconnues

$$uf'_x + vf'_y + wf'_z = 0.$$

Pour avoir le lieu de ces droites, éliminons u, v, w entre cette équation et celles de la droite

$$\frac{X - x}{u} = \frac{Y - y}{v} = \frac{Z - z}{w}.$$

Il vient

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y + (Z - z)f'_z = 0.$$

Le lieu des tangentes à une surface en un point simple xyz est donc un plan, que l'on nomme *plan tangent en ce point.*

Théorème. — *La tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface et passant par* M, *ayant* M *pour point de contact, est tangente à la surface.*

Car, les coordonnées courantes d'une courbe tracée sur la surface étant exprimées en fonction d'un paramètre t, $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ satisfont, quel que soit t, à l'équation

$$(1) \qquad f(X, Y, Z) = 0.$$

La courbe passant par le point M, on aura, pour une valeur t_0 du paramètre,

$$X(t_0) = x, \qquad Y(t_0) = y, \qquad Z(t_0) = z,$$

et la tangente à la courbe en ce point est la droite

$$(D) \qquad \frac{X - x}{X'(t_0)} = \frac{Y - y}{Y'(t_0)} = \frac{Z - z}{Z'(t_0)}.$$

Mais, la fonction de t, $f(X, Y, Z)$, est identiquement nulle; il en est de même de sa dérivée; donc

$$f'_x X'_t + f'_y Y'_t + f'_z Z'_t = 0.$$

Les paramètres directeurs de la droite D satisfont donc à l'équation

$$u f'_x + v f'_y + w f'_z = 0,$$

obtenue en faisant $t = t_0$ dans la précédente.

La tangente en M à une courbe tracée sur la surface et passant par M est donc tangente à la surface.

Le plan tangent à une surface en un point simple M *est donc le lieu des tangentes en* M *aux courbes tracées sur la surface et passant par ce point.*

Tangentes osculatrices. Points ordinaires, paraboliques. — Soient u, v, w les paramètres directeurs d'une tangente. On a

$$(1) \qquad u f'_x + v f'_y + w f'_z = 0.$$

En général, ils n'annulent pas le coefficient de λ^2,

$$(u f'_x + v f'_y + w f'_z)_{(2)}$$

et la tangente coupe, en général, la surface en deux points seulement confondus en M.

Trois de ces points d'intersection avec la surface seront confondus en M si les trois quantités u, v, w satisfont de plus à l'équation

$$(2) \qquad (u f'_x + v f'_y + w f'_z)_{(2)} = 0$$

ou

$$u^2 f''_{x^2} + v^2 f''_{y^2} + w^2 f''_{z^2} + 2uv f''_{xy} + 2vw f''_{yz} + 2wu f''_{xy} = 0.$$

De telles tangentes sont dites *osculatrices. Elles coupent la surface en trois points au moins confondus avec le point* M.

On a, pour déterminer les paramètres directeurs des tangentes osculatrices, les deux équations (1) et (2) respectivement du premier et du second degré, et homogènes.

En général, ces équations ont deux systèmes de solutions. Le point M est dit alors *point ordinaire*, et il y a, en un point ordinaire, *deux tangentes osculatrices*.

Considérons u, v, w comme les coordonnées homogènes d'un point d'un plan : la détermination des tangentes osculatrices revient à celle des points d'intersection d'une conique et d'une droite. Pour déterminer les conditions de réalité, on forme l'équation tangentielle de la conique ; elle est

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} & u \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} & v \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

1° Les tangentes osculatrices sont donc imaginaires si l'on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} & f'_x \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} & f'_y \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} & f'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z & 0 \end{vmatrix} > 0.$$

La surface est dite alors *concave au point* M, ou le point M *point elliptique.*

2° Les tangentes osculatrices sont réelles si ce déterminant est négatif; la surface est dite *avoir des courbures opposées au point* M, ou le point M *point hyperbolique.*

3° *Les tangentes osculatrices sont confondues* si l'on a

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} & f'_x \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} & f'_y \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} & f'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Le point M est dit alors *point parabolique.*

Sur toute surface, il existe une courbe lieu de points paraboliques, déterminée par l'équation de la surface à laquelle on joint l'équation précédente. Cette courbe s'appelle *ligne parabolique.*

L'équation de la ligne parabolique peut être développée; elle s'écrit alors

$$(f''_{y^2}f''_{z^2} - f''^2_{yz})f'^2_x + \ldots + 2(f''_{y^2}f''_{z^2} - f''_{zx}f''_{zy})f'_x f'_y + \ldots = 0.$$

Soit m, le degré de la surface S. Cette seconde équation représente une surface Σ, dont le degré est

$$2(m-2) + 2(m-1) = 2(2m-3),$$

et par suite la ligne parabolique, qui est l'intersection des surfaces S et Σ, est de degré (*en général*)

$$2m(2m-3).$$

La ligne parabolique sépare, sur une surface, les points elliptiques de points hyperboliques.

Exemples. — Soit une quadrique à centre

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \qquad (A > B > C).$$

On a

$$\begin{array}{lll} f'_x = 2Ax, & f'_y = 2By, & f'_z = 2Cz, \\ f''_{x^2} = 2A, & f''_{y^2} = 2B, & f''_{z^2} = 2C, \\ f''_{xy} = 0, & f''_{yz} = 0, & f''_{zx} = 0. \end{array}$$

D'où le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2A & 0 & 0 & 2Ax \\ 0 & 2B & 0 & 2By \\ 0 & 0 & 2C & 2Cz \\ 2Ax & 2By & 2Cz & 0 \end{vmatrix}$$

ou

$$16(A^2BCx^2 + B^2ACy^2 + C^2BAz^2),$$
$$16ABC(Ax^2 + By^2 + Cz^2).$$

La surface auxiliaire ε [de degré $2(2m-3) = 2$] est le cône asymptote de la quadrique. La ligne parabolique est donc la conique à l'infini de la quadrique. [Elle doit être comptée deux fois, les deux surfaces étant tangentes le long de cette courbe, et est alors de degré $2m(2m-3) = 4$]. Ici

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Le déterminant a donc toujours le signe de ABC. Donc :

1° $ABC > 0$:

Ellipsoïde................ .. $(A > 0, B > 0, C > 0)$
Hyperboloïde à deux nappes . $A > 0$, $B < 0$, $C < 0$

Tous les points sont alors des points elliptiques.

2° $ABC < 0$:

Hyperboloïde à une nappe... $A > 0$, $B > 0$, $C < 0$

Tous les points sont hyperboliques.

Autre forme de la condition pour qu'un point soit parabolique. — Supposons l'équation de la surface résolue par rapport à une des variables z

$$\varphi(x, y) - z = 0.$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y} = 0.$$

On a le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} & 0 & \frac{\partial z}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Développons par rapport aux éléments de la troisième colonne :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Développons par rapport aux éléments de la dernière ligne :

$$\Delta = -\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

ou, en posant $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = s$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$,

$$\Delta = -(rt - s^2).$$

1° $\Delta > 0$:

$$rt - s^2 < 0 \qquad \text{(point elliptique).}$$

2° $\Delta < 0$:

$$rt - s^2 > 0 \qquad \text{(point hyperbolique).}$$

3° $\Delta = 0$:

$$rt - s^2 = 0 \qquad \text{(point parabolique).}$$

Remarque. — Peut-il arriver que les deux équations de la ligne parabolique se réduisent à une seule, ou que tous les points d'une surface soient paraboliques?

On aurait alors

$$rt - s^2 = 0,$$

identiquement. C'est l'équation aux dérivées partielles des surfaces dont tous les points sont paraboliques. On sait que c'est celle des surfaces développables. *Donc tous les points des surfaces développables sont paraboliques; et les surfaces développables sont les seules dont tous les points soient paraboliques.*

Intersection d'une surface et d'un plan passant au point ordinaire M *de la surface.* — Soient la surface S :

$$f(X, Y, Z) = 0;$$

M(x, y, z) un de ses points. On a

$$f(x, y, z) = 0,$$

f'_x, f'_y, f'_z ne sont pas tous nuls, et soit

$$\alpha(X - x) + \beta(Y - y) + \gamma(Z - z) = 0$$

un plan P passant par M.

Une droite passant par M et située dans le plan P a pour équations

$$\frac{X-x}{u}=\frac{Y-y}{v}=\frac{Z-z}{w}=\lambda$$

avec la condition

$$\alpha u+\beta v+\gamma w=0,$$

et coupe la courbe d'intersection aux points dont les λ sont les racines de l'équation

$$f(x+\lambda u, y+\lambda v, z+\lambda w)=0.$$

Cette équation est celle aux λ des points où la droite coupe la surface. Donc, la droite coupe, en général, la section plane en un point, et un seul, situé en M : *le point* M *est un point simple de l'intersection.*

Si l'on choisit la droite telle que

$$uf'_x+vf'_y+wf'_z=0,$$

elle coupe l'intersection en deux points confondus en M : elle est alors située dans le plan tangent et est tangente à l'intersection.

Comme, en général, le coefficient suivant

$$(uf'_x+vf'_y+wf'_z)_{(2)}$$

n'est pas nul, le point M est un point ordinaire de l'intersection. La tangente en ce point est déterminée par les deux équations :

$$\alpha u+\beta v+\gamma w=0, \qquad uf'_x+vf'_y+wf'_z=0.$$

Si les paramètres directeurs de la tangente en M à l'intersection annulent

$$(uf'_x+vf'_y+wf'_z)_{(2)},$$

c'est-à-dire si, u, v, w étant les paramètres directeurs d'une tangente osculatrice, on a

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0,$$

ou, si le plan sécant passe par une des deux tangentes osculatrices, la tangente à la section plane coupe la section en trois points confondus, et le point M est un point d'inflexion sur la section.

Ainsi, *en un point ordinaire, un plan sécant coupe la surface suivant une courbe ayant ce point pour point ordinaire.*

Un plan passant par une tangente osculatrice coupe la surface suivant une courbe ayant un point d'inflexion en ce point.

Ces résultats ne s'appliquent pas, si les deux équations linéaires

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0, \qquad u f'_x + v f'_y + w f'_z = 0$$

sont identiques; ou si

$$\frac{\alpha}{f'_x} = \frac{\beta}{f'_y} = \frac{\gamma}{f'_z},$$

c'est-à-dire si le plan P considéré est le plan tangent à la surface. Dans ce cas, quelle que soit la droite D considérée dans le plan P, le coefficient de s est nul, et une droite quelconque, située dans le plan P, coupe la section de la surface en deux points confondus en M.

Si l'on choisit u, v, w de façon que

$$(u f'_x + v f'_y + w f'_z)_{(2)} = 0,$$

c'est-à-dire si l'on prend pour droite D une tangente osculatrice, un troisième point d'intersection de la droite et de la section est situé en M.

Donc : *La section d'une surface par le plan tangent en un point ordinaire a un point double en ce* *point, les deux tangentes étant les tangentes osculatrices à la surface.*

Points d'inflexion. Points méplats. — On a vu que les tangentes osculatrices sont données par les deux équations

$$uf'_x + vf'_y + wf'_z = 0,$$
$$u^2 f''_{x^2} + v^2 f''_{y^2} + w^2 f''_{z^2} + 2uvf''_{xy} + 2vwf''_{yz} + 2wvf''_{zx} = 0.$$

Ces équations sont, en général, deux systèmes de solutions réelles, imaginaires ou confondues; et il y a, en général, deux tangentes osculatrices.

Il peut arriver que ces deux équations soient conséquences l'une de l'autre. Il faut pour cela que la forme quadratique (2) contienne la forme linéaire (1) en facteur, ou que

$$\begin{aligned} & u^2 f''_{x^2} + v^2 f''_{y^2} + w^2 f''_{z^2} + 2uvf''_{xy} + 2vwf''_{yz} + 2wuf''_{zx} \\ & = (uf'_x + vf'_y + wf'_z)(Au + Bv + Cw), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$Af'_x = f''_{x^2}, \qquad Bf'_y = f''_{y^2}, \qquad Cf'_z = f''_{z^2},$$
$$Af'_y + Bf'_x = f''_{xy}, \qquad Bf'_z + Cf'_y = f''_{yz}, \qquad Cf'_y + Af'_z = f''_{zx}.$$

Éliminons A, B, C, il reste les équations de condition :

$$\frac{f''_{x^2} f'_y}{f'_x} + \frac{f''_{y^2} f'_x}{f'_y} = f''_{xy} \ldots$$

ou

$$f''_{z^2} f'^2_y + f''_{y^2} f'^2_x = f'_x f'_y f''_{xy},$$
$$f''_{y^2} f'^2_z + f''_{z^2} f'^2_y = f'_y f'_z f''_{yz},$$
$$f''_{z^2} f'^2_x + f''_{x^2} f'^2_z = f'_z f'_x f''_{zx}.$$

Soit M un point d'une surface satisfaisant à ces trois relations; et u, v, w les paramètres directeurs d'une tangente en ce point. On a

$$uf'_x + vf'_y + wf'_z = 0,$$

et par suite

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} = 0.$$

Dans l'équation aux λ des points d'intersection de la droite avec la surface, le premier coefficient qui ne s'annule pas (en général) est celui de λ^3,

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(3)},$$

de sorte que, en un tel point, une tangente quelconque coupe la surface en trois points confondus.

Si l'on achève de déterminer la tangente par l'équation

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(3)} = 0,$$

la tangente coupera la surface en quatre points confondus.

De telles tangentes, dites *surosculatrices*, étant déterminées par deux équations du premier et du troisième degré, il y a, en général, trois tangentes surosculatrices.

De tels points sont dits *points d'inflexion de la surface*.

Ainsi, soit M un point d'inflexion d'une surface; une droite quelconque passant par M coupe la surface en un seul point situé en M. Une tangente à la surface coupe la surface en trois points confondus en M; et il existe trois tangentes surosculatrices coupant la surface en quatre points confondus en M.

Les trois tangentes surosculatrices peuvent être :

1° Réelles et distinctes;
2° Une réelle, deux imaginaires;
3° Une réelle, deux réelles confondues;
4° Trois réelles et confondues.

D'où quatre sortes de points d'inflexion d'une surface.

Considérons un plan passant par un point d'inflexion. La même méthode que précédemment montre que :

1° Un plan quelconque passant par M coupe la surface suivant une courbe ayant en M un point d'inflexion ;

2° Un plan quelconque, passant par une des trois tangentes surosculatrices en M, coupe la surface suivant une courbe ayant en M un point méplat du second ordre ;

3° Le plan tangent en M coupe la surface suivant une courbe ayant en M un point triple, les trois tangentes en M étant les trois tangentes surosculatrices.

Autre forme des conditions pour qu'un point soit d'inflexion. — Mettons l'équation de la surface sous la forme

$$\varphi(x, y) - z = 0.$$

Les trois équations qui expriment qu'un point soit un point d'inflexion, deviennent

$$\varphi''_{x^2}\varphi'^2_y + \varphi''_{y^2}\varphi'^2_x = \varphi'_x\varphi'_y\varphi''_{xy},$$
$$\varphi''_{y^2} = 0,$$
$$\varphi''_{x^2} = 0$$

ou

$$\varphi'_{x^2} = 0, \qquad \varphi''_{y^2} = 0, \qquad \varphi'_x\varphi'_y\varphi''_{xy} = 0,$$
$$p = 0, \qquad t = 0, \qquad pqs = 0.$$

Les solutions $p = 0$ et $q = 0$ ont été introduites par le fait qu'on a multiplié, pour les rendre entières, les équations par

$$f'_x = p, \qquad f'_y = q, \qquad f'_z = r.$$

Il reste donc les conditions

$$r = 0, \qquad s = 0, \qquad t = 0$$

pour exprimer qu'un point est un point d'inflexion.

Remarque. — On voit ainsi que tout point d'inflexion satisfait à la relation

$$rt - s^2 = 0$$

ou que *tout point d'inflexion se trouve sur la ligne parabolique.*

THÉORÈME. — *Tout point d'inflexion est un point double de la ligne parabolique.*

Remarquons d'abord que, en un point simple (ordinaire, parabolique ou d'inflexion) les trois dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z de l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

de la surface ne sont pas nulles : soit

$$f'_z \neq 0.$$

Or, en décrivant l'équation successivement par rapport à x et à y, on a

$$f'_x + \frac{\partial z}{\partial x} f'_y = 0, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z},$$

$$f'_y + \frac{\partial z}{\partial y} f'_z = 0, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_z},$$

p et q sont donc finis; on peut donc développer x par la formule de Taylor.

Prenons le point (x, y, z) pour origine, et le plan tangent en ce point pour plan des xy. Le plan tangent ayant pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

ou, comme $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$,

$$Z = pX + qY;$$

il s'ensuit qu'alors

$$p = 0, \qquad q = 0;$$

de sorte que l'équation de la surface se met alors sous la forme

$$z = \frac{1}{1.2}(rx^2 + 2sxy + ty^2)$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial r}{\partial x}x^3 + 3\frac{\partial r}{\partial y}x^2y + 3\frac{\partial t}{\partial x}xy^2 + \frac{\partial t}{\partial y}y^3\right) + \dots.$$

Les deux tangentes osculatrices sont les droites

$$z = 0, \qquad rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0.$$

Si le point est d'inflexion,

$$r = 0, \qquad s = 0, \qquad t = 0,$$

et il reste

$$y = \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial r}{\partial x}x^3 + 3\frac{\partial r}{\partial y}x^2y + 3\frac{\partial t}{\partial x}xy^2 + \frac{\partial t}{\partial y}y^3\right) + \dots,$$
$$z = (ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3) + \dots.$$

Mais

$$\begin{aligned} p &= 3ax^2 + 6bxy + 3cy^2 + \dots, \\ q &= 3bx^2 + 6cxy + 3dy^2 + \dots, \\ r &= 6ax + 6by + \dots, \\ s &= 6bx + 6cy + \dots, \\ t &= 6cx + 6dy + \dots. \end{aligned}$$

L'origine est point d'inflexion ($r = 0$, $s = 0$, $t = 0$ pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$); alors la ligne parabolique a pour équation

$$rt - s^2 = 0,$$

et l'ensemble des termes du plus bas degré est

$$36(ax + by)(cx + dy) - 36(bx + cy)^2.$$

Donc *la ligne parabolique a l'origine pour point double.*

Remarque. — Pour qu'un point soit d'inflexion, il faut que ses coordonnées satisfassent aux quatre équations

$$f(x, y, z) = 0,$$

et aux trois équations

$$f''_{x^2} f'^2_y + f''_{y^2} f'^2_x = f'_x f'_y f''_{xy},$$
$$f''_{y^2} f'^2_z + f''_{z^2} f'^2_y = f'_y f'_z f''_{yz},$$
$$f''_{z^2} f'^2_x + f''_{x^2} f'^2_z = f'_z f'_x f''_{zx}.$$

En général, étant donnée une surface algébrique par son équation ponctuelle, ces quatre équations sont incompatibles. *En général, une surface algébrique n'a pas de points d'inflexion.*

Exemple. — Soit la surface

$$x^m + y^m + z^m = a^m.$$

Ligne parabolique. — On a

$$f'_x = mx^{m-1}, \qquad f'_y = my^{m-1}, \qquad f'_z = mz^{m-1},$$
$$f''_{x^2} = m(m-1)x^{m-2}, \qquad f''_{y^2} = m(m-1)y^{m-2}, \qquad f''_{z^2} = m(m-1)z^{m-2},$$
$$f''_{yz} = 0, \qquad f''_{zx} = 0, \qquad f''_{xy} = 0.$$

L'équation de la ligne parabolique est

$$\begin{vmatrix} m(m-1)x^{m-2} & 0 & 0 & mx^{m-1} \\ 0 & m(m-1)y^{m-2} & 0 & my^{m-1} \\ 0 & 0 & m(m-1)z^{m-2} & mz^{m-1} \\ mx^{m-1} & my^{m-1} & mz^{m-1} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$m^4(m-1)^2x^{2m-2}y^{m-2}z^{m-2}$$
$$+m^4(m-1)^2x^{m-2}y^{2m-2}z^{m-2}$$
$$+m^4(m-1)^2x^{m-2}y^{m-2}z^{2m-2}=0,$$

ou

$$x^{m-2}y^{m-2}z^{m-2}(x^m+y^m+z^m)=0.$$

Supposons $m=3$:

$$xyz(x^3+y^3+z^3)=0.$$

La ligne parabolique se compose des sections de la surface par les plans de coordonnées, plus de la ligne à l'infini de la surface.

Points d'inflexion. — On a, pour rechercher les points d'inflexion, les quatre équations

$$x^3+y^3+z^3=a^3,\qquad xy(x+y)=0,$$
$$xy^2+yx^2=0,\qquad yz(y+z)=0,$$
$$zx(z+x)=0;$$

on trouve trois points d'inflexion réels

$$x=0,\qquad y=0,\qquad z=a,$$
$$x=0.\qquad y=a,\qquad z=0,$$
$$x=a,\qquad y=0,\qquad z=0.$$

Points méplats. — Il peut arriver, plus généralement, qu'en un point simple (f'_x, f'_y, f'_z n'étant pas tous nuls), toute solution de l'équation

$$uf'_x+vf'_y+wf'_z=0$$

annule non seulement

$$(uf'_x+vf'_y+wf'_z)_{(2)}=0,$$

mais encore les coefficients suivants jusque (et y compris)

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(p)} = 0,$$

coefficient de λ.

Le point est dit alors *point méplat d'ordre* $p - 2$. *En un tel point, une tangente quelconque coupe la surface en* $(p - 2)$ *points confondus.*

Si l'on achève de déterminer la tangente par l'équation

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(p+1)} = 0,$$

on obtient ainsi $(p + 1)$ *tangentes surosculatrices, coupant la surface en* $(p + 1)$ *points confondus.*

Comme dans le cas des points ordinaires, on démontre que :

1° Un plan quelconque passant par un point méplat M d'ordre $p - 2$ coupe la surface suivant une courbe ayant en M un point méplat du même ordre $p - 2$;

2° Un plan quelconque passant par une des $(p + 1)$ tangentes surosculatrices en un point méplat M d'ordre $p - 2$ coupe la surface suivant une courbe ayant un point méplat d'ordre $p - 1$;

3° Le plan tangent à une surface en un point méplat d'ordre $p - 2$ la coupe suivant une courbe ayant, en un point multiple d'ordre $p + 1$, les tangentes à cette courbe étant les $p + 1$ tangentes surosculatrices.

Exemple. — Soit la surface

$$x^m + y^m + z^m = a^m.$$

Le même calcul que pour la surface $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ montre qu'elle a pour points d'inflexion les points

$$\begin{array}{ccc} x = 0, & y = 0, & z^m - a^m = 0, \\ x = 0, & y^m - a^m = 0, & z = 0, \\ x^m - a^m = 0, & y = 0, & z = 0, \end{array}$$

qui sont tous des points méplats d'ordre $m-3$. Le plan tangent au point $x=0$, $y=0$, $z=a$, par exemple, coupe en effet la surface suivant la courbe

$$z=a,$$
$$x^m+y^m=0,$$

qui a un point multiple d'ordre m au point

$$(x=0,\ y=0,\ z=0)$$

de contact.

Cet exemple montre l'existence de points méplats d'ordre aussi élevé que l'on veut.