

## **Certificats de calcul différentiel et calcul intégral**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 4  
(1904), p. 568-572

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1904\\_4\\_4\\_568\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_568_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

---

---

**CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL  
ET CALCUL INTÉGRAL.**

---

**Nancy.**

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère l'intégrale curviligne*

$$I = \int (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy,$$

*prise le long d'une courbe (C) partant de l'origine des coordonnées et aboutissant au point (x, y); z désigne une fonction de x et y.*

*Déterminer la fonction z la plus générale telle que l'intégrale I ne dépende pas de la courbe (C), mais seulement de son extrémité (x, y). Déterminer, en particulier, parmi toutes ces fonctions, celle qui se réduit à y<sup>2</sup> pour x = 0. Calculer la valeur de l'intégrale curviligne I correspondante.*

II. *On considère en coordonnées rectangulaires la surface dont l'équation est*

$$z = \frac{x^2 - y^2}{2a}.$$

*Calculer l'aire de la portion de cette surface qui se projette sur le plan des xy à l'intérieur de la courbe dont*

*l'équation en coordonnées polaires rapportée à Ox comme axe polaire est*

$$r = a \sqrt{\cos \theta}.$$

III. On considère la surface représentée par l'équation

$$(1) \quad zx^2 - py^2 = 0,$$

où  $p$  est une constante.

1° Déterminer sur cette surface le lieu des points où la normale fait un angle donné avec  $Oz$ .

2° Déterminer sur la surface une courbe telle qu'en chacun de ses points le plan formé par la tangente à la courbe et la normale à la surface soit parallèle à  $Oz$ .

3° Trajectoires orthogonales aux surfaces représentées par l'équation (1) quand  $p$  varie.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x \cos \varphi + x^2}} \quad \text{pour} \quad \varphi = 32^\circ 46'.$$

(Novembre 1904.)

### Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Trouver toutes les surfaces telles que le plan tangent en chaque point  $M$  rencontre un axe  $OZ$  en un point équidistant du point de contact  $M$  et d'un point fixe  $O$  pris sur  $OZ$ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Intégrer l'équation

$$(x + 15y) dx + (2y - 15x) dy = 0,$$

en employant un facteur intégrant.

(Novembre 1904.)

### Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Sur la normale principale, en chaque point  $M$  d'une hélice circulaire  $S$ , et dans le sens de la concavité, on porte une longueur constante  $MM_1 = l$  et l'on considère la courbe  $S_1$ , lieu du point  $M_1$ .

On demande de déterminer  $l$  de façon que les courbes  $S$  et  $S_1$  jouissent de l'une des quatre propriétés suivantes :

- 1° Les courbes  $S$  et  $S_1$  ont même courbure;
- 2° Elles ont même torsion absolue;
- 3° Les tangentes  $MT$  et  $M_1T_1$  aux points correspondants sont rectangulaires;
- 4° La tangente  $M_1T_1$  à  $S_1$  en  $M_1$  est parallèle à la binormale  $MH$  à la courbe  $S$  en  $M$ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Intégrer l'équation

$$2x^3 dy = y^3 dx + 3x^2 y dx.$$

2° Intégrer l'équation

$$x(x^2 + y^2)p + 2y^2(px + qy - z) = 0,$$

et déterminer une surface intégrale passant par le cercle

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = c.$$

(Juillet 1904.)

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Étant donné un système de deux équations différentielles du premier ordre

$$(A) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z),$$

énoncer et démontrer le théorème fondamental de Cauchy, relatif à l'existence des intégrales de ce système.

Qu'entend-on par INTÉGRALE GÉNÉRALE et par INTÉGRALE PREMIÈRE du système (A)?

II. Soit  $y = \varphi(x, C)$  l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + y^2 + ay + b = 0,$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions de  $x$ . Démontrer que l'on a, quelle que soit la constante  $C$ ,

$$\int \varphi(x, C) dx = -\frac{1}{2} \log \frac{\partial \varphi}{\partial C} - \frac{1}{2} \int a dx.$$

APPLICATION. — Soient  $y_1, y_2, y_3$  trois intégrales particulières de l'équation (1); en déduire une formule donnant l'intégrale générale de l'équation linéaire

$$(2) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + a \frac{dz}{dx} + bz = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit R le quadrilatère curviligne ABCD, limité par les arcs AB, BC, CD, DA appartenant respectivement à quatre paraboles  $P_1, P_2, P_3, P_4$  ayant pour foyer l'origine et représentées en coordonnées rectangulaires par les équations

$$(P_1) \quad y^2 - 4x - 4 = 0,$$

$$(P_2) \quad y^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$(P_3) \quad y^2 + 6x - 9 = 0,$$

$$(P_4) \quad y^2 + 4x - 4 = 0.$$

On demande de calculer l'intégrale double

$$\iint \frac{y \, dx \, dy}{(1+x)^{\frac{3}{2}} \sqrt{x^2+y^2}}$$

étendue à la région R.

N. B. — On peut, par exemple, remplacer l'intégrale double par une intégrale curviligne, ou employer le changement de variables défini par les formules

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv.$$

(Octobre 1904.)

### Poitiers.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Déterminer la fonction  $f(x, y)$  de manière que, en éliminant  $\alpha$  et  $\beta$  de l'équation

$$z = \alpha x + \beta y + f(x, y),$$

on obtienne

$$z = px + qy + f(x, y).$$

II. Trouver l'équation aux dérivées partielles du second ordre, indépendante des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  de la fonction F

à laquelle satisfait la fonction  $z$  définie par

$$z = \alpha x + \beta y + F\left(\frac{y}{x}\right).$$

III. Trouver la surface  $S$  la plus générale satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$z = px + qy + a \frac{y}{x},$$

et déterminer la surface particulière  $\Sigma$  contenant la courbe

$$z = 0, \quad x^3 + y^3 + 3axy = 0.$$

IV. Chercher les projections sur le plan  $xOy$  des lignes asymptotiques de la surface  $S$  et de la surface  $\Sigma$ .

V. Dans ce dernier cas on obtient des lignes droites et des coniques. Déterminer le cercle osculateur à l'une de ces coniques, le point de contact étant l'origine des coordonnées.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. A tout point  $(x, y)$  du plan correspondent  $\lambda, \mu$ , de façon que l'on ait

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2 - \mu} + \frac{y^2}{b^2 - \mu} = 1 \quad (a^2 > b^2).$$

Entre quelles limites sont, en général,  $\lambda$  et  $\mu$ ?

Entre quelles limites varient  $\lambda$  et  $\mu$  quand le point  $(x, y)$  est à l'intérieur de l'ellipse  $E$  ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

II. Transformer l'intégrale double

$$\iint F(x, y) dx dy$$

en prenant pour variables indépendantes  $\lambda$  et  $\mu$ .

III. Comme application, calculer l'intégrale

$$\iint \frac{dx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 - b^2)x^2}}$$

étendue à tous les points intérieurs à l'ellipse  $E$ .

(Juillet 1904.)