

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 91-94

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_91_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy , on considère une courbe K telle que la projection C' sur l'axe Ox du centre de courbure C , relatif à un point M , et le point T de rencontre de la tangente en M avec Ox , soient constamment symétriques par rapport à la projection P de M sur Ox .

1° Former et intégrer l'équation différentielle qui définit la courbe K ; vérifier que la distance du point P à la normale en M est constante;

2° Construire la courbe K et sa développée;

3° Calculer l'arc de la courbe K ;

4° Calculer l'aire dont le contour est formé par les ordonnées MP , M_0P_0 des points M et M_0 de K , par la portion PP_0 de l'axe Ox et par l'arc de courbe joignant M et M_0 .

II. Enveloppe d'une famille de surfaces définie par une équation contenant deux paramètres variables.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Construire la courbe

$$y = 4 \frac{\sin x}{x}$$

et calculer avec 4 décimales la plus petite valeur positive de x pour laquelle la tangente est parallèle à l'axe des x .

(Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$2y \frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 6x^2y = 0.$$

1° Trouver son intégrale générale;

2° Déterminer la surface S qui, rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox , Oy , Oz , vérifie cette équation aux dérivées partielles et passe par la parabole définie

par les équations

$$x = 0, \quad y^2 = 2z;$$

3° Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface.

II. Plan tangent à une surface réglée; variation de ce plan lorsque le point de contact se déplace sur une génératrice rectiligne de la surface. Paraboloïde des normales. Quadriques de raccordement.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer, par la méthode de Cauchy, l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} dx}{(x^2 + a^2)^2},$$

dans laquelle $x^{\frac{1}{3}}$ a sa détermination réelle.

(Novembre 1903.)

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Trouver l'intégrale de l'équation

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 2z$$

qui se réduit à $(1 + y)^2$ pour $x = 0$.

$$\left[z = \left(x \sqrt{\frac{3}{2}} + y + 1 \right)^2 \right].$$

II. Déterminer une courbe plane telle qu'un point fixe O de son plan et le centre de courbure en un point quelconque M de la courbe soient à égale distance de la tangente en M et du même côté de cette droite.

SOLUTION.

La développée, dont toutes les normales passent en O, est une circonférence, et la courbe, sa développante.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Construire la courbe

$$x(x + y)^2 = 2(x - y);$$

2° Volume engendré par la révolution d'une développante d'ellipse autour du petit axe de l'ellipse.

(93)

SOLUTION.

$$\frac{32}{105} \pi \frac{c^6}{a^2 b}$$

(Novembre 1903.)

Grenoble.

COMPOSITION ÉCRITE. — I. Trouver une courbe plane S telle que sa normale N , limitée à l'axe des x , soit dans un rapport donné K avec la distance P de l'origine à la tangente. Cas particuliers où $K = 1, 2, 3$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Réduction de l'intégrale

$$u = \int \frac{dx}{(x-3)^3 \sqrt{X}},$$

où $X = x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x - 120$.

(Novembre 1903.)

Poitiers.

COMPOSITION ÉCRITE. — I. Trouver les projections sur le plan xOy des lignes de courbure du parabolôïde hyperbolique

$$x = a(u + v), \quad y = b(u - v), \quad z = cuv;$$

on suppose $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

II. Déterminer une surface telle que chaque point M soit le centre de gravité du triangle situé dans le plan tangent en M et dont les sommets A, B, C sont sur les axes OX, OY, OZ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — L'équation

$$x(1-x)y'' + \left(\frac{3}{2} - 2x\right)y' - \frac{y}{4} = 0$$

admet une solution de la forme $y = x^n$; trouver n , et intégrer l'équation.

(Juillet 1903.)

COMPOSITION ÉCRITE. — Une surface est représentée par les

équations

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = f(r) + \varphi(\theta)$$

(f et φ sont des fonctions données des variables indépendantes r et θ).

1° Quelle est en r et θ l'expression du rayon de courbure d'une section normale;

2° Équation différentielle des lignes asymptotiques;

3° Intégrer cette équation en faisant

$$f(r) = k \frac{r^n}{a^{n-1}}, \quad \varphi(\theta) = b\theta,$$

et supposant successivement

$$n > 1, \quad n < 1, \quad n = 1.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — x, y étant deux variables indépendantes, k une constante positive moindre que 1, calculer l'intégrale double

$$\int_0^k dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{y \cos x + 1};$$

en déduire la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} \log(1 + k \cos x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} (\arccos k)^2.$$

Application numérique :

$$k = 0,25.$$

(Novembre 1903.)