NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. LERY

Sur les trajectoires orthogonales d'une file de cercles

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 106-109

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__106_1>

[O2kα]

SUR LES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UNE FILE DE CERCLES;

PAR M. G. LERY.

Les trajectoires orthogonales d'une suite de cercles sont déterminées par l'intégration d'une équation de Riccati; de cette propriété, établie par MM. Em. Picard et Demartres, on déduit la suivante : le rapport anharmonique des points où un même cercle de la file est rencontré par quatre des trajectoires ne varie pas quel que soit le cercle considéré. Je me propose de démontrer géométriquement ce dernier théorème.

1. Soit d'abord une *file contenue dans un plan*, Soient deux cercles consécutifs C et C', soient M et M' les points infiniment voisins où une trajectoire orthogonale Γ les rencontre respectivement. Les tangentes Mm, $M'm$ aux deux cercles sont deux normales infiniment voisines de Γ; donc $mM = mM'$, aux infiniment petits du second ordre près; par suite m est sur l'axe radical δ de C et C'. Les tangentes en M et M' se coupant sur δ, ces deux points sont des points correspondants dans l'homologie d'axe δ, qui transforme C en C'. Comme l'homologie conserve le rapport anharmonique de quatre points d'une conique, le théorème est établi.

La démonstration précédente n'est pas rigoureuse, mais il est facile de la préciser. En effet, la différence des longueurs mM, mM' des deux normales de Γ est un infiniment petit du second ordre; la distance de m à l'axe radical δ, qui est, à un facteur fini près,

$$mM^2 - mM'^2 \quad \text{ou} \quad (mM - mM')(mM + mM'),$$

est donc du second ordre. Soit μ le point où mM coupe δ; il y a une tangente $\mu M'_1$ au cercle C' infiniment voisine de mM', et $M'_1 M'$ est du second ordre comme μm. Mais il y a homologie entre M et M'_1, puisque les tangentes en ces points se coupent sur δ; donc, en prenant quatre points M, N, P, Q sur C

$$(MNPQ) = (M'_1 N'_1 P'_1 Q'_1).$$

En passant des points M'_1 aux points M', la variation du rapport anharmonique, qui est fonction linéaire des variations des paramètres qui définissent les points M'_1, est par suite du second ordre.

En conséquence, la différence

$$(M'N'P'Q') - (MNPQ) = (M'_1 N'_1 P'_1 Q'_1) - (MNPQ)$$

est du second ordre, ce qui s'écrit

$$d(MNPQ) = 0,$$
$$(MNPQ) = \text{const.}$$

2. Dans le mouvement d'une figure plane rigide, il existe à chaque instant une rotation instantanée; ici nous pouvons dire qu'il y a une *homologie instantanée* qui transforme le cercle C de la file dans le cercle infiniment voisin C′; un point M et son transformé M′ sont sur une trajectoire orthogonale de la file.

L'axe d'homologie est la corde de contact de C avec son enveloppe; le pôle, par lequel passent à la limite les droites MM′, est le centre de C.

Les centres de courbure des trajectoires orthogonales, relativement aux points de ces trajectoires situés sur un même cercle C, sont sur l'axe d'homologie correspondant. En particulier, les points où cet axe coupe C, s'ils sont réels, sont points de rebroussement, et les extrémités du diamètre perpendiculaire sont points d'inflexion des trajectoires correspondantes.

3. Dans l'espace, tout ceci s'étend sans peine à une *file de sphères*. L'homologie instantanée qui transforme une sphère en la suivante a pour centre le centre de la sphère, pour plan double le plan radical limite; chaque point est déplacé suivant la direction de la trajectoire orthogonale. Enfin les axes de courbure de ces trajectoires, relatifs aux points de rencontre avec une même sphère, sont situés dans le plan d'homologie.

4. Soit maintenant une *suite de cercles dans l'espace.* J'appelle C et C′ deux cercles infiniment voisins, γ l'intersection de leurs plans. Pour passer de C à C′, j'effectue d'abord une rotation infiniment petite autour de γ; cette rotation transforme C en un cercle C″, qui est dans le plan de C′; ensuite je fais une homologie infiniment petite qui change C″ en C′. Un point M de C devient M″, puis M′; les deux segments MM″, M″M′ sont à la limite perpendiculaires à la tangente à C″ en M″; leur résultante MM′ est donc à la limite perpendiculaire à la tangente en M au cercle C : c'est la direction d'une trajectoire orthogonale.

La rotation et l'homologie effectuées ne changeant pas le rapport anharmonique de quatre points de C, le théorème est démontré.

5. J'appelle T la transformation, produit d'une rotation et d'une homologie, qui fait passer d'un cercle C au cercle suivant dans la file.

Lorsque deux cercles consécutifs de la file sont sur une même sphère, les tangentes aux trajectoires orthogonales en tous les points d'un cercle C forment évidemment un cône circonscrit à la sphère qui contient C et C′; la transformation T est alors une homologie dans l'espace. La surface lieu des cercles de la file les admet comme lignes de courbure d'un système; le second système est formé par les trajectoires orthogonales. Le théorème démontré s'énonce alors ainsi :

Si une surface admet des cercles comme lignes de courbure d'un système, quatre lignes de courbure du second système coupent chacun des cercles en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.