

MAURICE FRÉCHET

Généralisation du problème de Pfaff

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5
(1905), p. 110-114

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__110_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[H6b]

GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DE PFAFF;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Notation de M. Méray. — Indiquons d'abord la notation que nous allons employer et dont l'idée est due à M. Méray.

Étant données n fonctions x_1, \dots, x_r de r paramètres $\omega_1, \dots, \omega_r$, nous poserons

$$d(x_1, x_2, \dots, x_r) = \frac{D(x_1, \dots, x_r)}{D(\omega_1, \dots, \omega_r)} d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_r$$

en désignant par $d\omega_i$ la différentielle de ω_i et par

$$\frac{D(x_1, \dots, x_r)}{D(\omega_1, \dots, \omega_r)}$$

le déterminant fonctionnel de x_1, \dots, x_r par rapport à $\omega_1, \dots, \omega_r$.

On voit alors que la *différentielle multiple*

$$d(x_1, \dots, x_r)$$

a, avec le déterminant fonctionnel $\frac{D(x_1, \dots, x_r)}{D(\omega_1, \dots, \omega_r)}$, le même lien que la différentielle dy avec la dérivée y'_x .

On démontre facilement que, si y_1, \dots, y_r sont r fonctions de n quantités, x_1, \dots, x_n dépendant de $\omega_1, \dots, \omega_r$, on a

$$d(y_1, \dots, y_r) = \sum_{i_1, \dots, i_r} \frac{D(y_1, \dots, y_r)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})} d(x_{i_1} \dots x_{i_r}),$$

si $n \geq r$, et

$$d(y_1, \dots, y_r) = 0$$

si $n < r$.

Position du problème. — Ceci étant, nous voulons résoudre le problème suivant :

Trouver les relations entre les quantités p_{i_1, \dots, i_r} (où i_1, \dots, i_r forment une combinaison quelconque de r des nombres $1, \dots, n$) et x_1, \dots, x_n qui entraînent la relation

$$(1) \quad \sum_{i_1, \dots, i_r} p_{i_1, \dots, i_r} d(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) = 0 \quad \text{avec} \quad n \geq r.$$

On obtient le problème communément appelé *problème de Pfaff* pour $r = 1$.

Le problème ne se pose que si x_1, \dots, x_n ne sont pas indépendants, mais au contraire sont fonctions de r paramètres $\omega_1, \dots, \omega_r$. Montrons d'abord que l'égalité (1) ne peut avoir lieu *quel que soit le système de fonctions de $\omega_1, \dots, \omega_r$ qui représentent x_1, \dots, x_n , que si tous les p sont nuls.*

En effet, l'équation (1) est équivalente à la suivante

$$\sum_{i_1} \left\{ \left[\sum_{i_2, \dots, i_r} p_{i_1, \dots, i_r} \frac{D(x_{i_2}, \dots, x_{i_r})}{D(\omega_2, \dots, \omega_r)} \right] \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \omega_1} \right\} = 0.$$

Or on peut, en laissant aux crochets des valeurs fixes, donner aux quantités $\frac{\partial x}{\partial \omega_1}$ des valeurs arbitraires puisque les x sont, par hypothèse, des fonctions absolument arbitraires des ω . Il faut donc que les crochets soient nuls, c'est-à-dire que l'on ait

$$\sum_{i_2, \dots, i_r} p_{i_1, \dots, i_r} d(x_{i_2}, \dots, x_{i_r}) = 0 \quad (i_1 = 1, \dots, n),$$

en considérant $x_1, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \dots, x_n$ comme des fonctions arbitraires de $\omega_2, \dots, \omega_r$. Nous sommes ramenés au même problème où l'on a remplacé n, r

par $n - 1$, $r - 1$. En opérant successivement de la même manière, nous arriverons à l'égalité

$$\sum_{i_r} p_{i_1, \dots, i_r} dx_{i_1} = 0$$

qui doit avoir lieu quelles que soient les fonctions de ω_r qui représentent les x autres que $x_{i_1}, \dots, x_{i_{r-1}}$. Par suite les p sont nécessairement nuls.

Solution du problème de Pfaff généralisé. — Ainsi l'équation (1) n'admet que la solution banale

$$p = 0$$

lorsque les x sont fonctions arbitraires de $\omega_1, \dots, \omega_r$, c'est-à-dire fonctions arbitraires de r d'entre elles.

Ce cas est celui où toutes les $n - r$ relations indépendantes qui doivent exister entre les x pour que le problème ait un sens sont arbitraires. Voyons ce qui arrive lorsqu'on se donne un nombre déterminé $n - q$ de ces relations; soient

$$(2) \quad f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \dots, \quad f_q(x_1, \dots, x_n) = 0$$

avec, nécessairement, $q \leq n - r$.

Ces relations indépendantes sont résolubles par rapport à q des x ; on peut donc les mettre sous la forme

$$(3) \quad x_1 = \varphi_1(x_{q+1}, \dots, x_n), \quad \dots, \quad x_q = \varphi_q(x_{q+1}, \dots, x_n).$$

Par suite, l'équation obtenue en remplaçant x_1, \dots, x_n par leurs expressions (3) dans (1) est une équation de même forme où n'entrent que les différentielles multiples de x_{q+1}, \dots, x_n , r à r . Et cette équation devant avoir lieu quelles que soient les $n - q - r$ relations arbitraires qui doivent exister entre x_{q+1}, \dots, x_n , les

coefficients des différentielles multiples qui y figurent doivent être nuls d'après ce qui précède. On a donc des équations qui déterminent d'une façon unique les p_{i_1, \dots, i_r} dans lesquels les j sont supérieurs à q

$$(4) \quad p_{j_1, \dots, j_r} + \sum p_{i_1, \dots, i_s, j_{k_1}, \dots, j_{k_{r-s}}} \frac{D(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_s}, x_{j_{k_1}}, \dots, x_{j_{k_{r-s}}})}{D(x_{j_1}, \dots, x_{j_r})} = 0,$$

où i_1, \dots, i_s sont inférieurs à q et où $j_{k_1}, \dots, j_{k_{r-s}}$ sont $r - s$ des nombres j_1, \dots, j_r .

Les équations (3) et (4) forment donc la solution la plus générale de l'équation de Pfaff généralisée (1).

On voit que cette solution dépend de q fonctions arbitraires, q pouvant prendre les valeurs $1, \dots, n - r$. Et elle détermine $q + C_{n-q}^r$ des quantités x, p en fonctions des $n - q + C_n^r - C_{n-q}^r$ autres.

On pourrait obtenir la solution générale en partant des équations non résolues (2) et en appliquant la méthode des multiplicateurs à l'équation (1) et aux équations

$$d f_j(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_{r-1}}) = 0,$$

qui sont conséquences de (2).

Remarque. — Dans le même ordre d'idées, on pourrait être amené à généraliser la théorie des transformations de contact en cherchant à déterminer des fonctions $X_1, \dots, X_n, P_1, \dots, P_r, \dots, P_{i_1, \dots, i_r}, \dots$ des variables $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_r, \dots, p_{i_1, \dots, i_r}, \dots$ qui satisfassent à l'égalité

$$\sum P_{i_1, \dots, i_r} d(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}) = \sum p_{i_1, \dots, i_r} d(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}).$$

On aura une solution évidente (qui correspond aux transformations *prolongées* de Lie) en prenant pour X_1, \dots, X_n des fonctions de x_1, \dots, x_n qui définissent

une transformation réversible quelconque. Car alors les P seront des fonctions bien déterminées des x et des p , linéaires et homogènes par rapport aux p :

$$P_{i_1, \dots, i_r} = \sum_{j_1, \dots, j_r} p_{j_1, \dots, j_r} \frac{D(x_{j_1}, \dots, x_{j_r})}{D(X_{i_1}, \dots, X_{i_r})}.$$

Mais il semble que l'on doive chercher dans une autre voie une véritable généralisation de la théorie complète de Lie (en faisant intervenir des considérations de calcul fonctionnel).