NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JEAN SERVAIS

Concours d'admission à l'École normale supérieure et aux bourses de licence

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 275-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__275_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET AUX BOURSES DE LICENCE;

SOLUTIONS PAR M. JEAN SERVAIS.

Première composition de Mathématiques (Sciences I).

On considère les trois surfaces du second degré définies par les équations

$$y = x^2, \qquad z = xy, \qquad zx = y^2.$$

I. *Soit* M *le point d'intersection des plans polaires d'un point* M_0 *par rapport à ces trois surfaces : on demande d'exprimer les coordonnées* x, y, z *du point* M *au moyen des coordonnées* x_0, y_0, z_0 *du point* M_0 *et, inversement,* x_0, y_0, z_0 *au moyen de* x, y, z.

II. *Vérifier, sur les formules, que le point* M *n'est pas déterminé quand le point* M_0 *se trouve sur la courbe* (C) *définie par les équations*

$$y = x^2, \qquad z = x^3.$$

Où se trouve alors le point M?

III. *Pour que le point* M_0 *soit dans le plan des* x, y, *il faut que le point* M *soit sur une surface* (S) *du troisième degré. Vérifier que cette surface contient la courbe* (C) *et qu'elle est réglée. Quel est le lieu du point* M_0 *quand le point* M *décrit une génératrice rectiligne de la surface?*

IV. *Quel est, sur la surface* (S), *le lieu des points* M *tels que le point* M_0 *soit rejeté à l'infini dans le plan des* x, y?

V. *Le point* M *est supposé se mouvoir sur la surface* (S), *de telle façon qu'il soit, à chaque instant* t, *sur la génératrice définie par les équations*

$$y = tz, \qquad x = \frac{2}{3}t^2 z + \frac{1}{3t}$$

et que son accélération soit située dans le plan tangent en M *à la surface. Montrer que la coordonnée* z *vérifie l'équation*

$$t\frac{d\frac{1}{z}}{dt} - \frac{1}{z} - 2t^3 = 0.$$

Intégrer cette équation et exprimer les trois coordonnées en fonction du temps. Vérifier que la courbe (C) *est l'une des trajectoires possibles.*

I. Les trois plans polaires du point M_0 ont pour équations

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} &2xx_0 - y - y_0 &&= 0,\\ &xy_0 + yx_0 - z - z_0 &&= 0,\\ &xz_0 - 2yy_0 + zx_0 &&= 0.\end{aligned}\right.$$

On obtient les coordonnées du point M en résolvant ces trois équations par rapport à x, y, z. Des deux premières, on peut toujours tirer y et z en fonction de x, ce qui donne

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} y &= 2xx_0 - y_0,\\ z &= xy_0 + 2xx_0^2 - x_0 y_0 - z_0.\end{aligned}\right.$$

En portant ces valeurs dans la troisième, on a

$$(3) \qquad (2x_0^3 - 3x_0 y_0 + z_0)x - x_0^2 y_0 - x_0 z_0 + 2y_0^2 = 0.$$

De cette équation (3) on tire, en général, une valeur bien déterminée pour x, et, en portant cette valeur dans les égalités (2), on obtient les expressions suivantes des coordonnées de M :

$$
(4) \qquad \left\{
\begin{aligned}
x &= \frac{x_0^2 y_0 + x_0 z_0 - 2 y_0^2}{2 x_0^3 - 3 x_0 y_0 + z_0}, \\
y &= \frac{2 x_0^2 z_0 - x_0 y_0^2 - y_0 z_0}{2 x_0^3 - 3 x_0 y_0 + z_0}, \\
z &= \frac{3 x_0 y_0 z_0 - 2 y_0^3 - z_0^2}{2 x_0^3 - 3 x_0 y_0 + z_0}.
\end{aligned}
\right.
$$

Comme les équations (1) ne changent pas lorsqu'on permute x et x_0, y et y_0, z et z_0, il suffit de faire cette permutation dans les formules (4) pour avoir les coordonnées x_0, y_0, z_0 en fonction de x, y, z.

II. La valeur de x donnée par l'équation (3) est indéterminée dans le cas particulier où l'on a simultanément

$$
(5) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&2 x_0^3 - 3 x_0 y_0 + z_0 = 0, \\
&x_0^2 y_0 + x_0 z_0 - 2 y_0^2 = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

c'est-à-dire lorsque le point M_0 est à l'intersection des deux surfaces du troisième ordre définies par ces deux équations. Ces deux surfaces sont tangentes tout le long d'une cubique et ont, en outre, en commun la droite à l'infini du plan $y\,O\,z$ qui compte trois fois, car c'est une droite double de la première surface, et les deux surfaces sont tangentes, suivant elle, au plan de l'infini.

L'élimination de z_0 entre les deux équations (5) donne

$$2(y_0 - x_0^2)^2 = 0,$$

et, en remplaçant y_0 par z_0^2 dans la première, on en déduit

$$z_0 = x_0^3.$$

Le point M est donc bien indéterminé lorsque le point M_0 est sur la cubique (C) :

$$y = x^2, \qquad z = x^3.$$

L'équation (3) étant une identité, les trois équations (1) se réduisent aux deux équations (2) qui deviennent

$$(6) \qquad \begin{cases} y = 2xx_0 - x_0^2, \\ z = 3xx_0^2 - 2x_0^3. \end{cases}$$

Le point M est donc indéterminé sur la droite, représentée par les équations (2), qui est d'ailleurs la tangente en M_0 à la cubique (C).

Remarquons, en passant, que les tangentes à (C) engendrent une surface développable D du quatrième ordre dont l'équation est

$$(z - xy)^2 = 4(y - x^2)(xz - y^2).$$

Les quatre surfaces obtenues en égalant à zéro les numérateurs et le dénominateur de x, y et z passent évidemment par la cubique (C), puisque, pour tout point de la cubique, x, y, z doivent se présenter sous la forme $\frac{0}{0}$. Ces quatre surfaces sont, en outre, tangentes deux à deux le long de la cubique et tangentes à la développable D. En d'autres termes, la cubique (C) est une ligne asymptotique de ces quatre surfaces.

Les formules (4) définissent une transformation birationnelle réciproque dans l'espace. A tout point M_0 de l'espace cette transformation fait correspondre, en général, un point M et un seul et, lorsque M vient en M_0, M_0 vient en M. Il y a exception lorsque l'un des points est sur la cubique (C) commune aux trois quadriques données; l'homologue est alors indéterminé sur une génératrice de la développable D. Réciproquement à tout point de D correspond un point de la cubique (C).

Lorsque M_0 décrit une surface d'ordre m, l'homologue M décrit une surface d'ordre $3m$ qui passe par la cubique (C) et a m nappes tangentes le long de cette cubique à la surface développable D. Si la surface donnée passe par la cubique (C) il y a décomposition.

III. Pour que le point M_0 soit dans le plan des x, y ($z_0 = 0$), il faut et il suffit que M soit sur la surface (S) :

$$3xyz - 2y^3 - z^2 = 0, \tag{7}$$

qui passe, comme nous l'avons vu, par (C).

Le cône des directions asymptotiques de la surface se décompose en un plan et un cône du second ordre :

$$y = 0, \qquad 3xz = 2y^2.$$

Il n'y a pas de plan parallèle à $y = 0$ qui coupe suivant des droites, sauf $y = 0$.

Les génératrices de cette surface (S), s'il y en a, sont donc des parallèles aux génératrices du cône

$$3xz = 2y^2.$$

Elles ont donc des équations de la forme

$$y = \lambda z + \mu,$$
$$x = \frac{2}{3}\lambda^2 z + \rho.$$

En portant ces valeurs de y et z dans l'équation (7) et écrivant qu'on obtient une identité, on trouve

$$\mu = 0, \qquad \rho = \frac{1}{3\lambda}.$$

Les équations d'une génératrice sont donc

$$y = \lambda z, \qquad x = \frac{2}{3}\lambda^2 z + \frac{1}{3\lambda}.$$

Pour avoir le lieu décrit par M_0 lorsque M décrit cette génératrice, remplaçons x et y par leurs valeurs précédentes dans les expressions de x_0, y_0, z_0 en fonction de x, y, z déduites des formules (4). Tous calculs faits, il vient

$$x_0 = \frac{12\lambda^2 z(\lambda^3 z - 1)^2}{(16\lambda^3 z + 2)(\lambda^3 z - 1)^2},$$
$$y_0 = \frac{6\lambda z(\lambda^3 z - 1)^2}{(16\lambda^3 z + 2)(\lambda^3 z - 1)^2},$$
$$z_0 = 0.$$

Ces formules montrent que x_0 et y_0 sont indéterminés lorsque $z = \frac{1}{\lambda^3}$. Ceci s'explique aisément. Chacune des génératrices de la surface (S) rencontre la cubique (C) en un point tel que $z = \frac{1}{\lambda^3}$. Lorsque M vient en ce point, M_0 est indéterminé sur la tangente à (C). La surface transformée de (S) est une surface du neuvième ordre qui se compose de deux fois la développable D et du plan xOy. En supprimant le facteur $(\lambda^3 z - 1)^2$ qui correspond aux génératrices de D, il reste

$$x_0 = \frac{12\lambda^2 z}{16\lambda^3 z + 2}, \qquad y_0 = \frac{6\lambda z}{16\lambda^3 z + 2}.$$

Le lieu de M_0 est donc la droite

$$x_0 = 2\lambda y_0$$

du plan des x, y.

IV. Pour que le point M_0 soit rejeté à l'infini dans le plan des x, y, il faut et il suffit que les deux termes de z_0 soient nuls, sans que les numérateurs de x_0 et y_0 le soient. Le point M doit donc être sur la partie de l'intersection des deux surfaces

$$3xyz - 2y^3 - z^2 = 0,$$
$$2x^3 - 3xy + z = 0,$$

autre que la courbe (C). Or, les deux surfaces sont tangentes tout le long de (C); elles se coupent donc, en outre, suivant une cubique qui constitue le lieu cherché. En éliminant z on trouve

$$(y+2x^2)(y-x^2)^2=0.$$

Le facteur $(y-x^2)^2$ donne la cubique (C). Le lieu cherché est donc la cubique

$$y=-2x^2, \qquad z=-8x^3.$$

V. Pour que le point M situé sur la génératrice

$$y=tz, \qquad x=\frac{2}{3}t^2z+\frac{1}{3t}$$

se meuve de façon que son accélération soit dans le plan tangent, il faut et il suffit que l'on ait

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} & \dfrac{d^2y}{dt^2} & \dfrac{d^2z}{dt^2} \\ \dfrac{2}{3}t^2 & t & 1 \\ \dfrac{4}{3}tz-\dfrac{1}{3t^2} & z & 0 \end{vmatrix}=0.$$

En considérant z comme fonction de t, on a

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2}{3}t^2\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{8}{3}t\frac{dz}{dt}+\frac{4}{3}z+\frac{2}{3t^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=t\frac{d^2z}{dt^2}+2\frac{dz}{dt}.$$

En portant ces valeurs dans (8), et retranchant la seconde ligne multipliée par $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ de la première, on trouve

$$\begin{vmatrix} \dfrac{8}{3}t\dfrac{dz}{dt}+\dfrac{4}{3}z+\dfrac{2}{3t^3} & 2\dfrac{dz}{dt} \\ \dfrac{4}{3}tz-\dfrac{1}{3t^2} & z \end{vmatrix}=0$$

ou, en développant,

$$t\frac{d\left(\frac{1}{z}\right)}{dt} - \frac{1}{z} - 2t^3 = 0.$$

En intégrant cette équation linéaire en $\frac{1}{z}$ par le procédé classique, on trouve

$$\frac{1}{z} = Ct + t^3.$$

La trajectoire cherchée est donc

$$x = \frac{2t^2}{3(Ct+t^3)} + \frac{1}{3t},$$
$$y = \frac{t}{Ct+t^3},$$
$$z = \frac{1}{Ct+t^3},$$

qui se réduit à la courbe (C) quand on fait $C = 0$.

Ces résultats étaient faciles à prévoir puisque nous savions que la courbe (C) était une asymptotique de (S). La recherche des trajectoires de M, qui sont les lignes asymptotiques de (S), devait, d'après des résultats bien connus, conduire à l'intégration d'une équation de Ricatti dont on connaissait d'avance une solution.

Deuxième composition de Mathématiques (Sciences I et II).

I. *Étudier la fonction*

$$y = a\,\mathrm{L}\cos\frac{x}{a};$$

a désigne une constante primitive, L *le logarithme népérien. Soit* (C) *la courbe représentative, les axes étant rectangulaires.*

II. *Calculer le rayon de courbure* R *de* (C) *en l'un quelconque* M *de ses points. Déterminer la développée de* (C).

III. *On suppose que* M *appartienne à la même branche de* (C) *que l'origine* O. *Calculer l'arc* s *de* (C) *limité par* O *et* M. *Exprimer* R *en fonction de* s.

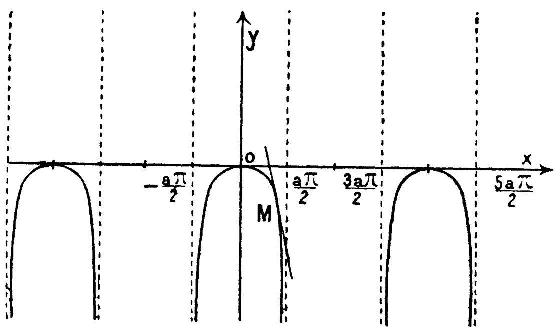
IV. *Par les translations parallèles à* Oy, *on déduit de* (C) *une famille de courbes* (Γ). *Déterminer une famille de courbes* (Γ') *telle que chaque courbe* (Γ') *coupe à angle droit toutes les courbes* (Γ). [*On pourra former d'abord une relation entre l'abscisse d'un point quelconque d'une courbe* (Γ') *et le coefficient angulaire de la tangente en ce point.*]

V. *Soit de même* (Γ_1) *la famille des courbes déduites de* (C) *par les translations parallèles à* Ox. *Trouver les courbes* (Γ'_1) *coupant à angle droit les courbes* (Γ_1). [*Former d'abord une relation entre l'ordonnée d'un point quelconque d'une courbe* (Γ_1) *et le coefficient angulaire de la tangente en ce point.*]

VI. Calcul numérique. — *Soient* x_1, y_1 *les coordonnées du point* P *de la courbe* (C) *tel que son abscisse* x_1 *soit positive, et que l'arc* OP *de* (C) *ait pour longueur* $\frac{a}{2}$. *Déterminer, avec trois chiffres exacts, les rapports* $\frac{x_1}{a}$, $\frac{y_1}{a}$.

I. La fonction y est manifestement périodique et admet pour période $2a\pi$. Il suffit donc de construire la courbe représentative lorsque x varie de $-a\pi$ à $+a\pi$. Comme le changement de x en $-x$ ne modifie pas y, on obtiendra la moitié de la courbe en faisant varier x de o à $a\pi$. Or, dans cet intervalle $\cos\frac{x}{a}$ n'est positif, et par suite y réel, que lorsque x varie de o à $\frac{a\pi}{2}$; $\cos\frac{x}{a}$ décroît alors de 1 à o et y décroît de o à $-\infty$. La courbe représentative a donc la forme indiquée sur la figure 1.

Fig. 1.



II. III. Calculons de suite l'arc s pour appliquer les formules de Frenet. On a :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \operatorname{tang}^2\frac{x}{a}\right)dx^2 = \frac{dx^2}{\cos^2\frac{x}{a}}.$$

Prenons sur la courbe comme sens des arcs croissants le sens des x croissants et il vient :

$$ds = \frac{dx}{\cos\frac{x}{a}},$$

d'où

$$(1)\qquad s = \int_0^x \frac{dx}{\cos\frac{x}{a}} = a\,\mathrm{L}\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2a} + \frac{\pi}{4}\right);$$

on a, ensuite,

$$(2)\qquad \alpha = \frac{dx}{ds} = \cos\frac{x}{a},\qquad \beta = \frac{dy}{dx} = -\sin\frac{x}{a},$$

α et β étant les cosinus directeurs de la tangente dans le sens des arcs croissants. Ces formules prouvent, en passant, que, si l'on désigne par φ l'angle de la tangente en un point M avec Ox, on a

$$\varphi = -\frac{x}{a}.$$

En différentiant les formules (2) on obtient

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{a}\sin\frac{x}{a}\cos\frac{x}{a},$$
$$\frac{d\beta}{ds} = -\frac{1}{a}\cos^2\frac{x}{a},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{R^2} = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2}{ds^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\frac{x}{a},$$

ou

$$(3) \qquad R = \frac{a}{\cos\frac{x}{a}}.$$

En appelant α' et β' les cosinus directeurs de la normale à la courbe, on a

$$\alpha' = R\frac{d\alpha}{ds} = -\sin\frac{x}{a},$$
$$\beta' = R\frac{d\beta}{ds} = -\cos\frac{x}{a}.$$

Les coordonnées X et Y du point de contact de la normale au point (x, y) avec la développée sont alors

$$(4) \qquad \begin{cases} X = x + \alpha' R = x - a\,\text{tang}\,\dfrac{x}{a}, \\ Y = y + \beta' R = a\,L\cos\dfrac{x}{a} - a. \end{cases}$$

Pour exprimer R en fonction de s, nous tirons de la formule (1)

$$\text{tang}\left(\frac{x}{2a} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{tang}\,\dfrac{x}{2a} + 1}{1 - \text{tang}\,\dfrac{x}{2a}} = e^{\frac{s}{a}},$$

ce qui donne l'égalité

$$(5)\qquad \operatorname{tang}\frac{x}{2a} = \operatorname{tang\,hyp}\frac{s}{2a};$$

on en conclut

$$(6)\qquad R = \frac{a\left(1+\operatorname{tang\,hyp}^2\frac{s}{2a}\right)}{1-\operatorname{tang\,hyp}^2\frac{s}{2a}} = a\cos\operatorname{hyp}\frac{s}{a}.$$

Ceci met en évidence un fait intéressant signalé par M. Laisant, à savoir que l'égalité (5) entraîne l'égalité suivante :

$$(7)\qquad \frac{1}{\cos\frac{x}{a}} = \cos\operatorname{hyp}\frac{s}{a}$$

et aussi celle-ci :

$$(8)\qquad \operatorname{tang}\frac{x}{a} = \sin\operatorname{hyp}\frac{s}{a}.$$

IV. Les courbes (Γ) ont pour équation

$$y = a\,\mathrm{L}\cos\frac{x}{a} + \mathrm{C}.$$

En écrivant que, en un point commun (x, y), la courbe (Γ) est orthogonale à (Γ'), on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}\operatorname{tang}\frac{x}{a} - 1 = 0$$

qui donne

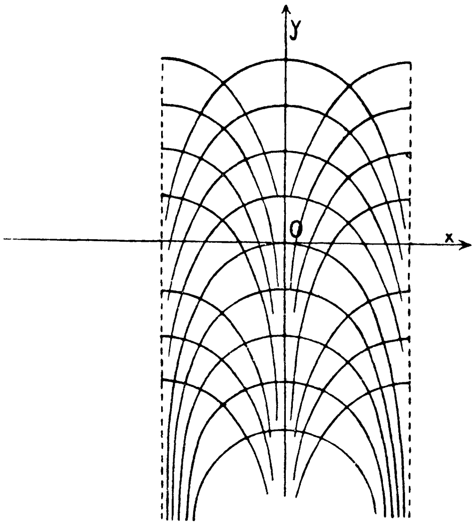
$$(9)\qquad y = \int \cot\frac{x}{a}\,dx = a\,\mathrm{L}\left(\pm\sin\frac{x}{a}\right) + \mathrm{C}'.$$

Ces courbes (Γ') [dont il ne faut, évidemment, prendre que la partie située dans les intervalles où les courbes (Γ) existent] se déduisent des courbes (Γ) par translation parallèle à Ox, car l'équation (9) s'écrit

$$y = a \operatorname{L} \cos\left(\frac{x}{a} \mp \frac{\pi}{2}\right) + C'.$$

La figure 2 montre la disposition des courbes (Γ) et (Γ').

Fig. 2.



V. L'équation des courbes (Γ_1) est

$$\frac{x}{a} = \operatorname{arc}\cos e^{\frac{y}{a}} + K.$$

L'équation différentielle des courbes (Γ'_1) est alors

$$\pm \frac{dx}{dy} \frac{e^{\frac{y}{a}}}{\sqrt{1 - e^{\frac{2y}{a}}}} + 1 = 0.$$

Pour intégrer, posons

$$e^{\frac{y}{a}} = \cos\varphi, \qquad y = a \operatorname{L} \cos\varphi,$$

et il vient

$$x = \pm a \int \operatorname{tang}^2 \varphi \, d\varphi = \pm a(\operatorname{tang}\varphi - \varphi) + K';$$

on a ainsi les trajectoires (Γ'_1) :

$$(10)\qquad \begin{cases} x = \pm a \operatorname{tang} \varphi \pm a\varphi + K', \\ y = a \operatorname{L} \cos\varphi. \end{cases}$$

En comparant ces formules avec les formules (4), on voit que les courbes (Γ'_1) se déduisent de la développée de (C) par une translation.

VI. Les coordonnées x_1, y_1 de P sont données par les formules

$$\operatorname{tang}\left(\frac{x_1}{2a} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{1}{2}},$$

$$y_1 = a \operatorname{L} \cos \frac{x_1}{a};$$

d'où

$$\log \operatorname{tang}\left(\frac{x_1}{2a} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \log e,$$

$$\frac{y_1}{a} = \frac{\log \cos \dfrac{x_1}{a}}{\log e}.$$

Pour cela cherchons, *en grades,* l'angle ψ tel que

$$\log \operatorname{tang} \psi = \frac{1}{2} \log e = 0,21714,$$

$$\psi = 65^G, 2907,$$

d'où

$$\frac{x_1}{2a} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{200} \times 65^G, 2907;$$

$$\frac{x_1}{a} = \frac{\pi}{100} \times 15^G, 2907,$$

$$\frac{y_1}{a} = \frac{\log \cos(30^G, 5814)}{0,43429} = -\frac{0,05216}{0,43429}.$$

Un calcul logarithmique donne

$$\frac{x_1}{a} = 0,4804,$$

$$\frac{y_1}{a} = -0,1201.$$