Nouvelles annales de mathématiques

J.-E. Estienne

Note sur le théorème de Pascal dans l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 66-75

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__66_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[$L^2 14 a \alpha$]

NOTE SUR LE THÉORÈME DE PASCAL DANS L'ESPACE;

PAR M. J.-E. ESTIENNE.

Nous avons publié autrefois ([1]) une étude sur la relation géométrique entre dix points d'une quadrique ou neuf points d'une quartique, ou huit points *associés*, c'est-à-dire tels que toute quadrique passant par sept d'entre eux passe forcément par le huitième point. Pour cette dernière relation seule, entre huit points associés, nous avons trouvé une forme pascalienne :

Si un octogone gauche a ses huit sommets associés, ses faces opposées se coupent suivant quatre droites qui sont sur un même hyperboloïde.

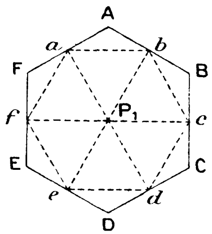
([1]) *Nouvelles Annales*, 1885, p. 131.

Ayant eu récemment l'occasion de réfléchir de nouveau sur cette question de l'extension du théorème de Pascal à l'espace, nous avons rencontré quelques propositions qui, sans prétendre à la souveraine élégance de l'hexagramme mystique, peuvent intéresser les amateurs de Géométrie.

Les voici brièvement résumées :

1° *Généralisation d'un théorème de Hesse.* — Étant donné un hexagone gauche ABCDEF et un point P_1 (*fig.* 1), si l'on mène par ce point les trois droites *ad*,

Fig. 1.



be, *cf* qui s'appuient sur les côtés opposés de l'hexagone, on sait que les côtés de l'hexagone *abcdef* sont six génératrices d'un même hyperboloïde H_1 que nous appellerons *hyperboloïde de Hesse.*

Le théorème de Hesse consiste en ce que les deux hyperboloïdes H_1 et H_2 correspondant à deux points P_1 et P_2 *associés* aux six points A, B, C, D, E, F sont identiques.

Ce théorème est un succédané non pascalien de celui que nous venons de rappeler.

Il comporte deux généralisations :

a. Si H_1, H_2 et H_3 sont trois hyperboloïdes de Hesse correspondant à trois points P_1, P_2 et P_3 situés sur une quartique circonscrite à l'hexagone ABCDEF, ces trois hyperboloïdes ont une infinité de plans tangents communs.

b. Si H_1, H_2, H_3 et H_4 sont quatre hyperboloïdes de Hesse correspondant à quatre points P_1, P_2, P_3, P_4, appartenant à une même quadrique que les sommets de l'hexagone ABCDEF, ces quatre hyperboloïdes ont huit plans tangents communs (dont les six faces de l'hexagone).

Ces généralisations comportent de nombreux corollaires plus ou moins intéressants, en particulier un mode de génération de la surface du second ordre passant par neuf points quelconques.

2° *Relation entre une génératrice et sept points quelconques d'une quadrique.* — Une telle relation présente un intérêt particulier parce qu'appliquée deux fois elle donne la relation double qui lie neuf points quelconques d'une quartique. Il suffit, en effet, de remarquer que, si neuf points sont sur une quartique, sept quelconques d'entre eux et la droite qui joint les deux autres sont sur une quadrique.

Nous avons rencontré deux formes simples de cette relation, sans pouvoir d'ailleurs en déduire une forme symétrique pascalienne.

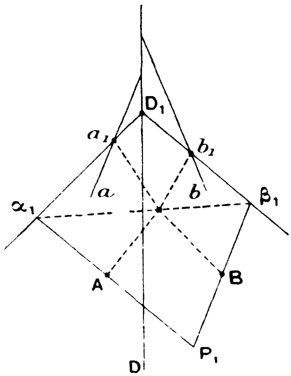
Théorème I. — *Si sept points* A, B, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 *et une droite* D *sont sur une quadrique, il en résulte que cinq certaines droites, telles que* $\alpha_1\beta_1$, *fort aisées à construire, rencontrent une même droite.*

La droite $\alpha_1\beta_1$ joint les points α_1 et β_1 où les droites P_1A et P_1B rencontrent deux plans fixes passant par la génératrice D et d'ailleurs arbitraires.

La démonstration géométrique est fort simple :

Les deux plans arbitraires passant par D coupent la quadrique suivant deux génératrices *a* et *b*. Considérons le plan P_1AB et soient D_1, a_1 et b_1 les intersections de ce plan avec les trois génératrices D, *a* et *b* (*fig.* 2).

Fig. 2.



Les six points P_1, A, B et D_1, a_1, b_1 sont sur une même conique, intersection de la quadrique avec le plan P_1AB; donc, d'après le théorème de Pascal, les droites Ab_1 et Ba_1 se coupent sur la droite $\alpha_1\beta_1$ ou, autrement dit, la droite $\alpha_1\beta_1$ rencontre l'intersection des deux plans Ab et Ba, c'est-à-dire une droite fixe quel que soit le point P_1 sur la quadrique.

Théorème II. — *La relation qui suit ne fait intervenir que des plans et des droites directement définis par les données; elle consiste en ce que quatre certains plans passent par un même point.*

Lemme. — *Si par quatre points d'une biquadratique gauche fixe, situés dans un même plan* A *et par trois points fixes quelconques on fait passer une quadrique, les quatre nouveaux points d'intersection de* *la quadrique et de la biquadratique sont dans un même plan* **X** *qui passe par un point fixe quelle que soit la quadrique.*

Ce lemme, analogue au lemme classique qui sert habituellement à démontrer le théorème de Pascal en Géométrie analytique, s'établit de la même manière :

Soient F_1 et F_2 deux quadriques dont l'intersection donne la biquadratique considérée; l'équation générale des quadriques passant par l'intersection des plans A et X avec la courbe donnée est

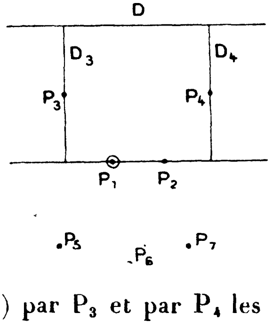
$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + AX = 0,$$

λ_1 et λ_2 étant deux paramètres arbitraires.

En écrivant que cette quadrique passe par les trois points donnés et éliminant λ_1 et λ_2 entre les trois équations ainsi obtenues, on a une relation du premier degré entre les coefficients du plan X, ce qui prouve que ce plan passe par un point fixe.

Soient maintenant une droite D et sept points P_1, P_2, ..., P_7 d'une même quadrique. Joignons $P_1 P_2$ et

Fig. 3.



menons (*fig.* 3) par P_3 et par P_4 les deux droites D_3 et D_4 s'apppuyant sur D et sur $P_1 P_2$. D'après le lemme, toutes les quadriques passant par P_1 et D (ce qui équivaut à quatre points) et par les trois points P_5, P_6, P_7 coupent les droites D_3, D_4 et $P_1 P_2$ (qui avec la droite D constituent une quartique) en trois nouveaux points dont le plan passe par un point fixe évidemment situé dans le plan $P_5 P_6 P_7$.

En considérant, par exemple, la quartique constituée par les deux plans $P_1 P_5 P_6$ et $P_7 D$, on obtient un plan X qui passe par les trois points suivants :

Premier point :

Intersection du plan $P_7 D$ et de la droite $P_1 P_2$;

Deuxième point :

Intersection des trois plans $P_1 P_5 P_6$, $P_1 P_2 P_3$, $P_3 D$;

Troisième point :

Intersection des trois plans $P_1 P_5 P_6$, $P_1 P_2 P_4$, $P_4 D$.

On peut donc dire que, si une droite D et sept points $P_1, P_2, \ldots, P_7$ sont sur une même quadrique, quatre plans, faciles à déterminer d'après les données passent par un même point.

Ces quatre plans sont par exemple :

Premier plan :

$$P_5 P_6 P_7;$$

Deuxième plan :

$$(P_7 D, P_1 P_2), \quad (P_1 P_5 P_6, P_1 P_2 P_3, P_3 D), \quad (P_1 P_5 P_6, P_1 P_2 P_4, P_4 D);$$

Troisième plan :

$$(P_5 D, P_1 P_2), \quad (P_1 P_6 P_7, P_1 P_2 P_3, P_3 D), \quad (P_1 P_6 P_7, P_1 P_2 P_4, P_4 D);$$

Quatrième plan :

$$(P_6 D, P_1 P_2), \quad (P_1 P_7 P_5, P_1 P_2 P_3, P_3 D), \quad (P_1 P_7 P_5, P_1 P_2 P_4, P_4 D).$$

Il semble que la forme pascalienne, si elle existait pour les neuf points d'une quartique, résulterait assez simplement de ce qui précède; nous n'avons pas réussi à la mettre en évidence.

Relations métriques. — Nous avons essayé, sans succès, en suivant la voie ouverte par les théorèmes de Carnot et de Chasles, de trouver quelque relation métrique *simple* entre les éléments fournis par dix points quelconques d'une quadrique.

Nous croyons cependant devoir signaler le théorème suivant qui donne une relation métrique fort simple pour exprimer que deux triangles sont inscrits et par suite circonscrits à une même conique, relation qui, croyons-nous, n'a pas été remarquée dans les nombreux travaux publiés sur cette question.

Théorème. — *Si par n points* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *non en ligne droite, on peut faire passer les côtés* $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3, \ldots$ et $\alpha'_1\alpha'_2$, $\alpha'_2\alpha'_3, \ldots$ *de deux polygones plans ou gauches, inscrits dans une quadrique, les produits segmentaires*

$$\frac{A_1\alpha_1}{A_1\alpha_2}\,\frac{A_2\alpha_2}{A_2\alpha_3}\cdots$$

et

$$\frac{A_1\alpha'_1}{A_1\alpha'_2}\,\frac{A_2\alpha'_2}{A_2\alpha'_3}\cdots$$

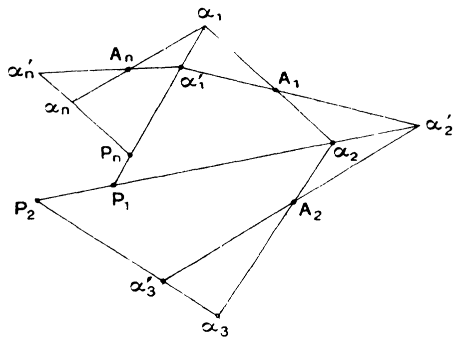
sont inverses l'un de l'autre.

Joignons, en effet, les points homologues $\alpha_1\alpha''_1$, $\alpha_2\alpha'_2, \ldots$ (*fig.* 4). Nous formons ainsi un polygone gauche dont les sommets sont aux points $P_1, P_2, \ldots, P_n$. (Pour que ce polygone existe, ne se réduise pas à un point, il faut que les points $A_1, A_2, \ldots$ ne soient pas en ligne droite, d'où la restriction de l'énoncé.) Les côtés successifs de ce polygone sont coupés aux points $\alpha_1 \alpha'_1$, $\alpha_2 \alpha'_2$, ... par la quadrique. La relation de Carnot donne donc

$$\frac{\alpha_1 P_n}{\alpha_1 P_1} \frac{\alpha'_1 P_n}{\alpha'_1 P_1} \frac{\alpha_2 P_1}{\alpha_2 P_2} \frac{\alpha'_2 P_1}{\alpha'_2 P_2} = \ldots = 1.$$

Or, en considérant le triangle $\alpha_1 \alpha_2 P_1$ coupé par la trans-

Fig. 4.



versale $\alpha'_1 \alpha'_2$, puis le triangle $\alpha'_1 \alpha'_2$, coupé par la transversale α_1, α_2, on a

$$\frac{A_1 \alpha_1}{A_1 \alpha_2} \frac{\alpha'_1 P_1}{\alpha'_1 \alpha_1} \frac{\alpha'_2 \alpha_2}{\alpha'_2 P_1} = 1$$

et

$$\frac{A_1 \alpha'_1}{A_1 \alpha'_2} \frac{\alpha_1 P_1}{\alpha_1 \alpha'_1} \frac{\alpha_2 \alpha'_2}{\alpha_2 P_1} = 1,$$

d'où l'on tire, en multipliant,

$$\frac{A_1 \alpha_1}{A_1 \alpha_2} \frac{A_1 \alpha'_1}{A_1 \alpha'_2} = \frac{P_1 \alpha_2 . P_1 \alpha'_2}{P_1 \alpha_1 . P_1 \alpha'_1} \left(\frac{\alpha_1 \alpha'_1}{\alpha^2 \alpha'_2} \right)^2;$$

on aurait de même

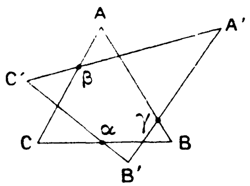
$$\frac{A_2 \alpha_2}{A_2 \alpha_3} \frac{A_2 \alpha'_2}{A_2 \alpha'_3} = \frac{P_2 \alpha_3 . P_2 \alpha'_3}{P_2 \alpha_2 . P_2 \alpha'_2} \left(\frac{\alpha_2 \alpha'_2}{\alpha_3 \alpha'_3} \right)^2.$$

Etc., etc.

En faisant le produit membre à membre de ces égalités et tenant compte de la relation de Carnot écrite plus haut, le second membre est égal à 1, ce qui démontre le théorème.

Corollaire I. — Si les côtés de deux triangles ABC et $A'B'C'$ se coupent deux à deux aux points α, β, γ (*fig.* 5), non en ligne droite, la condition nécessaire

Fig. 5.



et suffisante pour que les deux triangles soient inscrits ou circonscrits à une conique est que dans chaque triangle les produits segmentaires $\frac{\alpha B}{\alpha C} \frac{\beta C}{\beta A} \frac{\gamma A}{\gamma B}$ soient inverses.

Corollaire II. — Toute quadrique circonscrite à un pentagone gauche coupe un plan quelconque suivant une conique astreinte à une condition. Le théorème précédent donne une forme de cette condition : En appelant α, β, γ, δ, ε les points d'intersection des côtés du pentagone ABCDE et du plan (*fig.* 6), on sait que l'on a

$$\frac{\alpha C}{\alpha D} \frac{\beta D}{\beta E} = \ldots = 1.$$

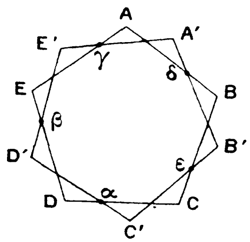
Si donc $A'B'C'D'E'$ est un pentagone du plan, dont les côtés passent par les points α, β, γ, δ, ε, avec la condition

$$\frac{\alpha C'}{\alpha D'} \frac{\beta D'}{\beta E'} = \ldots = 1,$$

la conique déterminée par les cinq points A′, B′, C′, D′, E′ est sur une quadrique passant par les cinq points A, B, C, D, E.

Corollaire III. — Si par cinq points d'un plan on fait passer les côtés de deux pentagones gauches quel-

Fig. 6.



conques, leurs dix sommets sont toujours sur une même quadrique, car les produits segmentaires, étant pour chaque pentagone égaux à 1, sont inverses.

Ce dernier théorème n'est pas nouveau; nous le citons à cause de la simplicité de la démonstration.